ARTIGO

DOI: https://doi.org/10.53727/rbhc.v18i1.1049

A invenção da teoria das tranças: textos e contextos

The invention of the theory of braids: texts and contexts

Juliana Roberta Theodoro de Lima | Universidade Federal de Alagoas
juliana.lima@im.ufal.br
https://orcid.org/0000-0002-2429-167X

Ediel Azevedo Guerra | Universidade Federal de Alagoas
ediel@mat.ufal.br
https://orcid.org/0000-0003-3090-7167

RESUMO Este artigo trata da criação da teoria das tranças sob um ponto de vista histórico e parte da seguinte questão investigativa: como aconteceu a criação da teoria das tranças? Trata-se de uma pesquisa bibliográfica inspirada na proposta da *história-problema* de March Bloch e Lucien Febvre, historiadores da Escola dos Annales. São explicitados os problemas, conceitos e teoremas principais que motivaram a criação da teoria das tranças, apontando os personagens envolvidos, seus tempos históricos, contextos institucionais de formação e de atuação.

Palavras-chave matemática – história – teoria das tranças – teoria dos nós.

ABSTRACT *This article deals with the creation of the braid theory from a historical perspective and starts from the following investigative question: how the creation of braid theory has happened? It is a bibliographical research inspired by the history-problem proposal of March Bloch and Lucien Febvre, historians from the Annales School. The main problems, concepts and some remarkable and famous theorems which have motivated the construction of braid theory are explained, pointing out some involved characters, their timelines, institutional contexts about educational background and situation.*

Keywords *mathematics – history – braid theory – knot theory.*

Introdução

Desenvolvemos este trabalho tendo como pressuposto básico a observação de Vinciguerra (1999) de que a matemática pode ser entendida como um discurso no sentido proposto por Foucault (2012). Isso implica fundamentalmente entender a matemática como uma produção de discursos, ou seja, de práticas que constituem os objetos de que falam.

Como assinala Roque (2014), os objetos matemáticos como encontrados nos textos matemáticos contemporâneos, compostos segundo o método axiomático, trazem uma opacidade que esconde diferentes contextos históricos neles implícitos, uma historicidade que não se evidencia naturalmente ao leitor desses textos. Na sua redação, em geral, assumem-se esses objetos como dados.

Em face dessa observação, defendemos que se ampliem as iniciativas de produção de textos que explicitem os contextos de criação e limiares de cientificidade e de formalização da matemática atual. Para atender a essa demanda, nos colocamos ao lado de Roque (2014) quando defende que se faz necessário que a história da matemática desmascare os percursos de formação desses objetos, exibindo os problemas que os suscitaram, como se mostraram relevantes para as soluções construídas e como essas foram incorporadas em uma teoria matemática. É isso que buscamos neste artigo sobre a constituição da teoria das tranças.

O nosso objetivo geral neste artigo é investigar a criação da teoria das tranças como área de pesquisa em matemática. Como objetivos específicos, mencionamos os seguintes:

a) identificar as condições de possibilidade da criação da teoria das tranças e os marcos teóricos da criação dessa teoria; b) analisar como se deu a consolidação dessa teoria como área de pesquisa matemática.

Neste artigo, consideramos *teoria* no sentido dado por Bunge (1980, p. 41) – a saber, como um "conjunto de proposições ligadas logicamente entre si e possuindo referentes em comum" – e área de pesquisa como um paradigma no sentido kuhniano (Kuhn, 2017, p. 72) – a saber, como as realizações de comunidades duradouras de pesquisadores reunidas em torno de uma teoria decorrente e alimentada por problemas e métodos legítimos dos quais resultam tradições coerentes e específicas de pesquisas científicas.

Partindo dos textos de Artin (1925), Epple (1995) e Przytycki (1998) explicitamos os problemas que motivaram a criação da teoria das tranças destacando os personagens envolvidos e seus tempos históricos, seus contextos institucionais de formação e de atuação, em uma abordagem inspirada na proposta da história-problema de March Bloch e Lucien Febvre (Febvre, 1989; Reis, 2010).

Este artigo está estruturado do seguinte modo. Na seção 1, apresentamos as definições de nós, *links* e tranças que utilizaremos. Na seção 2, trazemos um esboço do contexto da emergência do conceito dos nós, incluindo discursos que funcionam como condições de possibilidade para a invenção da teoria das tranças, nomeadamente os discursos da topologia, da teoria dos nós e da teoria combinatória dos grupos. Na seção 3, passamos a focalizar a emergência do conceito das tranças, com a criação do primeiro paradigma da teoria das tranças. Na seção 4, focalizamos a emergência de novos discursos e paradigmas na teoria das tranças. Finalizamos em seguida com as considerações finais.

1. Conceitos preliminares

Imagine que você está segurando três fios de barbante e começa a entrelaçá-los de forma ordenada. O que você está fazendo? Uma trança! Esse gesto simples, presente em penteados e artesanatos ao redor do mundo, esconde uma rica estrutura matemática estudada na teoria dos nós e das tranças. Mas como algo tão cotidiano pode estar ligado a conceitos profundos da matemática?

No sentido mais usual, uma trança é, *grosso modo*, um conjunto de fios que se entrelaçam de maneira ordenada sem se entrecortar. Na matemática, esse conceito é formalizado na teoria das tranças, criada em 1925 pelo matemático Emil Artin (1925).

Tranças não aparecem apenas na matemática. Elas têm uma história fascinante que atravessa culturas e épocas. No Egito Antigo representavam *status* social e eram usadas por faraós e membros da nobreza (Fletcher, 1995). Em culturas africanas, diferentes padrões de tranças indicavam a origem étnica, estado civil e até mesmo mensagens secretas durante a escravidão (Byrd; Tharps, 2014). Na Europa medieval, sabe-se que mulheres utilizavam tranças como símbolo de feminilidade e tradição (Sherrow, 2006).

Atualmente esse conceito é fundamental em diversas áreas. Na área da computação, a criptografia quântica usa grupos de tranças para proteger dados (Dehornoy et al., 2000); em física, modelos de tranças ajudam a compreender partículas em teorias de campos (Kauffman, 2001); em biologia, a estrutura do DNA pode ser modelada matematicamente por tranças (Sumners; Whittington, 1988).

As tranças são, desse modo, um exemplo fascinante de como conceitos aparentemente simples do nosso cotidiano podem ter profundidade matemática e importância histórica. Desde os cabelos trançados da Antiguidade até a matemática abstrata e a ciência moderna, elas conectam mundos diferentes de maneira surpreendente.

Como veremos nas seções subsequentes deste artigo, as tranças encontram-se estreitamente relacionadas aos conceitos de nós e de *links*. Então iniciaremos formalizando matematicamente os conceitos de nós, *links* e tranças bem como, também, apresentando algumas figuras ilustrativas desses objetos matemáticos que ajudarão a entender as proposições e os argumentos utilizados no desenvolvimento deste artigo. A formalização desses conceitos faz uso de algumas noções elementares de topologia.

Comecemos pelo conceito de nós. Um *nó* no espaço euclidiano tridimensional R^3 é um subconjunto $K \subset R^3$, com a topologia induzida do R^3, que pode ser obtido como imagem do círculo unitário centrado na origem do plano euclidiano por um homeomorfismo, isto é, por uma aplicação $k: C \subset R^2 \to K \subset R^3$, bijetora, contínua com inversa contínua, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no espaço euclidiano 2-dimensional R^2 com a topologia induzida desse espaço ambiente.

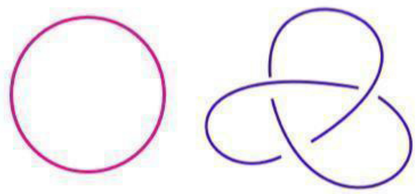

Figura 1: À esquerda: a imagem de um nó trivial; à direita: a imagem de um nó do tipo trevo (*trefoil*).
Fonte: elaborada pelos autores.

Kurt Reidemeister (1893-1971) formalizou em 1927 um método para decidir quando dois nós são equivalentes, estabelecendo três tipos de movimentos possíveis nas projeções planares de nós que poderiam ser realizados sem que se alterasse a natureza topológica do nó (ver Figura 2). Dois nós são *equivalentes* se por uma sequência de movimentos de Reidemeister é possível passar do diagrama de um deles para o diagrama do outro. Por meio desses movimentos, se pode decidir quando dois nós são equivalentes ou não de um ponto de vista topológico (Adams, 2004).

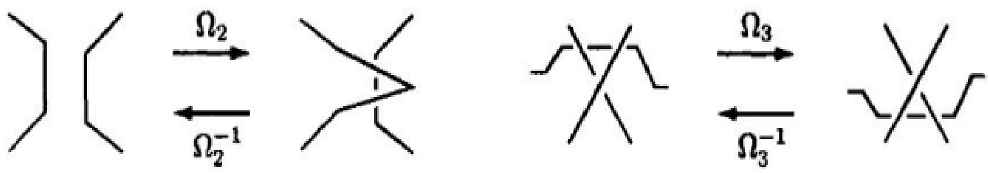

Figura 2: Movimentos de Reidmeister nas cordas de links, nós e tranças. Fonte: Murasugi e Kurpita (1999, p. 131).

Às vezes, podemos nos referir ao nó *K* como sendo a aplicação *k* dada no parágrafo anterior. Um *n-link* em R^3 é qualquer conjunto de *n* nós em R^3 dados por $k_i\colon C \to K_i$, onde $C \subset R^2$, $K_i \subset R^3$, $i \in \{1,2.3, \ldots, n, \ldots\}$, cujas imagens têm interseção vazia. Alguns exemplos encontram-se na Figura 3. Um *n-link* será denotado por $L = (K_1, K_2, \ldots, K_n)$, onde cada K_i é um nó em R^3.

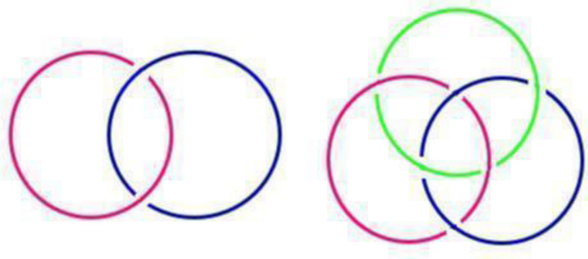

Figura 3: À esquerda, o *2-link* de Hopf; à direita, o *3-link* borromeano. Fonte: elaborada pelos autores.

Passemos, agora, à definição de uma n-trança. Para isso, considere o cubo unitário no espaço euclidiano 3-dimensional R^3, dado por $C = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq 1{,}0 \leq z \leq 1\}$.

Considere os n pontos $A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1\right), A_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 1\right), \ldots, A_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1\right)$, na face superior do cubo $\{(x,y,z); 0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq 1, z = 1\}$ e os n pontos $B_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0\right)$, $B_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 0\right), \ldots, B_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0\right)$, na face inferior do cubo definido pelo conjunto $\{(x,y,z); 0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq 1, z = 0\}$. Uma *n-trança* é uma coleção de n cordas (ou caminhos) $d_1, d_2, \ldots, d_n$, onde cada corda d_i é um caminho suave (ou suave por partes), que liga o ponto A_i ao ponto $B_{j(i)}$, com $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $j(i) \in \{1,2,\ldots,n\}$, satisfazendo as três condições seguintes:

(i) as imagens dos caminhos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ são mutuamente disjuntas;

(ii) $i_1 \neq i_2 \Rightarrow j(i_1) \neq j(i_2)$, para $i_1\ e\ em\ \{1,2, \ldots, n\}$;

(iii) cada plano $z = s, 0 \leq s \leq 1$,paralelo ao plano *xy* intersecta cada corda d_i uma, e somente uma única vez.

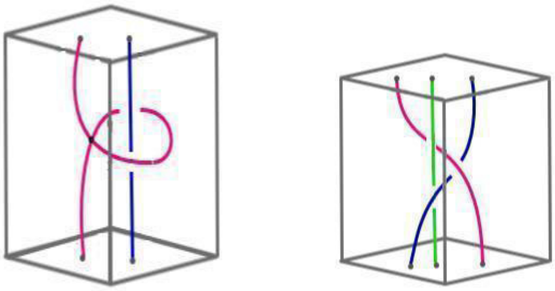

Figura 4: À esquerda: uma 3-trança; à direita: não é uma 2-trança (enlaçamento de intervalo).
Fonte: elaborada pelos autores.

Observe que na Figura 4 à direita, a estrutura não é uma 2-trança já que sua primeira corda d_1 possui uma autointersecção, que deixa de satisfazer a condição (iii) da definição. Em palavras mais informais, uma trança não pode ter intersecções entre suas cordas, seus fios devem sempre estar orientados do topo para o fim do paralelepípedo e cada fio deve sair e chegar de pontos únicos na base superior e inferior do paralelepípedo.

Tranças são casos particulares de estruturas de nós e *links*. Apesar disso, sua estrutura por si só admite um protagonismo necessário na matemática, não só para o desenvolvimento da teoria em si, mas na sua ampla utilização em diferentes áreas das ciências exatas, biológicas e até mesmo das ciências humanas.

2. As condições de possibilidade da teoria das tranças

Apresentamos nessa seção informações históricas acerca da emergência dos discursos fundadores da teoria dos nós (seção 2.1), da topologia (seção 2.2) e da teoria combinatória dos grupos (seção 2.3) que funcionaram, no âmbito da própria matemática, como motivação e fontes de diálogo para a invenção da teoria das tranças.

2.1 Criação da teoria dos nós

Nesta seção, apresentamos os aspectos mais relevantes relativos à criação da teoria dos nós. Iniciamos destacando que há autores como Przytycki (1998), que têm localizado enunciados sobre *nós* já em artigos da segunda metade do século XVIII e primeira do século XIX, como se vê nas citações seguintes:

> The craftsman who fashions a braid, a net, or some knots will be concerned, not with questions of measurement, but with those of position[1] (Vandermonde, 1771 *apud* Przytycki, 1998).

> One of the oldest notes by Gauss to be found among his papers is a sheet of paper with the date 1794. It bears the heading "A collection of knots" and contains thirteen neatly sketched views of knots with English names written beside them. With it are two additional pieces of paper with sketches of knots. One is dated 1819; the other is much later...[2] (Stäckel, 1917 *apud* Przytycki, 1998).

Entretanto, em uma visita à antiga biblioteca de Göttingen em julho de 1995, Przytycki relata que ao examinar os nós desenhados por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1794 constatou que nem todos eles são desenhados, alguns são apenas descritos. Em Przytycki (1998) encontra-se um desenho de um desses nós de 1794.

Nas anotações de Gauss de 22 de janeiro de 1833, segundo Przytycki (1998), ainda sobre a temática dos nós e *links*, encontram-se cálculos mostrando que o número de ligações de dois *links* ou de autointerseções de um nó pode ser obtido por meio de uma integração: a chamada *integral de ligação de Gauss*. Essa ideia de Gauss foi levada adiante por Johann Benedict Listing (1808-1882), um estudante de Gauss, que em um trabalho chegou a aplicá-la ao nó de Listing ou nó da "figura oito" (Figura 5).

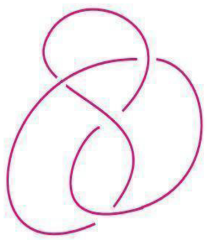

Figura 5: Nó de Listing . Fonte: elaborada pelos autores.

Se deve a Johann Benedikt Listing (1808-1882), segundo Przytycki (1998), a publicação da monografia *Vorstudien zur Topologie* (Estudos preliminares sobre topologia), em 1847, na qual ele mostra que o nó de trevo (ou trifólio) e sua imagem especular não são equivalentes (ou seja, são quirais), enquanto o nó figura oito e sua imagem especular são equivalentes (ou seja, são antiquirais ou aquirais).

Embora já presente esparsamente em trabalhos científicos, os nós só começam a ganhar relevância teórica em 1867 quando, depois de observar os experimentos do físico escocês Peter Tait (1831-1901) envolvendo anéis de fumaça, William Thomson, *lord* Kelvin (1824-1907),

1 Tradução: "os artesãos que confeccionam uma trança, uma rede ou alguns nós estarão preocupados, não com questões de medições ou medidas, mas com aquelas de posição". As traduções de trechos em outros idiomas que não o português são livres e foram feitas pelos autores.

2 Tradução: "uma das mais antigas anotações de Gauss encontrada entre seus escritos é uma folha de papel com a data de 1794. Ela tem como título 'Uma coleção de nós' e contém nitidamente esboços de trinta nós com nomes em inglês ao lado deles. Nelas estão dois pedaços adicionais de papel com esboços de nós. Um é datado de 1819; o outro é de muito depois...".

propôs a ideia de que os átomos da matéria poderiam ser nós de turbilhões ou vórtices no éter. Segundo essa proposta, os elementos químicos e as moléculas corresponderiam a nós e *links*.

A esse propósito, vale lembrar que as experiências de Tait foram inspiradas por um artigo de Hermann von Helmholtz (1821-1894) intitulado “Sobre anéis de vórtices em fluidos incompressíveis”. Thomson e Tait acreditavam que a compreensão e classificação de todos os nós possibilitaria explicar por que os átomos absorvem e emitem luz apenas em comprimentos de onda discretos. Por exemplo, Thomson pensou que o sódio poderia ser o *link* de Hopf devido às suas duas linhas de espectros (Sossinsky, 2002).

Vale destacar, entretanto, a propósito da classificação dos nós, que Epple (1995, p. 376) menciona a existência de uma carta notável de Enrico Betti (1823-1892) endereçada a Tardy, datada de 6 de outubro de 1863, na qual se encontram conversas dele com Riemann nas quais esse geômetra alemão diz Gauss, nos seus últimos dias, julgava que o problema de classificação de nós era importante.

Subsequentemente, Tait começou a listar nós únicos na crença de que estivesse criando uma tabela de elementos. Ele formulou o que agora é conhecido como as conjecturas de Tait em nós alternantes (lembremos, aqui, que um nó é *alternante* quando sua projeção planar apresenta autocruzamentos nos quais se alternam os tipos de autocruzamentos do tipo sobre e do tipo sob). A propósito, vale registrar aqui que: (1) as conjecturas de Tait foram comprovadas apenas muito depois, na década de 1990; (2) as tábuas de nós de Tait foram posteriormente aprimoradas por Charles Newton Little (1858-1923) e Thomas Kirkman (1806-1895). Os resultados de Tait podem ser encontrados em Tait (1877).

Além desses fatos, vale também destacar que o físico escocês de grande expressividade James Clerk Maxwell (1831-1879), um colega e amigo de Thomson e Tait, também desenvolveu um forte interesse sobre nós. Maxwell estudou o trabalho de Listing acerca dos nós, reinterpretando a integral de ligação de Gauss em termos da teoria eletromagnética. Na sua formulação, a integral representa o trabalho feito por uma partícula carregada movendo-se ao longo de um componente da ligação sob a influência do campo magnético gerado por uma corrente elétrica ao longo do outro componente. Maxwell também continuou o estudo dos anéis de fumaça considerando três anéis interativos. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes matemáticos acerca da relação entre os nós e a teoria eletromagnética em Baez e Muniain (1994, p. 315).

Quando o éter (*símero luminífero*) não foi detectado no experimento de Michelson-Morley, a teoria do vórtice tornou-se completamente obsoleta e a teoria dos nós, nesse momento histórico, deixa de ser de grande interesse científico no âmbito da química e da física. Curiosamente, essa teoria volta a ganhar relevo na física-matemática no final do século XX (Witten, 1989; Atiyah, 1990; Baez; Muniain, 1994).

A despeito do declínio da teoria dos nós nessas ciências aplicadas no início do século XX, uma nova teoria começa a emergir, na qual os nós passarão a ocupar um lugar de proeminência como objetos matemáticos de interesse. No que se segue, contaremos um pouco da história do início da formalização dessa nova teoria, a topologia – mais especificamente a topologia algébrica –, na qual os nós passarão a ganhar um lugar de relevância crescente.

2.2 Criação da topologia

As tranças são objetos matemáticos estreitamente relacionados ao campo algébrico e ao campo topológico devido às suas características em nível de equivalência dessas estruturas estarem relacionadas aos estudos de teorias das isotopias, homotopias (*link* homotopia), grupos fundamentais de espaços etc. conhecidas como *teorias de homotopia de baixa dimensão (low dimensional homotopy theory)*. Nesta seção, destacamos pontos na emergência do discurso da topologia que julgamos necessários para entender dois pontos relevantes: (1) a permanência do interesse na teoria dos nós mesmo em face do decaimento do seu interesse nos contextos da física e da química; (2) o entendimento da origem e da extensão da teoria das tranças em um plano para a teoria das tranças em superfícies topológicas.

No que diz respeito às raízes da topologia, observamos na história da matemática que a necessidade de uma geometria de posição – isto é, de uma topologia ou "geometria" na qual se desprezem as distâncias ou as medições e se priorizem as relações que dependem das posições – pode ser já encontrada em textos de Leibniz (1646-1716) do século XVII, como atestam as citações seguintes:

> I consider that we need yet another kind of analysis, geometric or linear, which deals directly with position, as algebra deals with magnitude (Leibniz, 1679, *apud* Przytycki, 1998, p. 533).[3]
>
> As far back as 1679, Leibniz, in his *Characteristica geometrica*, tried to formulate basic geometric properties of geometrical figures, to use special symbols to represent them, and to combine these properties under operations so as to produce others. He called this study *analysis situs* or *geometria situs*... To the extent that he was at all clear, Leibniz envisioned what we now call combinatorial topology (Kline, 1972 *apud* Przytycki, 1998, p. 533).[4]

A despeito dessas intuições de Leibniz, vamos encontrar em Leonhard Euler (1707-1783), em 1736, o primeiro exemplo de monta no qual essa geometria de posição aparece de maneira mais explícita em seu trabalho sobre o problema das pontes de Könisberg. Esse artigo pode ser considerado como o marco teórico de fundação da teoria dos grafos e da topologia combinatória. Vale destacar uma citação do próprio Euler acerca desse trabalho:

> The branch of geometry that deals with magnitudes has been zealously studied throughout the past, but there is another branch that has been almost unknown up to now; Leibniz spoke of it first, calling it the "geometry of position" (*geometria situs*). This branch of geometry deals with relations dependent on position; it does not take magnitudes into consideration, nor does it involve calculation with quantities. But as yet no satisfactory definition has been given of the problems that belong to this geometry of position or of the method to be used in solving them (Euler, 1736 *apud* Przytycki, 1998, p. 533-534).[5]

3 Tradução: "eu considero que precisamos um outro tipo de análise, geométrica ou linear, que lide diretamente com posição, como a álgebra lida com grandeza".

4 Tradução: "Já em 1679, Leibniz, em seu trabalho *Characteristica geometrica*, tentou estabelecer propriedades geométricas básicas de figuras, usar símbolos especiais para representá-las, e combinar essas propriedades sob operações, assim como produzir outras. Ele chamou esse estudo de *analysis situs* ou *geometria situs*... Em uma certa medida podemos dizer que Leibniz vislumbrava o que agora chamamos topologia combinatória".

5 Tradução: "O ramo da matemática que trabalha com grandezas tem sido cuidadosamente estudado no

Fica assim evidente que até 1736 começavam a se esboçar os primeiros movimentos em direção à criação do discurso da topologia como área de investigação de propriedades de configurações de pontos independentes de métricas ou de distâncias. Possivelmente, se deve ao matemático alemão Listing a primeira citação da palavra *topologia* em um trabalho científico, no artigo "*Von der Helikoïde oder Wendellinie*", publicado em 1847. Esse trabalho se encontra reimpresso em 1848 no *Vorstudien zur Topologie*.

O conceito de transformação emergiu aos poucos na matemática. O conceito de transformação isométrica, por exemplo, emergiu dos trabalhos de Gauss sobre geometria diferencial. Em seu teorema *egregium*, ele mostra que a curvatura gaussiana é invariante por isometrias. Em 1851, Riemann introduz noções (ou conceitos) topológicos em sua tese de doutorado no estudo das propriedades das funções conformes de uma variável complexa, ou seja, das funções complexas que preservam ângulos, abrangendo as propriedades das superfícies que atualmente são denominadas *superfícies de Riemann*. Após esses trabalhos iniciais sobre superfícies de Riemann, intensificaram-se os estudos sobre as superfícies bidimensionais no espaço euclidiano tridimensional.

Duas décadas depois, em seu Programa Erlangen, em 1872, Felix Klein (1849-1925) propõe uma nova interpretação do que seja uma geometria, como o estudo das propriedades invariantes de um espaço pelo grupo de suas isometrias (isto é, transformações de um espaço que preserva a métrica ou distância entre pontos do espaço). É nesse contexto que vai emergindo o conceito de topologia de uma superfície como o estudo das propriedades de superfícies bidimensionais que são invariantes – ou que ficam inalteráveis – por deformações que não as rasguem ou as cortem.

Torna-se natural a partir de Klein definir a geometria diferencial como o estudo das propriedades das superfícies que ficam invariantes pelas transformações diferenciáveis com inversa diferenciáveis que são localmente isométricas; a topologia como o estudo das propriedades das superfícies que ficam invariantes por transformações contínuas com inversas contínuas (isto é, as transformações homeomórficas) e o estudo das superfícies de Riemann como o estudo das propriedades das superfícies que ficam invariantes por transformações localmente conformes com inversas conformes.

No âmbito da topologia, destacam-se resultados que vão culminar com o teorema de classificação das superfícies topológicas (isto é, aquelas localmente homeomorfas a um disco aberto do R^2). Podem ser destacados: (1) os resultados de classificação sobre superfícies bidimensionais compactas obtidos por August Möbius (1790-1868), em 1861, e Camille Jordan (1838-1922), em 1866; (2) os resultados obtidos entre 1888 e 1890 por Walther von Dyck (1856-1934) que dão uma caracterização das superfícies bidimensionais orientáveis e não orientáveis. de Von Dyck, inclusive, em um trabalho posterior, estende seus raciocínios para dimensões maiores, mostrando que o espaço projetivo de dimensão n é orientável ou não orientável a depender de n ser par ou ímpar.

passado, mas existe um outro ramo que tem sido quase desconhecido até agora; Leibniz falou dele primeiro, chamando-o 'geometria de posição' (*geometria situs*). Esse ramo da geometria lida com relações dependentes de posições; ela não leva em considerações grandezas, nem envolve cálculos com quantidades. Mas ainda nenhuma definição satisfatória tem sido dada aos problemas que pertencem a essa geometria de posição ou ao método a ser usado para resolvê-los".

Será, contudo, em 1895 que Henri Poincaré (1854-1912), professor de física matemática da Sorbonne, publicará o texto "*Analysis situs*", obra que pode ser considerada como marco teórico da criação da topologia algébrica. Apresenta nele definições de uma variedade, cria os conceitos de grupo fundamental e de ferramentas algébricas para o estudo da topologia.

Esse trabalho sistematiza e formaliza muitas ideias e intuições topológicas introduzidas anteriormente por vários matemáticos dos séculos XVIII e XIX: Euler, Gauss, Listing, Simon L'Huillier, Riemann, Möbius, Félix Klein, Betti, entre outros.

Vale destacar, entretanto, que foi somente em 1907 que o matemático alemão Max Dehn (1878-1952) e o matemático dinamarquês Poul Heegaard (1871-1948) vão apresentar uma classificação das superfícies compactas orientáveis e não orientáveis sob a hipótese de que todas as superfícies conexas e compactas são trianguláveis, fato que apenas será demonstrado posteriormente, em 1925, pelo matemático húngaro Tibor Radó (1895-1965).

Atualmente, como resultado desses estudos e da definição de variedade do matemático estadunidense Hassler Whitney (1907-1989), proposta na década de 1930, o teorema de classificação das superfícies topológicas pode ser enunciado do seguinte modo: qualquer superfície bidimensional conexa e compacta é homeomorfa a exatamente uma das superfícies seguintes: (1) a uma esfera ou a uma soma conexa de toros, quando a superfície é orientável; (2) a uma esfera com um número finito de discos removidos e com *cross caps* colados em seus lugares, quando a superfície não é orientável.

2.3 Teoria combinatória dos grupos

Outro acontecimento de relevo para a criação *a posteriori* da teoria das tranças é a emergência, na década de 1880, da teoria combinatória de grupos. Esse discurso tem como objeto o estudo de grupos por meio de geradores e relações. Os primeiros passos dessa teoria encontram-se em trabalhos do matemático alemão Walther von Dyck, um estudante de Felix Klein, produzidos no início da década de 1880. Esse trabalho traz para o primeiro plano a ideia de caracterização de grupos por meio de geradores e relações.

É nesse contexto teórico que, em 1904, o matemático austríaco Wilhelm Wirtinger (1865-1945) mostra, em um encontro da Sociedade Alemã de Matemática, um método para achar uma apresentação do *grupo de um nó*, isto é, do grupo fundamental do conjunto complementar de um nó. Quando um determinado grupo é apresentado por meio de seus geradores e relações, dizemos que essa representação é a *apresentação de um grupo*. Quando a quantidade de geradores e relações são finitas, diz-se que a apresentação é *finitamente apresentada*. Essa apresentação do grupo de um nó dada por Wirtinger é atualmente chamada *apresentação de Wirtinger* do grupo de um nó. Ele obteve seu doutoramento em 1887 na Universidade de Viena, onde tornou-se professor.

Em 1908, Heinrich Tietze (1880-1964), um matemático austro-húngaro, publica um artigo no qual mostra, entre outras coisas, que o grupo fundamental de uma variedade tem apresentação finita e que se há duas apresentações finitas de um grupo então uma delas pode ser transformada na outra por uma sequência de transformações atualmente denominadas *transformações de Tietze*. Ele usou também o grupo fundamental do complementar de um nó em R^3, chamado grupo de um nó, para distinguir um nó trivial de um nó trevo. Ele iniciou seu curso de matemática na Universidade Tecnológica de Viena, em 1898, e concluiu seu doutorado na Universidade de Viena em 1904, após estada de um ano em Munique.

Dois anos depois dessa publicação de Tietze, em 1910, Max Dehn (1878-1952), matemático alemão que obteve o doutorado em matemática sob orientação de David Hilbert (1862-1943), em Göttingen, apresenta um trabalho em teoria dos nós motivado pelo seu interesse na resolução da conjectura de Poincaré. Vale notar aqui uma primeira situação na qual se vê os nós, que haviam perdido sua relevância na química, passando a ganhar relevo como conceito topológico.

Foi nesse contexto que Dehn desenvolveu um algoritmo para a determinação do grupo fundamental do complemento de um *link* (estrutura com mais de um nó como componente). Usando esse conceito de grupo fundamental do complemento de um *link*, ele mostra nesse ano que um nó é não trivial se e somente se seu grupo fundamental é não abeliano e mostra também que um nó trevo não é equivalente à sua imagem especular (ou seja, Dehn mostra que o nó trevo não é aquiral). Na demonstração desse resultado ele utiliza um lema agora conhecido como *Lema de Dehn* e um procedimento chamado de *Cirurgia de Dehn* para construir homologia de esferas. Um erro foi encontrado em sua prova pelo matemático estoniano Hellmuth Kneser (1898-1973) em 1929; o argumento foi corrigido apenas em 1957 pelo matemático grego Christos Papakyriakopoulos (1914-1976).

Já no âmbito da teoria combinatória dos grupos, em 1911, Max Dehn formula os três problemas seguintes acerca dos grupos dados por geradores e relações: dado G um grupo abstrato (no qual a operação com notação multiplicativa está subentendida), definido por uma apresentação. Dizemos que w é uma palavra em G se w é um produto finito de elementos (letras) de G, que quando elevadas a alguma potência, tais potências são ou 1 ou -1. Em símbolos, $w = x_{i_1}^{e_1} x_{i_2}^{e_2} \dots x_{i_{(n-1)}}^{e_{(n-1)}} x_{i_n}^{e_n}$, para algum $n \in N, x_{i_k} \in G, e_k = \pm 1, k = 1,2,\dots,n$. Nesse contexto, seguem os problemas propostos por Dehn:

a) o problema da palavra: para qualquer palavra w em G, decida quando w define o elemento identidade e em G ou não;

b) o problema da conjugação: para quaisquer duas palavras v e w em G estabeleça um procedimento ou algoritmo que permita decidir quando essas palavras são conjugadas ou não, isto é, quando existe uma palavra x em G tal que $x^{-1}vx$, com v em G, define a mesma palavra que w;

c) o problema do isomorfismo: dado um grupo G_0 definido por meio de uma apresentação distinta daquela de G, decidir quando esses grupos são isomorfos.

Quando é estabelecido um procedimento ou um algoritmo que permite realizar as decisões citadas nesses problemas, diz-se que o problema é *solúvel* ou *decidível*. Mais detalhes podem ser encontrados em Cutland (1980, cap. 1). Esses três problemas são investigados na teoria combinatória de grupos. Eles têm sido resolvidos para alguns grupos particulares, mas não em geral. Existem casos nos quais mesmo o problema da palavra, o mais fácil dos três, é insolúvel, ou seja, não é possível encontrar nenhum algoritmo que reduza uma palavra dada à identidade.

Os trabalhos de Dehn e de seus colegas na teoria dos nós foram suspensos durante a Primeira Guerra Mundial. Durante essa guerra não se registra nenhum resultado novo na teoria dos nós.

3. A invenção da teoria das tranças

O registro mais remoto de uma trança por um matemático, segundo Przytycki (1998), se deve a Gauss em um dos seus cadernos manuscritos. Przytycki estima que o desenho da trança feita por Gauss, replicada por ele nesse artigo de 1998, foi realizado entre 1814 e 1830, achando difícil datar com maior precisão o ano em que ele foi produzido. Depois desse desenho de Gauss, dois outros registros de uma trança vão aparecer ainda implicitamente em Adolf Hurwitz (1859-1919), em 1891, e no trabalho de doutorado de Alexander em 1915.

É relevante observar que, entre meados de 1860-1899, se iniciaram as pesquisas nas áreas de genética. A discussão sobre a conservação de características entre cruzamentos de plantas (ervilhas), despertavam curiosidade em características diferentes de cruzamentos entre híbridos, nos trabalhos de Gregor Mendel (1822-1884), de 1866. A relação entre a genética e representação geométrica das tranças de Artin (1925): os geradores das tranças planificadas são muito similares a cromossomos (ver Figura 5); quando vistas mergulhadas no R^3, tem aspecto de um DNA. A caminhada de mãos dadas da biologia e da matemática se estendeu até a descoberta da dupla hélice do DNA em 1953, laureando Francis Crick, James Watson e Maurice Wilkins ao Nobel pela descoberta em 1962. Nessa época, a exploração da teoria da topologia algébrica como protagonista em espaços isotopicamente conservadores de características, foi fundamental para o desenvolvimento e entendimento da estrutura biológica.

Nosso objetivo, entretanto, nesta seção é entender como se deu a criação da teoria das tranças. Apresentamos, com essa finalidade, as contribuições dos principais matemáticos para o estabelecimento dessa teoria como uma área de pesquisa da matemática. Focalizamos nossa atenção nos matemáticos Alexander (seção 3.1), Artin (seção 3.2) e Markov (seção 3.3).

3.1 Alguns aspectos históricos sobre o teorema de Alexander

James Waddell Alexander (1888-1971) nasceu no estado de New Jersey nos Estados Unidos. Obteve seu doutorado em Princeton em 1915 sob a orientação do matemático estadunidense Oswald Veblen (1880-1960). O orientador de Veblen foi Eliakim H. Moore (1862-1932), um matemático estadunidense que frequentou aulas de Leopold Kronecker (1823-1891) e Karl Weierstrass (1815-1897) em Berlim. No campo da topologia, Veblen destacou-se como um dos pioneiros da topologia algébrica, formalizando ideias relativas à teoria da homologia de Poincaré expostas em seu artigo "*Analysis situs*", de 1895, e fundando a teoria da cohomologia.

O trabalho relevante de Alexander no âmbito da teoria das tranças foi obtido em sua tese de doutoramento, em 1915 – como já mencionamos –, mas foi publicado apenas em 1923, e afirma que todo nó ou *link* orientado pode ser representado como o fechamento de uma trança (Murasugi; Kurpita, 1999). O fechamento de uma trança de n cordas (ou n caminhos) d_1, d_2,..., d_n, onde cada corda d_i é um caminho suave (ou suave por partes), que liga o ponto A_i ao ponto B_i, com i ∈ 1, 2,..., n, é o *link* que se obtém unindo o ponto A_i ao ponto B_i por uma curva contínua, para i variando de 1 a n.

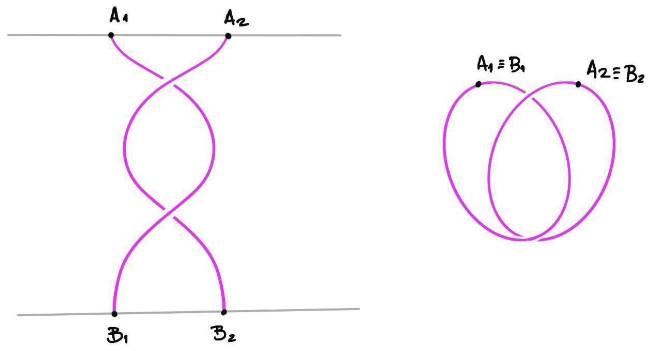

Figura 6: Fechamento de uma trança. Fonte: elaborada pelos autores.

Como bem observam Murasugi e Kurpita (1999, p.132), muito provavelmente esse teorema está na origem do interesse de Emil Artin (1898-1962) pelo estudo das tranças. Observam esses autores que o desejo de Artin, inicialmente, era utilizar as tranças para classificar os nós e os *links*. Voltaremos a esse ponto por ocasião da abordagem do teorema de Markov. Antes disso, faremos algumas considerações acerca de como Alexander pode ter escolhido a teoria dos nós como objeto de sua tese de doutoramento.

Veblen ensinou matemática na Universidade de Princeton de 1905 a 1932. Em 1916 participou como docente no colóquio da American Mathematical Society (AMS); cujas notas de aula seriam publicadas em 1922 num livro que traz pela primeira vez um tratamento sistemático das ideias básicas da *analysis situs* de Poincaré. Entre os assuntos abordados por Veblen nesse colóquio destacam-se: grafos lineares, complexos bidimensionais, variedades e suas conectividades calculadas por cadeias, ciclos e fronteiras, complexos n-dimensionais, variedades orientáveis, o grupo fundamental, números de interseção e o problema dos nós.

Pelo conteúdo dessas notas de aulas de Veblen produzidas durante o doutorado de Alexander e pelo fato de ele ter sido orientador de Alexander, é bem razoável inferir que a influência de Veblen foi importante na escolha da teoria dos nós por Alexander como área de pesquisa em seu doutorado. Vale ressaltar também que Alexander apresenta outras contribuições marcantes à teoria dos nós, tais como o invariante topológico chamado *polinômio de Alexander* de um nó, que a cada nó associa um polinômio de uma variável com coeficientes inteiros.

3.2 Aspectos históricos do artigo de Artin de 1925

Tendo feito essas observações acerca da tese de Alexander – um trabalho teórico no qual as tranças já aparecem como objeto matemático –, notamos que embora elas tenham sido encontradas ou citadas em momentos históricos anteriores a 1925, podemos considerar o artigo "*Theorie der Zöpfe*" (Teoria das tranças) de Artin, escrito em 1925 e publicado em 1926 (Friedman, 2019), como o marco teórico de criação da teoria das tranças, ponto de vista reforçado por Moritz Epple (1997). É relevante observar que posteriormente esse artigo de Artin foi traduzido para o inglês em 1947, com o título "*Theory of braids*" (Artin, 1947a), quando então foi mais difundido para todo o mundo matemático, com o acréscimo de detalhamentos e atualizações feitos pelo próprio autor.

Detenhamo-nos um pouco sobre alguns dados biográficos de Artin. Nascido em Viena, Áustria, ele obteve o doutorado na Universidade de Leipzig, em teoria dos números, sob a orientação de Gustav Herglotz (1881-1953), em 1921. Em 1923 assume o cargo de *Privatdozent* na Universidade de Hamburgo, após breve incursão na Universidade de Göttingen (1921-1922) e uma passagem como professor assistente na Universidade de Hamburgo (1922-1923).

No artigo de 1925-1926, Artin descreve matematicamente uma trança e mostra como é possível introduzir nesse conjunto uma estrutura de grupo – o grupo *braid* (de tranças) B_n de n cordas. Ainda nesse artigo ele mostra também que esse grupo pode ser finitamente apresentado por meio dos geradores σ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e relações dadas explicitamente por:

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, |i-j| \geq 2, \ j = 1, 2, 3, \ldots, n;$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \ 1 \leq i \leq n-2.$$

Nas figuras 6 e 7, apresentamos uma representação geométrica planificada de um gerador do grupo de tranças de Artin.

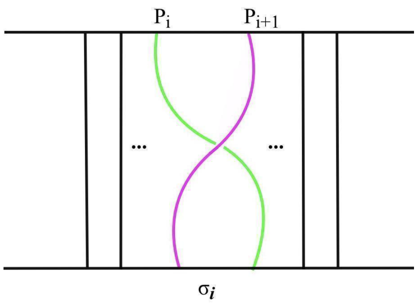

Figura 7: Geradores das tranças de Artin, σ_i. Fonte: elaborada pelos autores.

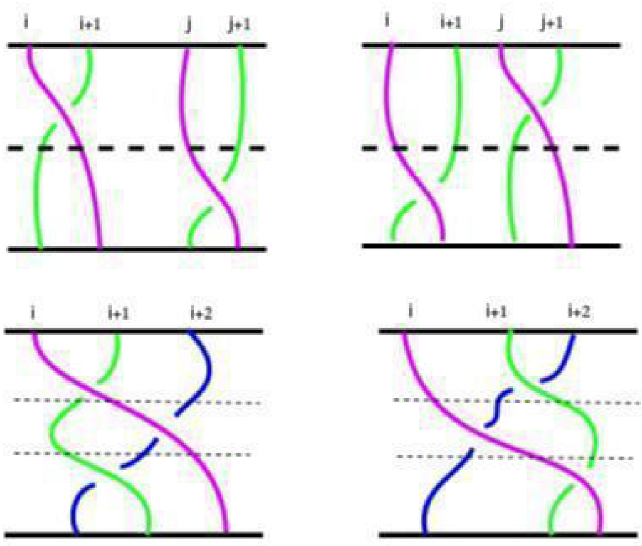

Figura 8: Relações entre os geradores de Artin. Fonte: elaborada pelos autores.

Segundo Epple (1997), os subsídios teóricos acerca da teoria combinatória de grupos utilizados nessa publicação se devem em parte a conversações com o jovem matemático austríaco Otto Schreier (1901-1929), que havia obtido seu doutorado em 1924 em Viena, na área da teoria dos grupos, sob a supervisão de Philipp Furtwängler (1869-1940), um matemático alemão que obteve seu doutorado em Göttingen sob a supervisão de Felix Klein em 1896, tendo exercido a docência na Universidade de Viena de 1912 a 1932 (Zassenhaus, 1964). Epple (1997) observa que, embora Artin figure como único autor, esse artigo escrito em 1925 é fruto do trabalho conjunto de Artin com Otto Schreier.

Epple (1999) destaca que Gauss menciona tranças em escritos ainda não publicados produzidos em 1825. Além disso, Epple também destaca que em trabalhos sobre algumas extensões do conceito de tranças a superfícies topológicas, as tranças podem ser relacionadas a um trabalho de Adolf Hurwitz, de 1891, sobre pontos de ramificação de uma superfície de Riemann (ou de um recobrimento topológico ramificado de superfícies).

3.3 Aspectos históricos sobre o teorema de Markov

Sabia-se que o fecho ou fechamento de uma trança produz um nó ou um *link* e que também os fechos de duas tranças equivalentes produziam nós ou *links* equivalentes. Entretanto, logo se observou que os fechos de tranças não equivalentes podiam produzir nós equivalentes. Essa constatação introduz um complicador no estudo de nós por intermédio das tranças (Marasugi; Kurpita, 1999, p. 142). Essa questão atraiu a atenção do matemático soviético Andrey Markov Junior (1903-1979), da Universidade de Leningrado, para o estudo da equivalência dos fechamentos das tranças. Vale ressaltar que o teorema de Markov ao qual estamos nos referindo na teoria das tranças é de autoria de Markov Jr., cujo pai era um matemático também, mas que atuava na área da lógica matemática.

Em 1935, Markov Jr. apresenta um artigo de duas páginas, sem figuras, no qual estabelece um teorema que dá condições sob as quais os fechamentos de tranças resultam em nós equivalentes. Mais precisamente, ele explicita “movimentos” que relacionam quaisquer duas tranças fechadas representativas de um nó ou de um *link* e que preservam simultaneamente a estrutura da trança fechada. Dessa maneira, fica estabelecido um critério que permite decidir sob que condições os fechamentos de duas tranças seriam equivalentes de um ponto de vista topológico. Entretanto, como observam Murasugi e Kurpita (1999, p. 146), uma prova completa do resultado de Markov Jr. só vai aparecer mais tarde, em 1961, no algoritmo Örst de Haken para comparação de nós (Birman, 1975).

Trocando em miúdos, o teorema de Markov afirma que os fechamentos de duas tranças isotopicamente diferentes podem produzir nós ou *links* equivalentes (equivalência no sentido dos “movimentos” de Reidemeister). Que, também, esses fechamentos com essas propriedades acontecem sempre que pudermos passar de uma trança a outra por determinados tipos de “movimentos” permissíveis e explicitados por Markov Jr. (Murasugi e Kurpita, 1999, p. 142). Dessa maneira, uma classificação de tranças não seria suficiente para a determinação da classificação dos nós ou *links*.

4. Primeiros passos na consolidação da teoria das tranças

Em decorrência da perseguição nazista, Emil Artin emigra para os Estados Unidos em 1937. Ele não era judeu, mas sua esposa era judia e segundo as determinações do governo nazista o cônjuge de uma parceira judia deveria ser afetado pela lei de exclusão tal qual um judeu. Desse modo, uma saída possível seria a emigração para os Estados Unidos da América, possibilidade que é efetivada em 1937. Após passagem nas universidades de Notre Dame, 1937-1938, e de Indiana, de 1938-1946, Artin chega a Princeton em 1946, onde permanece até 1958.

Em 1942 o problema da corda de Dirac havia sido resolvido pelo matemático britânico Max H.A. Newman (1897-1984) usando a teoria das tranças proposta por Artin em 1925 (Newman, 1942). Contudo, de um ponto de vista matemático, essa demonstração não se apresentava completamente satisfatória, haja vista utilizar a equivalência de ambas as caracterizações algébrica e geométrica das tranças em uma esfera bidimensional, fato que ainda não havia sido demonstrado até essa data. Essa equivalência só veio a ser apresentada duas décadas depois por Fadell e Van Burskirk, em 1962. Voltaremos a esse ponto.

A nosso ver, essa aplicação da teoria das tranças é um problema interessante e importante para a física – o problema da corda de Dirac – muito provavelmente uma das causas que levam Artin a novamente se interessar a rever seu artigo publicado em 1926. De fato, a consolidação da teoria das tranças como uma área de pesquisa matemática tem início com a publicação em inglês de dois artigos de Artin na revista *Annals of Mathematics* em 1947, mais de 20 anos depois da publicação do seu artigo originalmente publicado em alemão em 1926. O primeiro é "*Theory of braids*", e o segundo, "*Braids and permutations*". No primeiro, Artin revisa alguns pontos que acha vagos ou imprecisos no artigo de 1926; introduz, por exemplo, conceitos ou reformula algumas ideias que julgava necessárias. No segundo, considera entre outras coisas o problema da determinação de todos os automorfismos do grupo de tranças, deixado em aberto no artigo de 1926.

Ainda em 1947 e nessa mesma revista, registra-se a publicação do artigo do matemático suiço H. Frederic Bohnenblust (1906-2000), professor de matemática no Caltech/EUA, com doutorado na Universidade de Princeton em 1931, intitulado "*The algebraical braid group*" (O grupo de tranças algébricas). Nesse artigo o autor apresenta provas algébricas de alguns resultados intuídos ou não demonstrados por Artin em seu artigo de 1925. No artigo "*Theory of braids*" (1947) o próprio Artin recomenda a leitura desse artigo de Bohnenblust.

Após a publicação dos artigos de 1947, Artin começa sua parceria com Ralph Fox (1913-1973), um professor de Princeton que havia obtido seu doutorado nesta universidade, em 1939, sob a orientação do eminente topólogo Solomon Lefschetz (1884-1972) com a tese *On the Lusternik-Schnirelmann category* (Sobre a categoria Lusternik-Schnirelmann) e que, por volta de 1947, se achava trabalhando na teoria dos nós.

Nos dois anos subsequentes à obtenção do seu doutorado, 1940 e 1941, Fox publica vários artigos na área de topologia diferencial relacionados a propriedades da categoria de Lusternik-Schnirelmann. Ele começa a lecionar em Princeton em 1945. Antes disso, entre os 1939 e 1945, exerce a docência nas universidades de Illinois e Syracuse. A aproximação de Artin e Fox em Princeton encontra-se registrada na parceria da autoria do artigo "*Some wild cells and spheres in three-dimensional space*" (Algumas células e esferas selvagens no espaço tridimensional, 1948).

Nesse trabalho, esses dois autores "por um lado, convidam a uma delineação do domínio da teoria dos nós no âmbito da topologia tridimensional; por outro, sugerem uma possível relação entre os conjuntos complementares de nós ou arcos de nós (talvez selvagens) e a conjectura de Poincaré" (Epple, 1999).

Um divisor de águas no desenvolvimento da teoria das tranças vai se dar em 1962, com um novo marco teórico: a criação do conceito de tranças em superfícies topológicas. A quem se deve a extensão do conceito de tranças às superfícies? Em Ralph Fox e Neuwirth (1962) os autores mostram que o grupo de tranças de Artin pode ser visto como o grupo fundamental do espaço de configuração de k pontos distintos do plano. Esse espaço de configuração é, por definição, o espaço topológico dado por

$$Conf_k(R^2) = \{(x_1, \dots, x_k) \in R^{2k} \mid x_i \neq x_j, quando\ i \neq j\}.$$

Nesse contexto, identificamos a emergência de um novo paradigma na teoria das tranças estabelecido por Fox e Neuwirth. Com efeito, a conexão entre tranças e a topologia de espaços de configuração de pontos no plano complexo introduziu um novo paradigma, vinculando tranças à topologia algébrica.

Em Fadell e Van Burskirk (1962), os autores atribuem a Fox a extensão desse conceito à esfera, apresentam uma demonstração da equivalência dos conceitos algébrico e geométrico das tranças em uma 2-esfera e encontram uma apresentação para o grupo de n-tranças nessa superfície. Eles também agradecem a Fox a indicação para a leitura dos artigos de Magnus e de Newman quando estavam preparando o trabalho sobre os grupos de tranças em R^2 e na 2-esfera S^2.

Em Fox e Neuwirth (1962) encontra-se a definição do grupo de tranças em R^2como o grupo fundamental do espaço de n pontos distintos não ordenados do plano euclidiano. Essa definição de Fox e Neuwirth sugere uma generalização do conceito de um grupo de tranças do R^2 para uma variedade arbitrária como o grupo fundamental do espaço de n pontos distintos não ordenados dessa variedade.

É curioso notar o retardamento da publicação em 1966 do artigo de Van Buskirk, "*Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order*", apresentado em 7 janeiro de 1962 sob o título "*On the braid groups of the projective plane*" (Sobre grupos de tranças no plano projetivo) e recebido pelos editores em 7 de abril de 1965. Os resultados desse artigo são porções da tese de doutorado orientada pelo professor estadunidense Edward R. Fadell (1926-2018), da Universidade de Wisconsin-Madison, e incluem uma apresentação para o grupo de n-tranças no plano projetivo.

Um estudo mais abrangente das relações entre os grupos de tranças e as *mapping class* vai se dar em 1968 pela matemática estadunidense Joan Birman (1927-), que obtém o título de doutorado, nesse mesmo ano, na Universidade de Nova York com a tese *Braid groups and their relationship to mapping class groups* (Grupo de tranças e suas relações com os grupos *mapping class*). Nessa tese, ela analisa propriedades algébricas e geométricas do grupo das tranças em uma variedade. No resumo de sua tese, se lê:

> Em 1962, Fox introduziu uma nova definição de grupo de tranças como o grupo fundamental do espaço de n pontos distintos não ordenados do plano euclidiano. A definição de

> Fox sugere uma generalização do conceito de um grupo de tranças sobre uma variedade arbitrária, como o grupo fundamental do espaço de n pontos não ordenados dessa variedade. A presente investigação começa com a definição de Fox, e estuda as propriedades algébricas e geométricas desses grupos de tranças sobre uma variedade arbitrária. Na Parte I, um novo significado é dado aos grupos de tranças de Fox, pelo estabelecimento de uma relação deles com os grupos de *mapping class*. A Parte II contém uma investigação dos grupos de tranças. Na Parte III, a conexão entre grupos de tranças e os grupos de *mapping class* é estudada (Birman, 1968).

Dois anos depois, o topólogo britânico Godfrey Peter Scott (1944-1923) publica em 1970 uma primeira versão das apresentações dos grupos de tranças em 2-superfícies topológicas, exceto na 2-esfera S^2 e no plano projetivo P^2. Esse trabalho será revisado e corrigido em alguns pontos por Kulikov e Shimada (1996).

Um outro fato importante para a consolidação da teoria das tranças vai acontecer em 1984 de uma maneira não intencional por Jones Vaughan (1952-2020), um matemático neozelandês, professor associado da Universidade da Califórnia em Berkeley. Seu tema de pesquisa por esse tempo era o teorema do índice para álgebras de Von Neumann, uma álgebra de operadores desenvolvida por Von Neumann visando ao estabelecimento de uma fundamentação teórica para a mecânica quântica.

A ligação entre as álgebras de Von Neumann e a teoria das tranças ocorreu de maneira involuntária. Ao estudar a função traço no contexto das álgebras de Von Neumann, Vaughan (1987) obteve um conjunto de operadores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (projeções) que satisfazem, além de outras, as propriedades seguintes:

$$e_i^2 = e_i,\ e_i^* = e_i;$$

$$e_i e_{i\pm1} e_i = \frac{t}{(1+t)^2} e_i;$$

$$e_i e_j = e_j e_i, |i-j| \geq 2,$$

onde t é um número complexo e o símbolo * denota a operação de tomar o operador adjunto complexo.

A semelhança dessas propriedades operatórias com as propriedades operatórias das tranças dadas por Artin:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| \geq 2,\ j = 1, 2, 3, \ldots, n;$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-2,$$

que caracterizam completamente o grupo das n-tranças B_n, formando uma apresentação desse grupo – foi apontada por Didier Hatt-Arnold and Pierre de la Harpe, pessoas presentes na plateia de uma conferência de Jones Vaughan (Jones, 1987; Exel, 1996).

A correspondência entre as tranças e os operadores de Von Neumann foi estabelecida *a posteriori* por Vaughan mostrando que a transformação:

$$\sigma_i \to g_i = \sqrt{t}[(t+1)e_i - 1],$$

fornece representações r_t de B_n levando σ_i em g_i

Nesse mesmo artigo de 1987, Jones observa que dada uma trança b em B_n, o número

$$\left(-\frac{(t+1)}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} tr(r_t(b)),$$

depende apenas da classe de isotopia da trança fechada $\hat{b}$, onde $\hat{b}$ denota o fechamento da trança *b*.

Desse modo, dado um *link* L (não selvagem) ele define a função

$$V_L(t) = \left(-\frac{(t+1)}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} tr(r_t(b)),$$

para qualquer b em B_n tal que $\hat{b} = L$ e enuncia o seguinte teorema: se L é um *link* com um número ímpar de componente, então $V_L(t)$ é um polinômio de Laurent com coeficientes inteiros e se o número de componentes é par, então $V_L(t)$ é $\sqrt{t}$ vezes um polinômio de Laurent.

Além disso, mostra também que se L denota a imagem especular de L, então

$V_L(t) = V_L\left(\frac{1}{t}\right)$. O polinômio de Jones $V_L(t)$ pode, assim, ser utilizado para diferenciar nós de suas imagens especulares.

Com base em seus estudos, Jones Vaughan (1987) revela então uma conexão entre os grupos das tranças e polinômios de *links* por meio da álgebra de Hecke das representações desses grupos.

A descoberta do polinômio de Jones por Vaughan Jones, usando representações do grupo de tranças, revolucionou a teoria de nós e destacou o papel das tranças em invariantes de nós.

5. Dois paradigmas recentes

Finalizando este artigo, mencionamos dois paradigmas de destaque emergentes nas últimas décadas: um deles na interface entre a teoria das tranças e a física teórica, e outro no interior da própria teoria das tranças.

Em Drinfel'd (1986), encontra-se um paradigma que podemos denominar de *categorificação e grupos quânticos* no qual a teoria das tranças foi integrada à teoria de categorias com o conceito de *categorias monoidais trançadas*, impulsionada por trabalhos em grupos quânticos. Isso conectou tranças à física teórica (por exemplo, à teoria quântica de campos).

Em Dehornoy (1994), se identifica um outro paradigma que se pode denominar de *dinâmica e ordenação de tranças* no qual a descoberta de uma *ordem total invariante à esquerda* para grupos de tranças por Patrick Dehornoy introduziu ferramentas dinâmicas e combinatórias, abrindo novas perspectivas em teoria geométrica de grupos.

Considerações finais

A classificação dos nós tornou-se um problema cientificamente relevante após o levantamento da hipótese científica de *lord* Kelvin na segunda metade do século XX, de que os átomos da matéria seriam nós de vórtices de éter. Entretanto, com a queda da hipótese da existência do éter em decorrência dos experimentos de Michelson-Morley em 1887, a teoria dos nós foi descartada como fundamentação teórica plausível para constituição atômica da matéria. Contudo, as propriedades topológicas dos nós já haviam atraído a atenção de topólogos eminentes como Tietze, em Viena, e Dehn, em Göttingen, na primeira década do século XX. É nesse contexto de interesse pela teoria dos nós que Alexander em 1915, em seu doutoramento, mostrou que nós ou *links* orientados podem ser escritos como tranças fechadas.

Na década seguinte, o contexto institucional – entre Göttingen e Viena – e os matemáticos com os quais interagia levaram Emil Artin a ter seu interesse naturalmente despertado pela teoria dos nós. O teorema de Alexander abria a possibilidade de classificar os nós por meio das tranças. Essa possibilidade atraiu o interesse de Artin. Coube a ele, em Viena, a notável ideia de que é possível introduzir uma operação de composição de tranças de modo a transformar esse conjunto em um grupo não comutativo. Mais que isso, destaca que esse grupo assim definido possui a estrutura de um grupo finitamente gerado, exibindo em seu artigo de 1925 um conjunto de geradores e relações para esse grupo. Estava criada a teoria das tranças. Contudo, como vimos, apenas em 1935 o aprofundamento do estudo das tranças por Markov revelará que a classificação das tranças não seria suficiente para a classificação dos nós ou dos *links*.

Nos 20 anos que se seguiram à publicação do seu artigo fundante da teoria das tranças em 1925, Artin não volta a publicar nada sobre essa teoria. Ele volta a se interessar por esse tema na década de 1940. De fato, em 1947 verifica-se a publicação de três artigos sobre a teoria das tranças em um dos principais periódicos de matemática do mundo, o *Annals of Mathematics*. A nosso ver, esses artigos já atestam um reconhecimento da relevância da teoria das tranças como prenúncio de um novo campo de pesquisa em matemática.

A que se deve o súbito destaque da teoria das tranças decorridos cerca de 20 anos da publicação do texto fundante da teoria em 1925? A nosso ver, se deve principalmente à resolução por Newman do problema das cordas de Dirac em 1942, por meio da utilização de tranças em esferas. Esse artigo de Newman, contudo, deixa em aberto ainda a fundamentação e a formalização de argumentos utilizados na solução do problema de Dirac. Essa fundamentação e formalização só vai acontecer em 1962 com os artigos de Fox e Neuwirth (1962), de Fadell e Neuwirth (1962), Fadell (1962), Fadell e Burskirk (1962) ao abordarem de um ponto de vista matemático as tranças no plano, na esfera e no plano projetivo em uma nova perspectiva. Nos anos subsequentes, são publicados vários trabalhos sobre tranças em superfícies topológicas.

Na década de 1980, os trabalhos de Jones Vaughan e de Edward Witten, ambos ganhadores da medalha Fields, vão revelar as conexões das teorias dos nós e das tranças com a mecânica estatística e a teoria quântica dos campos. Além disso, como pode ser visto em Birman e Brendle (2005) e Margalit e Winarski (2021), têm sido reveladas conexões da teoria das tranças com a teoria dos operadores, a geometria algébrica, grupos de homotopía de esferas, robótica, criptografia, a teoria dos grupos de classes de aplicações, espaços de Teichmüller. Também, como pode ser visto em Kassel e Turaev (2008), tem-se mostrado como a teoria das tranças se encontra relacionada a uma nova teoria denominada topologia quântica relacionada à computação. Além disso, em Guaschi e Juan-Pineda (2013) os autores, no contexto da K-teoria algébrica, expõem interessantes propriedades dos grupos de tranças de superfícies – como torção, ordenabilidade, linearidade – e suas relações com grupos de homotopia de 2-esferas e com grupos de classes de aplicações (*mapping class groups*).

Essas conexões e aplicações da teoria das tranças, revelando o envolvimento de uma comunidade duradoura de pesquisadores em instituições científicas em diversos países do mundo com produções coerentes e relevantes já são suficientes, a nosso ver, para atestar a caracterização dessa teoria como uma área de pesquisa no campo da matemática contemporânea.

Referências bibliográficas

ADAMS, C.C. *The knot book*: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004.

ALEXANDER, J.W. A lemma on a system of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 9, n. 3, p. 93-95, 1923.

ARTIN, E. Theorie der Zöpfe. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, v. 4, p. 47-72, 1925.

ARTIN, E. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, second series, v. 48, n. 1, p. 101-126, 1947a.

ARTIN, E. Braids and permutations. *Annals of Mathematics*, second series, v. 48, n. 2, p. 643-649, 1947b.

ATIYAH, M. *The geometry and physics of knots*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

BAEZ, J.; MUNIAIN, J.P. *Gauge fields, knots, and gravity*. Singapore: World Scientific, 1994.

BIRMAN, J.S. *Braid groups and their relationship to mapping class groups*. PhD Thesis. New York University, New York, 1968.

BIRMAN, J.S. *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1975. (Annals of Mathematics Studies, 82)

BIRMAN, J.S.; BRENDLE, T.E. *Braids*: a survey. 2005. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/math/0409205.pdf. Acesso em: 12 jun. 2025.

BOHNENBLUST, H.F. The algebraical braid group. *Annals of Mathematics*, second series, v. 48, n. 2, p. 127-136, 1947.

BUNGE, M. *Epistemologia*: um curso de atualização. São Paulo: EdUSP, 1980.

BYRD, A.; THARPS, L. *Hair story*: untangling the roots of black hair in America. New York: St. Martin's Press, 2014.

CHANDLER, B.; MAGNUS, W. *The history of combinatorial group theory*: a case study in the history of ideas. New York: Springer, 1982. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)

CUTLAND, N. *Computability*: an introduction to recursive function theory**.** Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

DEHN, M. Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Mathematische Annalen*, v. 69, n. 1, p. 137-168, 1910.

DEHN, M. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen**.** *Mathematische Annalen*, v. 71, n. 1, p. 116-144, 1911.

DEHORNOY, P. Braid groups and left distributive operations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 345, n. 1, p. 115-150, 1994.

DEHORNOY, P.; DYNNIKOV, I.; ROLFSEN, D.; WIEST, B. *Why are braids orderable?* [s.l]: Springer, 2000.

DRINFELD, W.G. Quantum groups. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, v. 155, p. 18-49, 1986.

DYCK, W. Beiträge zur *Analysis situs*, I. *Mathematische Annalen*, v. 37, n. 2, p. 457-512, 1888.

EPPLE, M. Branch points of algebraic functions and the beginnings of modern knot theory**.** *Historia Mathematica*, v. 22, n. 4, p. 371-401, 1995.

EPPLE, M. Styles of argumentation in late 19th-century geometry and the structure of mathematical modernity. In: PANZA, M.; OTTE, M. (eds.). *Analysis and synthesis in mathematics*: history and philosophy. Dordrecht: Kluwer, 1997. p. 177-198.

EPPLE, M. *Die Entstehung der Knotentheorie*: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie. Braunschweig/Wiesbaden: Springer-Vieweg, 1999.

EULER, L., Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, n. 8, p. 128-140, 1736.

EXEL, R. Von Neumann e a teoria da álgebra de operadores. *Estudos Avançados*, v. 10, n. 26, p. 211-225, 1996. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/3PtV9Qg59LfYSY6jVjK6QgP/?lang=pt. Acesso em: 14 nov. 2022.

FADELL, E. Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac. *Duke Mathematical Journal*, v. 29, n. 2, p. 231-242, 1962.

FADELL, E.; BURSKIRK, J. van. The braid groups of R^2 and S^2. *Duke Mathematical Journal*, v. 29, n. 2, p. 243-257, 1962.

FADELL, E.; NEUWIRTH, L. Configuration spaces. *Mathematica Scandinavica*, v. 10, p. 111-118, 1962.

FEBVRE, L. *Combates pela história*. 3. ed. Lisboa: Presença, 1989.

FLETCHER, A.J. *Ancient Egyptian hair*: a study in style, form and function. PhD Thesis, University of Manchester, Manchester, 1995.

FOUCAULT, M. *Arqueologia do saber.* Trad. Luiz Felipe Baeta Neves. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

FOX, R.; NEUWIRTH, L. The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, v. 10, p. 119-126, 1962.

FRIEDMAN, M. Mathematical formalization and diagrammatic reasoning: the case study of the braid, 1925 and 1950. *British Journal for the History of Mathematics*, v. 34, n. 1, p. 43-59, 2019.

GONZALEZ-MENESES, J. Ordering pure braid groups on compact, connected surfaces**.** *Pacific Journal of Mathematics*, v. 203, n. 2, p. 369-378, 2002.

GUASCHI, J.; JUAN-PINEDA, D. *A survey of surface braid groups and the lower algebraic K-theory of their group rings*. 2013. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1302.6536.pdf. Acesso em: 5 dez. 2023.

HURWITZ, A. Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Mathematische Annalen*, v. 39, p. 1-61, 1891.

JONES, V. Index for subfactors. *Inventiones Mathematicae*, v. 72, p. 1-25, 1983.

JONES, V. A polynomial invariant of knots and links. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 12, p. 103-111, 1985.

JONES, V. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Mathematics*, v. 126, p. 335-388, 1987.

JONES, V. *Subfactors and knots*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 80)

JORDAN, C. Sur la déformation des surfaces. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 2e série, v. 11, p. 105-109, 1866.

KASSEL, C.; TURAEV, V. *Braid groups*. New York: Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, 247).

KAUFFMAN, L.H. *Knots and physics*. Singapore: World Scientific, 2001.

KLINE, M. *Mathematical thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.

KUHN, T.S. *A estrutura das revoluções científicas*. 13. ed. São Paulo: Perspectiva, 2017. (Debates, 115)

KULIKOV, V.S.; SHIMADA, I. On the fundamental groups of complements to dual hypersurfaces of projective curves. *Preprint of the Max-Planck-Institut für Mathematik*, n. 32, 1996.

MAGNUS, W. Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen. *Mathematische Annalen*, v. 109, n. 1, p. 617-646, 1934.

MARGALIT, D.; WINARSKI, R.R. Braid groups and mapping class groups: the Birman-Hilden theory. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 53, n. 2, p. 643-659, 2021.

MENDEL, G. Versuche über Pflanzenhybriden. *Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn*, v. IV für das Jahr 1865, Abhandlungen, p. 3-47, 1866.

MÖBIUS, A.F. Zur Theorie der Polyëder und der Elementarverwandtschaft. In: MÖBIUS, A.F. *Oeuvres complètes*. [s.l.: s.n.], 1861. t. 2, p. 519-559.

MURASUGI, K.; KURPITA, B. *A study of braids*. Dordrecht: Springer Science, 1999. (Mathematics and its Applications, 484)

NEWMAN, M.H.A. On a string problem of Dirac. *Journal of the London Mathematical Society*, v. s1-17, n. 3, p. 173-177, 1942.

PRZYTYCKI, J.H. Classical roots of knot theory. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 9, n. 4-5, p. 531-545, 1998.

RADÓ, T. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, v. 2, n. 10, p. 101-121, 1925.

REIS, J.C. *O desafio historiográfico*. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2010.

ROQUE, T. Desmascarando a equação: a história no ensino de que matemática? *Revista Brasileira de História da Ciência*, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 167-185, 2014.

SCOTT, G.P. Braids groups and the group of homeomorphisms of a surface. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 68, p. 605-617, 1970.

SHERROW, V. *Encyclopedia of hair*: a cultural history. Westport, CT: Greenwood. 2006.

SOSSINSKY, A. *Knots*: mathematics with a twist. Cambridge: Harvard University Press, 2002.

STÄCKEL, P. Gauss als Geometer. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, v. 1917, p. 25-142, 1917.

STÄCKEL, P. "Gauss als Geometer", in the 10th volume of Gauss' collected works. In: DUNNINGTON, G.W. *Carl Friedrich Gauss*: titan of science. New York: Hafner, 1955.

SUMNERS, D. W.; WHITTINGTON, S.G. Knots in DNA and statistical mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 21, n. 7, p. 1689-1694, 1988.

TAIT, P.G. On knots I. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, v. 28, p. 145-190. 1877.

TIETZE, H. Über die topologischen invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Monatsheft für Mathematik und Physik*, v. 19, p. 1-118, 1908.

VANDERMONDE, A.T. Remarques sur les problèmes de situation. *Mémoires de 1'Academie Royale des Sciences*, Paris, p. 566-574, 1771.

VINCIGUERRA, L. *Langage, visibilité, différence*: éléments pour une histoire du discours mathématique de l'Âge Classique au XIXème siècle. Paris: Vrin, 1999.

WITTEN, E. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, n. 121, p. 351-399, 1989.

ZASSENHAUS, H. Emil Artin, his life and his work. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 5, n. 1, p. 1-9, 1964.

Recebido em 17/06/24

Aceito em 24/02/25