ARTIGO

DOI: https://doi.org/10.53727/rbhc.v19i1.1162

A Relatividade de Poincaré: uma análise do ensaio "Sur La Dynamique De L'électron" (1905-1906) - Parte I

Poincaré's relativity: an analysis of the essay «Sur la dynamique de l'électron» (1905-1906) – Part I

Clair de Luma Capiberibe Nunes | Pesquisadora Independente
clair.capiberibe@ufms.br
https://orcid.org/0000-0002-6536-3131

Wellington Pereira de Queirós | Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
wellington.queiros@ufms.br
https://orcid.org/0000-0002-9734-7136

Resumo Em 5 de junho de 1905, Henri Poincaré publicou uma breve nota nos *Comptes Rendus*, intitulada *Sur la Dynamique de l'Électron* (*Sobre a Dinâmica do Elétron*), na qual sintetizava seus estudos sobre o princípio da relatividade no contexto da eletrodinâmica dos corpos em movimento. Uma versão mais extensa desse trabalho, com o mesmo título, foi submetida em julho do mesmo ano ao *Circolo di Palermo*, mas publicada em janeiro de 1906. Nesses artigos, Poincaré desenvolveu resultados centrais para a formulação relativística da eletrodinâmica, como a adição relativística de velocidades, a formulação do grupo de Lorentz, a interpretação física das transformações de Lorentz, a introdução de uma estrutura espaço-temporal quadrimensional e elementos matemáticos associados à álgebra de Lie do grupo de Lorentz. Além disso, sugeriu que o elétron estaria sujeito a pressões negativas de natureza não elétrica, hoje conhecidas como tensões de Poincaré, e propôs um programa relativístico para a gravitação, prevendo inclusive a existência de perturbações gravitacionais que se propagariam à velocidade da luz. Na primeira parte desta análise, examinamos as três primeiras seções do artigo de Palermo, esclarecendo o contexto histórico, os conceitos físicos e os fundamentos matemáticos ali apresentados. O objetivo é oferecer ao leitor elementos suficientes para compreender as principais ideias de Poincaré e avaliar sua relevância no interior dos debates que conduziram à formulação da relatividade especial e de problemas posteriores da física contemporânea.

Palavras-chave Teoria da Relatividade Especial, Invariância de Lorentz, Dinâmica do Elétron, História das Ciências, Construção do Conhecimento.

Abstract *On June 5, 1905, Henri Poincaré published a brief note in the* Comptes Rendus, *entitled* Sur la Dynamique de l'Électron (On the Dynamics of the Electron), *in which he summarized his studies on the principle of relativity in the context of the electrodynamics of moving bodies. A more extensive*

version of this work, bearing the same title, was submitted in July of the same year to the Circolo di Palermo, but published only in January 1906. In these papers, Poincaré developed central results for the relativistic formulation of electrodynamics, such as the relativistic addition of velocities, the formulation of the Lorentz group, the physical interpretation of the Lorentz transformations, the introduction of a four-dimensional space-time structure, and mathematical elements associated with the Lie algebra of the Lorentz group. Moreover, he suggested that the electron would be subject to negative pressures of a non-electrical nature, now known as Poincaré stresses, and proposed a relativistic program for gravitation, even predicting the existence of gravitational perturbations propagating at the speed of light. In the first part of this analysis, we examine the first three sections of the Palermo paper, clarifying the historical context, the physical concepts, and the mathematical foundations presented therein. The aim is to provide the reader with sufficient elements to understand Poincaré's main ideas and to assess their relevance within the debates that led to the formulation of special relativity and to later problems in contemporary physics.

Keywords *Special Theory of Relativity, Lorentz Invariance, Electron Dynamics, History of Science, Construction of Knowledge.*

1. Introdução

Em 1905, Henri Poincaré escreveu *Sur la dynamique de l'électron*, texto no qual discutiu problemas relacionados à eletrodinâmica dos corpos em movimento, à dinâmica do elétron e à formulação do princípio da relatividade (Martins, 2015). Esse trabalho foi elaborado entre o final de 1904 e maio de 1905. Poincaré produziu duas versões do artigo: uma versão resumida, publicada em 5 de junho de 1905 nos *Comptes Rendus*, e uma versão completa, submetida ao *Circolo di Palermo* em julho de 1905, mas publicada apenas no início de 1906.

Para compreendermos o trabalho de Poincaré, é necessário considerar o contexto histórico e conceitual no qual sua obra foi desenvolvida. Ao longo do século XIX, diversas experiências buscaram investigar a relação entre os fenômenos ópticos, o movimento da Terra e o éter. Algumas delas, como o experimento de Fizeau de 1851, foram interpretadas no período como confirmações da teoria de Fresnel e de seu modelo de arrastamento parcial do éter (Martins, 2012a). Outras, com destaque para a experiência de Michelson e Morley de 1887, não evidenciaram o movimento da Terra em relação ao éter no sentido previsto. Poincaré (1895) interpretou esse conjunto de dificuldades como uma indicação do princípio da relatividade, segundo o qual apenas o movimento relativo entre corpos materiais poderia ser considerado fisicamente observável. Em Poincaré, o éter não aparece apenas como uma entidade cuja existência deveria ser aceita ou rejeitada, mas como um recurso conceitual e heurístico útil à formulação da óptica e da eletrodinâmica; sua existência última, porém, permanecia como uma questão de ordem metafísica (Poincaré, 1902; *cf.* Martins, 2012b, 2015).

O princípio da relatividade também estava associado às disputas em torno dos modelos do elétron. No início do século XX, diferentes teorias procuravam explicar sua constituição e seu comportamento dinâmico: o elétron esférico e rígido de Abraham, o elétron deformável de Lorentz e o modelo de volume constante associado a Langevin e Bucherer. As medidas experimentais pareciam favorecer o modelo de Abraham, mas Planck mostrou que os dados disponíveis não eram conclusivos (Martins, 2015). Nesse contexto, Poincaré argumentou que, entre os modelos então discutidos, o modelo de Lorentz era aquele que satisfazia plenamente

as exigências do princípio da relatividade. Além disso, calculou as pressões de natureza não eletromagnética necessárias para manter a estabilidade do elétron deformável, posteriormente conhecidas como tensões de Poincaré.

É nesse quadro, marcado pela articulação entre experimentos ópticos, eletrodinâmica dos corpos em movimento, modelos do elétron, princípio da relatividade e estatuto conceitual do éter, que se insere a presente análise[1]. Examinaremos ambas as versões de *Sur la dynamique de l'électron*. Inicialmente, contextualizaremos historicamente o trabalho, com base nas correspondências de Poincaré com Lorentz datadas de 1905, já examinadas em perspectiva didática por Nunes e Queirós (2025b). Em seguida, concentraremos nossa atenção nas três primeiras seções do artigo de 1906 de Poincaré, realizando uma análise detalhada de cada uma delas. Preservaremos o formalismo e as notações originais utilizadas pelo autor, mas forneceremos, sempre que necessário, as equivalências contemporâneas dessas equações.

É importante ressaltar que a presente análise se fundamenta principalmente no trabalho pioneiro de Schwartz (1965, 1971, 1972a, 1972b), Miller (1973) e Logunov (2004, s.d.). No entanto, em determinados aspectos, apresentamos divergências em relação às conclusões desses autores, confrontando-as com investigações mais recentes sobre a história da teoria da relatividade especial e as contribuições de Poincaré. O principal objetivo deste estudo é complementar as contribuições de Nunes e Queirós (2023, 2025a), oferecendo a estudantes, professores, divulgadores científicos e demais interessados na história da relatividade especial uma análise das três primeiras seções de *Sur la dynamique de l'électron*. Busca-se examinar o modo como Poincaré articulou problemas matemáticos, eletrodinâmicos e epistemológicos no interior dos debates sobre o princípio da relatividade, a dinâmica do elétron e as transformações de Lorentz. Acreditamos que este trabalho pode contribuir para preencher essa lacuna na literatura em língua portuguesa, oferecendo uma análise detalhada e crítica de um episódio no qual questões técnicas, conceituais e epistemológicas se entrecruzam na história da eletrodinâmica e da relatividade.

2. Construindo a dinâmica do elétron

Em 1905, Henri Poincaré enfrentava os efeitos de uma enfermidade, provavelmente a mesma que o levaria ao óbito em 1912 (*cf*. Martins, 2015). Apesar da saúde fragilizada, dedicava-se intensamente ao estudo do mais recente trabalho de Lorentz, com a expectativa de discutir alguns detalhes pessoalmente com ele durante um evento na Société de Physique, em Paris. Em uma carta datada de 27 de abril de 1905, Poincaré escreveu a Lorentz:

> Eu esperava até o último momento para fazer a viagem de Paris para atender sua recepção na Société de Physique, na Foyot's. Infelizmente, houve um imprevisto. Eu me arrependo

1 Uma versão preliminar da pesquisa que deu origem a este artigo foi desenvolvida na dissertação de mestrado "Um estudo histórico-social das contribuições de Henri Poincaré à teoria da relatividade: subsídios para o ensino de física", defendida em 2020, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPEC/UFMS). O presente artigo retoma, reformula e desenvolve parte daquela investigação, apresentando recorte, argumentação e conclusão próprios.

> muito, mas espero vê-lo amanhã na Academia. Agradeço os folhetos que me enviou ultimamente e que são de grande interesse. (POINCARÉ, 1905a)[2]

Infelizmente, Poincaré não pôde comparecer ao encontro na Academia e discutir pessoalmente com Lorentz. Em vez disso, enviou três cartas abordando o *memoir* de Lorentz. Analisaremos cada uma delas. Embora nenhuma das cartas esteja datada, é provável que tenham sido escritas ao longo de maio[3] daquele ano. Poincaré inicia sua primeira carta com a seguinte escusa:

> Lamento muito as circunstâncias que me impediram de ouvir sua conferência e depois conversar com você durante a sua estadia em Paris. Há algum tempo, estudei em maior detalhe seu trabalho *"Fenômenos eletromagnéticos em um sistema movendo-se com qualquer velocidade menor que a da Luz"*, cuja importância é extrema e eu já tinha mencionado os principais resultados em minha palestra em St. Louis. Eu concordo com você em todos os pontos essenciais; no entanto, existem alguns pequenos detalhes divergentes. (POINCARÉ, 1905b, ITÁLICO NOSSO)

A divergência identificada por Poincaré refere-se à transformação da densidade de carga, que, juntamente com a correção da densidade de corrente, compõe a primeira seção de seu artigo. Lorentz (1904, p. 813) havia formulado a seguinte transformação:

$$\frac{1}{kl^3}\rho = \rho'; \quad k^2 u_x = u'_x; \quad k^2 u_y = u'_y \quad 4$$

onde o fator *k* corresponde ao fator de Lorentz:

$$k = \left(1 - w^2/c^2\right)^{-1/2} \quad 5$$

No entanto, Poincaré percebeu que essa transformação não assegurava a conservação de carga, uma condição que só seria satisfeita se a transformação da densidade de carga fosse expressa da seguinte forma (POINCARÉ, 1905b):

$$\frac{1}{kl^3}\rho\left(1 + \varepsilon v_x\right) = \rho,$$

$$\frac{1}{kl^3}\rho\left(v_x + \varepsilon\right) = \rho' u'_x \quad 6$$

2 Todas as traduções são autoriais.

3 Conforme mencionado anteriormente, Poincaré havia planejado recepcionar Lorentz em 27 de abril, mas não pôde comparecer, aguardando a oportunidade de encontrá-lo no dia seguinte, 28 de abril. Contudo, Poincaré também não pôde comparecer nessa data. Como será analisado, ele não teve a oportunidade de acompanhar Lorentz durante sua estadia em Paris. Considerando que Lorentz não partiu de Paris antes de 29 de abril e que Poincaré submeteu seu primeiro trabalho em 5 de junho de 1905, é razoável concluir que as cartas foram redigidas ao longo do mês de maio.

4 Em notação moderna: $\frac{1}{\gamma l^3}\rho = \rho'$; $\gamma^2 u_x = u'_x$; $\gamma u_y = u'_y$; $\gamma u_z = u'_z$

5 Atualmente usamos a letra *v*, mas, para sermos coerentes com a notação empregada por Poincaré, usaremos a letra *w*.

6 Em notação moderna: $\frac{1}{\gamma l^3}\rho\left(1 - \beta u_x\right) = \rho'$ $\frac{1}{\gamma l^3}\rho\left(u_x - \beta\right) = \rho' u'_x$

onde $=-(w/c)$ ou em unidades próprias (com c = 1), $\varepsilon = -w$.

Além disso, uma outra equação que necessitava ser modificada para garantir o princípio da conservação de carga é a equação (10) do *memoir* de Lorentz (1904, p. 813):

$$l^2 \frac{w}{c^2}\left(u'_y d'_y + u'_z d'_z\right), \quad -\frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}u'_x d'_y, \quad -\frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}u'_x d'_z$$

onde *d'* são as componentes do campo elétrico no referencial S'.

Poincaré demonstrou que essa equação deveria ser substituída por:

$$l^2 \frac{w}{c^2}\left(u'_x d'_x + u'_y d'_y + u'_z d'_z\right), \quad 0, \quad 0$$

De acordo com Poincaré (1905b), essa expressão representa a força de Liénard, que também foi derivada por Lorentz, embora com algumas diferenças. A partir desse resultado, Poincaré levanta a seguinte questão ativa: esta força é compensada? Após uma breve análise utilizando o princípio das forças virtuais de d'Alambert, Poincaré chega a uma nova consideração passiva: se as forças forem exclusivamente de origem elétrica, não haverá compensação, mas se forem de origem não eletromagnética, a compensação ocorrerá.

É importante observar que, embora já se soubesse que a estabilidade do elétron contraído exigiria forças de origem não elétrica, como Poincaré havia modificado as transformações de Lorentz, foi necessário reanalisar se a compensação ocorreria. O resultado foi negativo, o que implicou na necessidade de introduzir forças não elétricas sobre o elétron contraído. Essa hipótese formaria a base para o desenvolvimento das tensões de Poincaré. Ao final de sua carta, Poincaré faz uma observação crucial sobre o fator *l* que Lorentz introduziu em suas transformações:

> Mas há outra coisa. Você assumiu l = 1. Langevin[7] assumiu kl^3 = 1. Eu tentei kl = 1 [equivalente ao modelo de Abraham] para preservar a unidade de tempo, mas isso me levou a consequências inaceitáveis. Por outro lado, chego a contradições (entre as fórmulas de ação e energia) com todas as hipóteses além das de Langevin. O raciocínio pelo qual você estabelece que l = 1 não parece ser conclusivo, ou melhor, não é conclusivo e torna-se indeterminado quando olho para o cálculo que modificaram, como eu lhe disse, as equações na página 813. O que você acha disso? Quer que eu lhe dê mais detalhes ou os que eu lhe dei são suficientes para você? (POINCARÉ, 1905b)

Alguns dias depois, Poincaré enviou uma nova carta, mostrando novos desenvolvimentos a respeito do trabalho de Lorentz: "meu estimado colega, obrigado por sua carta amável[8]. Desde que te escrevi, minhas ideias mudaram em alguns pontos. Como você eu achei *l*, mas por outro

7 *La physique des électrons* (Langevin, 1905).

8 Infelizmente essa carta não parece ter sido preservada.

caminho." (POINCARÉ, 1905c). Tanto Lorentz quanto Poincaré chegaram à mesma conclusão preliminar, embora por abordagens distintas: Poincaré utilizou a teoria de grupos, provando que as transformações de Lorentz formam um grupo infinitesimal se, e somente se, $l = 1$. Esse é um argumento matemático, mas, como veremos, com consequências físicas bastante significativas.

Ao final da carta, Poincaré apresenta uma conclusão preliminar, que reflete as dificuldades da teoria de Lorentz em relação aos princípios de conservação:

> Por outro lado, não encontro concordância entre o cálculo das massas por meio do momento linear eletromagnético e, por meio do princípio de mínima ação, e por meio da energia na hipótese de Langevin. Espero esclarecer brevemente essa contradição e vou mantê-lo informado dos meus esforços. (POINCARÉ, 1905c)

Entre as contradições que Poincaré ainda precisava esclarecer estava o valor da massa do elétron deformável de Lorentz (MILLER, 1973, 1986; DARRIGOL, 1995, 1996, 2003). Parece claro que, nesta ocasião, Poincaré ainda não havia formulado as tensões de Poincaré. Como ele viria a provar dias depois, os modelos de Abraham e Bucherer-Langevin são compatíveis apenas com forças elétricas, enquanto o modelo de Lorentz exige a presença de forças não elétricas. Essas considerações aparecem na última carta (conforme a documentação disponível) que Poincaré enviou a Lorentz antes da publicação de seu artigo. A carta, por ser breve, será reproduzida integralmente:

> Continuei a pesquisa que havia dito a você. Os meus resultados confirmam plenamente o seu, no sentido de que a compensação perfeita (que impede a determinação experimental do movimento absoluto) só pode ser feita completamente na hipótese $l = 1$. Só que para que esta hipótese seja admissível, devemos admitir que cada elétron é submetido a forças complementares cujo trabalho é proporcional às variações de seu volume. Ou se você preferir, cada elétron se comporta como se fosse uma capacidade oca sujeita a uma pressão interna constante (também negativa) e independente do volume. Nestas circunstâncias, a compensação está completa. Estou feliz em encontrar-me em perfeita harmonia com você, e assim ter chegado à perfeita inteligência de seus bons trabalhos. (Poincaré, 1905d).

Esta carta indica que Poincaré já havia formulado a hipótese das tensões que posteriormente levariam seu nome e que interpretava a teoria de Lorentz como a formulação plenamente compatível com o princípio da relatividade. Em outras palavras, segundo Poincaré, teorias distintas da hipótese do elétron contraído de Lorentz permitiriam detectar o movimento da Terra em relação ao éter, o que, por sua vez, entraria em contradição com um conjunto de experiências, como as de Trouton-Noble, Rayleigh e Michelson-Morley (SWENSON JR., 1972). O final da carta sugere que Poincaré estava entusiasmado com seus resultados, sendo plausível que ele tenha redigido essa carta logo após ter deduzido tais conclusões.

Um dos aspectos mais interessantes do artigo de Poincaré são suas hipóteses e conclusões preliminares sobre a gravitação. Como veremos, após estudar a dinâmica do elétron, Poincaré aplicou seu princípio da relatividade à gravitação. Essa ideia remonta ao seu artigo de 1900, no qual ele discutiu o problema da ação e reação na teoria de Lorentz. Nas teorias vigentes, a interação gravitacional era considerada instantânea, o que tornaria possível a sincronização

absoluta de relógios em movimento por meio de efeitos gravitacionais. Infelizmente, não sabemos se Poincaré comunicou a Lorentz esses novos resultados, uma vez que não há documentos que permitam confirmar essa informação.

Supondo que Poincaré não tenha comunicado esses resultados a Lorentz, várias razões podem ser cogitadas. Uma possibilidade é que essas hipóteses tenham sido desenvolvidas tardiamente e acrescentadas pouco antes da submissão do trabalho, sendo Poincaré esperançoso de que Lorentz lesse essa comunicação. Outra possibilidade, embora menos provável[9], é que o tema não estivesse relacionado diretamente aos problemas que Lorentz estava investigando (eletrodinâmica), o que pode ter levado Poincaré a evitar desviar a atenção de seu colega. Também podemos supor que Poincaré tenha considerado essas novas ideias imaturas e, portanto, julgasse mais interessante publicá-las para que outros pesquisadores as desenvolvessem, ao invés de discuti-las diretamente.

3. A dinâmica do elétron: notação

Para compreendermos o artigo de Poincaré, é necessário, novamente, abordarmos a notação empregada por ele. Poincaré utiliza a mesma notação para as derivadas parciais e as derivadas ordinárias, visto que o símbolo ∂ é usado para designar a variação dos funcionais. A tabela abaixo exemplifica as diferenças nas notações, e a Figura 1 ilustra essa distinção.

Tabela 1. Dicionário de notação ampliado (SCHWARTZ, 1971, p. 1289)

Quantidade	Notação de Poincaré	Notação Contemporânea
Campo Elétrico	(f, g, h)	**E**
Campo Magnético	(α, β, γ)	**B**
Potencial Escalar	y	ϕ
Potencial Vetor	(F, G, H)	**A**
Densidade de Corrente Elétrica Total	(u, v, w)	**I**
Velocidade do Elétron	(ξ, η, ζ)	**U**
Vetor Deslocamento	(U, V, W)	ξ
Força por Unidade de Volume	(X, Y, Z)	**F**
Força por Unidade de Carga	(X_1, Y_1, Z_1)	**F**
Velocidade Relativa entre dois Sistemas de Referência Inerciais	ε	$-\beta$
$(1 - \beta^{2})^{-1/2}$	K	γ

9 Consideramos menos provável, pois Lorentz já havia tentado estender suas análises na eletrodinâmica para a gravitação em 25 de abril de 1900, no ensaio *"Considerations on Gravitation"*, apresentado nos *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, sendo, portanto, um assunto de interesse para Lorentz.

$$(1)\quad \begin{cases} u=\frac{df}{dt}+\rho\xi=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}, \quad \alpha=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}, \quad f=-\frac{dF}{dt}-\frac{d\psi}{dx}, \\ \frac{d\alpha}{dt}=\frac{dg}{dz}-\frac{dh}{dy}, \quad \frac{d\rho}{dt}+\sum\frac{d\rho\xi}{dx}=0, \quad \sum\frac{df}{dx}=\rho, \quad \frac{d\psi}{dt}+\sum\frac{dF}{dx}=0, \\ \square=\Delta-\frac{d^2}{dt^2}=\sum\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dt^2}, \quad \square\psi=-\rho, \quad \square F=-\rho\xi. \end{cases}$$

$$(I)\quad \begin{cases} \vec{g}=\rho\vec{v}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}, \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}-\nabla\varphi, \\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\nabla\times\vec{E}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\left(\rho\vec{v}\right)=0, \qquad \nabla\vec{D}=\rho, \qquad \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\vec{A}=0, \\ \square=\Delta-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \square\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \square\vec{A}=\mu\left(\rho\vec{v}\right). \end{cases}$$

Figura 1. Equações de Maxwell: na notação adotada por Poincaré (1906, p. 132) (superior).

Reescritas em notação contemporânea com auxílio de Schwartz (1971) e Logunov (s.d., 2004) (inferior)

4. A dinâmica do elétron: introdução

Poincaré inicia seu artigo discutindo as tentativas de medir a velocidade da Terra em relação ao éter, situando sua análise no contexto dos debates sobre a óptica dos corpos em movimento e sobre o alcance do princípio da relatividade. Na versão publicada em 1905, ele escreve:

> Parece à primeira vista que a aberração da luz e os fenômenos ópticos associados proporcionam um meio de determinar o movimento absoluto da Terra, ou melhor, seu movimento, não em relação a outras estrelas, mas em relação ao éter. Este não é o caso: as experiências em que consideramos apenas a primeira ordem de aberração foram inicialmente mal sucedidas e uma explicação foi facilmente encontrada; mas Michelson, que imaginou um experimento através do qual os termos que dependem do quadrado da aberração poderiam ser medidos, também não teve sorte. Parece que essa incapacidade de demonstrar movimento absoluto é uma lei geral da natureza. (POINCARÉ, 1905f, p. 1504).

Na versão de 1906, Poincaré acrescenta a essa introdução que Fresnel havia provado a validade do princípio da relatividade para os fenômenos de refração e reflexão, além das experiências envolvendo telescópios preenchidos com água (*cf.* MARTINS, 2015). Ainda na versão de 1906, encontramos a seguinte passagem referente ao Princípio da Relatividade:

> Naturalmente, somos levados a admitir esta lei, que chamaremos de o Postulado da Relatividade e a admitiremos sem restrições. Sobre este postulado, que está até agora de acordo com experiências, pode ser confirmado ou refutado posteriormente por experiências mais precisas, porém é, de qualquer modo, interessante ver quais as consequências que se seguem dele (POINCARÉ, 1906, p. 129).

Ao empregar a expressão "postulado da relatividade", Poincaré atribui a esse princípio um papel regulador na investigação das consequências da teoria de Lorentz. A escolha terminológica é

significativa porque indica que, para Poincaré, a impossibilidade de detectar o movimento absoluto deveria ser tomada como uma orientação geral para a reformulação da eletrodinâmica dos corpos em movimento, ainda que permanecesse aberta à confirmação ou refutação por experiências posteriores. Em seguida, Poincaré discute uma controvertida conexão ativa: a hipótese de FitzGerald e Lorentz para a experiência de Michelson-Morley de 1887, fazendo a seguinte observação:

> Essa contração, que chamaremos de contração de Lorentz, daria conta do experimento de Michelson e de todos os que foram realizados até agora. A hipótese tornar-se-ia insuficiente, no entanto, se alguém assumisse o postulado da relatividade como uma lei geral. Lorentz procurou complementá-la e modificá-la para que ela concordasse perfeitamente com este postulado. Ele conseguiu fazê-lo em seu artigo intitulado *Fenômenos Eletromagnéticos em um Sistema que se Move com Qualquer Velocidade Inferior à da Luz* (Proceedings de l'Académie d'Amsterdam, 27 de maio de 1904). (POINCARÉ, 1906, p. 129).

Um pouco adiante, Poincaré reforça essa afirmação, declarando que:

> Langevin procurou modificar a ideia de Lorentz; Para ambos os autores, o elétron em movimento toma a forma de um elipsoide achatado, mas para Lorentz dois dos eixos do elipsoide permanecem constantes, enquanto que para Langevin, pelo contrário, é o volume do elipsoide que permanece constante. Além disso, ambos os cientistas mostraram que essas duas hipóteses estão de acordo com as experiências de Kaufmann, bem como a hipótese original de Abraham (elétron esférico indeformável). A vantagem da teoria de Langevin é que ele usa apenas forças eletromagnéticas e forças de ligação; mas é incompatível com o postulado da relatividade; isto é o que Lorentz mostrou e o que eu demonstrarei novamente de outra maneira, com base nos princípios da teoria de grupos. (POINCARÉ, 1906, p. 130).

É importante fazer uma observação crucial: Lorentz não se preocupou em conciliar sua eletrodinâmica com o princípio da relatividade, nem demonstrou que ela era compatível com esse princípio. Embora Lorentz tenha ponderado sobre as críticas de Poincaré, que considerava a hipótese da contração dos corpos uma hipótese ad hoc, e defendesse a construção de uma nova eletrodinâmica, ele não exigiu explicitamente que essa eletrodinâmica fosse fundamentada no princípio da relatividade. Isso é evidente no próprio *memoir* de 1904 de Lorentz, especialmente na seguinte passagem:

> A experiência da qual falei não é a única razão pela qual um novo exame dos problemas relacionados com o movimento da Terra é desejável. Poincaré se opôs teoria existente de fenômenos elétricos e ópticos em corpos móveis que, para explicar o resultado negativo de Michelson, a introdução de uma nova hipótese foi requerida, e que a mesma necessidade pode ocorrer a cada vez que novos fatos forem trazidos à luz. Certamente, esse método de inventar hipóteses especiais para cada novo resultado experimental é algo artificial. Seria mais satisfatório, se fosse possível mostrar, por meio de certas suposições fundamentais, e sem negligenciar termos de uma ordem de grandeza ou de outra, que muitas ações eletromagnéticas são inteiramente independentes do movimento do sistema. Há alguns anos, já procurei enquadrar uma teoria desse tipo. Eu acredito que agora seja capaz de tratar o assunto com um resultado melhor. *A única restrição no que diz respeito à velocidade será que seja menor que a da luz.* (LORENTZ, 1904, ITÁLICO NOSSO).

No artigo "*Two Papers of Henri Poincaré*", Lorentz é ainda mais explícito:

> Mais tarde, pude ver no artigo de Poincaré que, ao proceder de forma mais sistemática, poderia ter alcançado uma simplificação ainda maior. Não tendo notado isso, não consegui obter a invariância exata das equações; minhas equações permaneceram sobrecarregadas com certos termos que deveriam ter desaparecido. Esses termos eram muito pequenos para ter um efeito apreciável nos fenômenos e, assim, poderia explicar a independência do movimento da Terra que foi revelado pelas observações, mas não estabeleci o princípio da relatividade como rigorosamente e universalmente verdadeiro. Poincaré, pelo contrário, obteve uma invariância perfeita das equações da eletrodinâmica e formulou o "postulado da relatividade", termos que ele foi o primeiro a empregar. (LORENTZ, 1921).

Nas cartas que Poincaré enviou a Lorentz, observa-se que a compatibilidade entre o modelo lorentziano do elétron e o princípio da relatividade tornou-se um ponto central de sua análise. A atribuição feita por Poincaré a Lorentz deve ser compreendida no contexto mais amplo da eletrodinâmica dos corpos em movimento e da colaboração intelectual entre ambos. Embora Poincaré tenha reformulado aspectos importantes da teoria, especialmente ao explicitar o postulado da relatividade e explorar a estrutura de grupo das transformações de Lorentz, ele frequentemente apresentou seu trabalho como um desenvolvimento da teoria lorentziana (KESWANI, 1965). Essa leitura é reforçada por uma conferência proferida por Poincaré em 1912, sobre o éter e a matéria, na qual, ao discutir o espalhamento da luz pelas moléculas:

> As moléculas são muito pequenas para causarem uma reflexão regular; elas apenas geram uma difusão. O que é essa difusão, quando desconsideramos os movimentos das moléculas? Sabemos, tanto pela teoria quanto pela experiência, que é ela que produz o azul do céu. Essa difusão não altera o comprimento de onda, mas é mais intensa à medida que o comprimento de onda diminui. Agora, é necessário passar da ação de uma molécula em repouso para a ação de uma molécula em movimento, a fim de considerar a agitação térmica; isso é simples, basta aplicarmos o *princípio da relatividade de Lorentz*. (POINCARÉ, 1912, p. 358, ITÁLICO NOSSO).

A nosso ver, essa atribuição não deve ser lida como uma questão de prioridade, mas como o reconhecimento de que, para Poincaré, a eletrodinâmica de Lorentz era a formulação capaz de satisfazer plenamente as exigências do princípio da relatividade. Prosseguindo com a análise da introdução, observa-se que Poincaré introduz a hipótese de uma pressão atuando sobre o elétron, de natureza não eletromagnética, posteriormente associada às chamadas tensões de Poincaré:

> É, portanto, necessário retornar daqui para a teoria de Lorentz; mas se alguém quiser preservá-la e evitar contradições intoleráveis, é necessário supor uma força especial que explica, ao mesmo tempo, a contração e a constância de dois dos eixos. Procurei determinar essa força, descobri que *ela pode ser comparada a uma pressão externa constante, atuando sobre o elétron deformável e compressível, e cujo trabalho é proporcional às variações do volume do elétron*. Então, se a inércia da matéria é exclusivamente de origem eletromagnética, como é geralmente admitida desde a experiência de Kaufmann, e exceto que a pressão constante da qual eu venho falar, todas as forças são de origem eletromagnética, o postulado da relatividade pode ser estabelecido de maneira rigorosa. É o que mostro por um cálculo muito simples, baseado no princípio de mínima ação. (POINCARÉ, 1906, p. 130).

Poincaré conclui sua introdução afirmando que, como uma lei universal, o princípio da relatividade exige que as transformações de Lorentz se apliquem a todas as forças da natureza, sejam elas de origem eletromagnética ou não. Na época, apenas dois tipos de força eram conhecidos: as de natureza eletromagnética e as de natureza gravitacional. A gravitação, conforme a visão ortodoxa de sua época, era considerada um fenômeno instantâneo. No entanto, o princípio da relatividade exige que as interações ocorram à velocidade da luz. Nessas condições, Poincaré afirma que:

> Nós descobrimos que, à primeira vista, somos forçados a supor que a propagação da gravitação não é instantânea, mas acontece com a velocidade da luz. Pode-se acreditar que esta é uma razão suficiente para rejeitar a hipótese, como Laplace mostrou que isso pode ocorrer. Mas, na verdade, esse efeito de propagação é completamente compensado por uma causa diferente, de modo que não ocorra mais contradição entre a lei proposta e as observações astronômicas. É possível encontrar uma lei que satisfaça a condição imposta por Lorentz e que, ao mesmo tempo, é reduzida à lei de Newton quando as velocidades das estrelas são bastante pequenas, de modo que se podem negligenciar seus quadrados (bem como o produto da aceleração e da distância) em relação à velocidade da luz ao quadrado? Para esta questão, como será visto posteriormente, responderemos que sim. (POINCARÉ, 1906, p. 131).

A extensão aos fenômenos gravitacionais revela a Poincaré a importante conexão entre os fenômenos da natureza e a velocidade da luz no vácuo:

> Se admitimos o postulado da relatividade, encontraríamos na lei da gravitação e nas leis eletromagnéticas um número comum que seria a velocidade da luz; E ainda a encontraríamos em todas as outras forças de qualquer origem, o que só poderia ser explicado de duas maneiras: ou não haveria nada no mundo que não seja de origem eletromagnética. Ou essa parte que seria, por assim dizer, comum a todos os fenômenos físicos, seria apenas aparente, algo que seria devido aos nossos métodos de medição. Como realizamos nossas medidas? Por transporte, um para o outro, de objetos considerados corpos rígidos, que respondem imediatamente; mas isso não é mais verdade na teoria atual, se a contração de Lorentz for admitida. Nesta teoria, dois comprimentos iguais são, por definição, dois comprimentos para os quais a luz leva ao mesmo tempo para atravessar. (POINCARÉ, 1906, p. 132).

Poincaré estava ciente de que a hipótese sobre a gravitação representava uma proposição arriscada, dado que a teoria de Lorentz ainda não estava plenamente consolidada nos fundamentos da física, e o projeto de desenvolver uma nova teoria para a gravitação poderia ser descartado a qualquer momento. No entanto, Poincaré sustenta que, mesmo que um empreendimento seja eventualmente rejeitado, como ilustrado pelos exemplos históricos de Ptolomeu, Copérnico e Kepler, ele jamais se configura como inútil.

> Talvez seja necessário desistir dessa definição, de modo que a teoria de Lorentz seja tão completamente rejeitada quanto o sistema de Ptolomeu pela intervenção de Copérnico. Se isso acontecer um dia, não provará que o esforço feito por Lorentz foi em vão; porque Ptolomeu, não importa o que pensemos sobre ele, não foi inútil para Copérnico. Também não hesitei em publicar esses poucos resultados parciais, embora nesse momento, mesmo a

> teoria inteira parece estar em perigo pela descoberta de raios magnetocatódicos. (POINCARÉ, 1906, p. 132).

Essas considerações têm grande valor histórico, uma vez que a conciliação do princípio da relatividade com a gravitação só seria efetivamente resolvida uma década depois, com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral. Após essas breves observações, passaremos à análise de cada seção de *Sur la dynamique de l'électron*[10].

5. Transformações de Lorentz

A primeira seção (parágrafo) do artigo de Poincaré tem como objetivo corrigir as transformações da densidade de carga e da densidade de corrente. Como já discutido anteriormente, esse tópico havia sido parcialmente abordado por Poincaré em correspondência com Lorentz. Na ocasião, ele havia se limitado a corrigir a densidade de carga. Neste trabalho, Poincaré também identificou a necessidade de modificar a densidade de corrente. O principal objetivo dessa seção é corrigir essas transformações e estabelecer a invariância das equações de Maxwell. Por essa razão, Poincaré inicia apresentando as equações de Maxwell do eletromagnetismo. O sistema de unidades utilizado por Poincaré é o mesmo adotado por Lorentz, e, nesse sistema, os termos de 4π desaparecem, sendo a velocidade da luz no vácuo igual à unidade. Usando as transformações de Lorentz, Poincaré inicia o desenvolvimento de sua análise sobre o movimento de um elétron, que, no repouso, tem forma esférica. A respeito das transformações de Lorentz apresentadas por Poincaré, Miller faz a seguinte observação:

> É simétrica em relação à aparência das coordenadas espaço-tempo devido à omissão de Poincaré do sistema Σ. Deve ser comparado à versão de Lorentz, que evoluiu de seus trabalhos de 1892 e 1895. No entanto, logo se tornará aparente que essa simetria não implica a equivalência de S e Σ'. Poincaré, como Lorentz, tomou o sistema fixo de éter S como o verdadeiro; Σ foi considerado um sistema fictício usado para simplificar o cálculo de campos e forças (MILLER, 1973, p. 250).

Aqui, vemo-nos obrigados a discordar da interpretação de Miller, que afirma que Poincaré considerava o referencial em repouso em relação ao éter como o verdadeiro. Como apontado por Darrigol (1995), Giannetto (1999) e Logunov (2004), e corroborado por nossa pesquisa histórica, Poincaré rejeitava a existência de um espaço absoluto e nutria dúvidas sobre a existência do éter. Um argumento a favor dessa posição é o fato de que, em nenhum momento neste artigo, Poincaré defende a existência de um sistema verdadeiro de coordenadas. Além disso, decorre do grupo de Lorentz que não é possível estabelecer um referencial privilegiado. Essa é uma das razões pelas quais Poincaré enunciou a lei da relatividade em *A Ciência e a Hipótese*, justamente no capítulo onde discute os grupos de deslocamentos. Após estudar a transformação do elétron em um elipsoide achatado, Poincaré deriva a lei de composição relativística das velocidades (POINCARÉ, 1906, p. 133):

10 Esta análise foi realizada com base na consulta dos artigos originais de 1905 e 1906 (fontes primárias) e no relevante trabalho da literatura secundária: *Sur les articles de Henri Poincaré* (Logunov, s.d.) e *A Study of Henri Poincaré's "Sur la Dynamique de l'Électron"* (Miller, 1973).

$$\xi' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d\left(x+\varepsilon t\right)}{d\left(t+\varepsilon x\right)} = \frac{\xi+\varepsilon}{1+\varepsilon\xi},$$

$$\eta' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{kd\left(t+\varepsilon x\right)} = \frac{\eta}{k\left(1+\varepsilon\xi\right)}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{k\left(1+\varepsilon\xi\right)}$$

Tendo à disposição as transformações para a forma do elétron e da velocidade, Poincaré expõe sua divergência em relação às transformações da densidade de carga e da densidade de corrente. Com o objetivo de obter as transformações corretas e assegurar a invariância das equações de Maxwell, Poincaré recorre à equação da continuidade e ao estudo das forças sobre o elétron para formular um novo gauge de Lorentz (POINCARÉ, 1906, p. 134):

$$f' = -\frac{dF'}{dt'} - \frac{d\psi'}{dx'}, \quad \alpha' = \frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'}$$

que, em notação moderna, assume a seguinte forma:

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} - \nabla\varphi' \quad \vec{B}' = \nabla \times \vec{A}'$$

Por meio de sua análise matemática, Poincaré obtém as transformações corretas da densidade de carga e da densidade de corrente, demonstrando que essas modificações, além de assegurar a invariância das equações de Maxwell, não alteram as transformações do campo elétrico nem do campo magnético. Com esses resultados, Poincaré inicia o estudo das forças por unidade de carga, derivando uma fórmula para essas forças que diverge da expressa por Lorentz.

> Antes de seguirmos adiante, é importante investigar a causa dessa discrepância significativa. É óbvio que as equações para ξ' , η' , ζ' não são as mesmas, enquanto as fórmulas para os campos elétrico e magnético são as mesmas. *Se a inércia dos elétrons é exclusivamente de origem eletromagnética, se, além disso, estão sujeitos apenas a forças de origem eletromagnética, a condição de equilíbrio exige que dentro dos elétrons tenhamos*: $X = Y = Z = 0$. [...] Essas relações são equivalentes a: $X' = Y' = Z' = 0$. As condições de equilíbrio dos elétrons não são alteradas pela transformação. (POINCARÉ, 1906, p. 136)

Embora a hipótese seja atraente, ela conduz a uma contradição inaceitável: se as velocidades forem nulas, então as forças por unidade de carga também devem ser nulas. Essa condição implica que o campo elétrico seja nulo, o que, por sua vez, leva a uma divergência do campo igual a zero. Em termos matemáticos, podemos expressar isso como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

O que só é satisfeito se a densidade de carga ρ for nula. Isso equivaleria a concluir que o elétron não possui carga, o que é, evidentemente, absurdo.

> Chegamos a resultados semelhantes no caso mais geral. Devemos, portanto, admitir que existam, além de forças eletromagnéticas, outras forças ou ligações. É necessário procurar

> condições que devem satisfazer essas forças ou ligações, de modo que o equilíbrio do elétron não seja perturbado pela transformação. Este será o assunto de um parágrafo posterior. (POINCARÉ, 1906, p. 136)

No artigo de 1905, a conclusão de Poincaré referente à parte equivalente a este parágrafo é um pouco mais detalhada:

> Lorentz também foi levado a assumir que o elétron em movimento assume a forma de um esferoide oblato; esta é também a hipótese feita por Langevin, no entanto, enquanto Lorentz assumiu que dois eixos do elipsoide permanecem constantes, o que é consistente com a hipótese $l = 1$, Langevin assumiu que o volume permanece constante. Ambos os autores mostraram que essas duas hipóteses são consistentes com os experimentos de Kaufmann, bem como a hipótese original de Abraham (elétron esférico). A hipótese de Langevin teria a vantagem de ser autossuficiente, porque basta considerar o elétron como deformável e incompressível, e explicar que ele toma uma forma elipsoidal quando se move. Mas eu mostro, de acordo com Lorentz, que é incapaz de concordar com a impossibilidade de um experimento que mostre o movimento absoluto. Como eu disse isso é porque $l = 1$ é o único caso para o qual todas as transformações de Lorentz formam um grupo. Mas com a hipótese de Lorentz, a concordância entre as equações não está isolada; obtemos ao mesmo tempo uma possível explicação para a contração do elétron, assumindo que *o elétron, deformável e compressível, é submetido a uma pressão externa constante, cujo trabalho é proporcional às mudanças de volume*. (POINCARÉ, 1905f, p. 1506)

Concluímos a análise deste parágrafo ressaltando que, nesse artigo, Poincaré denominou as transformações do espaço, do tempo, dos campos elétricos e magnéticos, e das densidades de carga e corrente como *transformações de Lorentz* (LORENTZ, 1921; MARTINS, 2015).

6. O princípio de mínima ação

Na segunda seção, Poincaré inicia advertindo seu leitor de que não apresenta nenhum resultado significativamente novo, mas sim uma nova maneira de derivar as equações do elétron. Para ser mais preciso, Poincaré escreve:

> Sabemos como Lorentz deduziu suas equações do princípio de mínima ação. Voltarei a esta questão, apesar de não ter nada de substancial para adicionar à análise de Lorentz, porque prefiro apresentá-la de forma ligeiramente diferente, o que será útil para o meu propósito. (POINCARÉ, 1906, p. 137)

Novamente, Poincaré comete um equívoco: Lorentz não realizou a derivação de suas equações a partir do princípio de mínima ação.

> A derivação "bem conhecida" de Lorentz de suas equações realmente não era de forma alguma uma derivação e, além disso, não era para ser uma delas. Lorentz declarou em "Contribuições à Teoria dos Elétrons" (1903) que ele apenas queria ilustrar "que as equações fundamentais podem ser transformadas de tal maneira que chegamos a teoremas da mesma

> forma matemática que os princípios gerais da mecânica." Esse era o limite dos esforços de Lorentz para uma explicação mecânica das equações fundamentais. No entanto, este tipo de formulação deve ser possível para completar o programa reducionista de uma imagem eletromagnética do mundo. Se Lorentz tivesse tentado formular sua teoria dessa maneira em 1904, ele teria notado, e possivelmente corrigido, o defeito que foi quantitativamente apontado por Abraham em 1905. No mesmo artigo, Lorentz continuou a expressar seu descontentamento com uma imagem do mundo mecânica. (MILLER, 1973, p. 137)

Historicamente, a primeira dedução das equações de Maxwell a partir do princípio de mínima ação foi realizada pelo físico-matemático alemão Karl Schwarzschild, em 1903, que calculou as variações da seguinte lagrangiana (MILLER, 1973, p. 256):

$$L = \int \rho \vec{A} \cdot \vec{v} \, d\tau - \int \rho \phi \, d\tau + \frac{1}{2} \int \left(E^2 - B^2 \right) d\tau$$

A derivação que Poincaré desenvolve em seu artigo segue as regras usuais do cálculo das variações; no entanto, há alguns pontos que gostaríamos de destacar. O primeiro fato relevante é que Poincaré define a lagrangiana de forma diferente do convencional, conforme apresentado em sua formulação (POINCARÉ, 1906, p. 136):

$$L = U - T,$$

Essa alteração não promove nenhuma mudança nos resultados, pois a corrente total, definida em termos do rotacional do campo magnético induzido, compensa a mudança de sinal (MILLER, 1973).

O outro ponto refere-se à maneira como Poincaré desenvolve os funcionais eletromagnéticos. Como observou Miller (1973), Poincaré não segue o método "germânico" empregado por Schwarzschild. O método de Poincaré estabelece uma analogia entre o eletromagnetismo e a hidrodinâmica. Nesse método, Poincaré utiliza a equação da continuidade e postula que o elétron se comporta como um fluido newtoniano. Essa técnica não era exatamente nova, pois Poincaré já havia adotado abordagens semelhantes nos artigos *"A propos de la théorie de M. Larmor"* (1895), *"La théorie de Lorentz et le principe de réaction"* (1900), e em seu livro *"Électricité et Optique"* (1901).

Sobre a dedução em si, há pouco a ser observado. No entanto, há uma passagem curiosa em que Poincaré parece ter cometido um pequeno lapso de raciocínio. Durante sua análise, Poincaré impõe a seguinte condição:

$$\frac{\partial \rho \Delta}{\partial t} = 0$$

Poincaré afirma que a condição é verdadeira, pois "a massa do elétron é constante" (POINCARÉ, 1906). No entanto, como observa Miller (1973), embora essa equação na hidrodinâmica se aplique a um elemento de massa do fluido, no contexto do eletromagnetismo, a massa deve ser substituída pela carga elétrica. Assim, Poincaré deveria ter escrito que a condição é válida

desde que "a carga do elétron seja constante". Vale também notar que trabalhos experimentais conduzidos por Kaufmann indicavam que a massa do elétron não é constante (MILLER, 1973).

Conduzindo sua análise matemática, Poincaré estabelece a equação da força por unidade de volume aplicada sobre o elétron.

$$X = f - \beta\zeta + \gamma\eta$$

Ou, em notação vetorial moderna:

$$\vec{f} = \rho\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Essa é a expressão para a força por unidade de volume sobre o elétron em um campo eletromagnético, que foi deduzida por Lorentz. Se multiplicarmos ambos os lados da equação pelo elemento de volume, obtemos a expressão da força de Lorentz:

$$\vec{F}_{em} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Embora não se trate de um resultado novo, essa abordagem alternativa para deduzir a força de Lorentz, embora mais refinada e elegante, ultrapassará seu caráter, até então, meramente estético, e se tornará essencial nas seções subsequentes. A esse respeito, é pertinente a observação de Miller (1973, p. 259):

> Até então, Poincaré fez apenas uma elegante exposição do procedimento variacional de Lorentz. No entanto, nas seções seguintes, ele demonstrou a importância, do ponto de vista do princípio da relatividade, de expressar a teoria do campo eletromagnético em uma formulação Lagrangiana; uma importância que transcende a afirmação de que se um T e um U podem ser encontrados para o campo eletromagnético, então explicações mecânicas são possíveis. A utilidade da formulação de Lagrange foi demonstrada por Abraham, mas seu significado completo e a simetria que ela continha foi descoberta pela primeira vez por Poincaré usando a afirmação matemática do princípio da relatividade, a transformação de Lorentz.

Nas próximas seções, analisaremos as vantagens do método variacional e como ele levou Poincaré à construção de importantes simetrias que fundamentam a teoria da relatividade especial.

7. A transformação de Lorentz e o princípio de mínima ação

poincaré inicia seu artigo fazendo a seguinte afirmação: "Vamos ver se o princípio de mínima ação nos revela o motivo do sucesso da transformação de Lorentz" (POINCARÉ, 1906, p. 137). Inicialmente, Poincaré apresenta a ação eletromagnética, definida pela seguinte integral:

$$J = \int dt\ d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right)$$

Para estabelecer que os elementos de volume e de tempo em um novo sistema de coordenadas devem respeitar a seguinte igualdade:

$$dt'd\tau' = l^4 dt\ d\tau$$

Poincaré não demonstra por que essa igualdade deve ser satisfeita, mas ela decorre do jacobiano da transformação de coordenadas, como demonstraremos. Utilizaremos o mesmo processo exposto por Miller (1973, p. 260) na nota de rodapé 170. A transformação dos elementos de volume e tempo de um sistema de coordenadas para outro é dada pelo jacobiano da transformação:

$$dt'd\tau' = J_{t'\tau'}(t,\tau)dt\ d\tau$$

Onde $J_{t'\tau'}$ é o determinante jacobiano, definido por:

$$J_{t'\tau'} = \frac{\partial(x',y',z',t')}{\partial(x,y,z,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} & \frac{\partial x'}{\partial t} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} & \frac{\partial y'}{\partial t} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} & \frac{\partial z'}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial t'}{\partial y} & \frac{\partial t'}{\partial z} & \frac{\partial t'}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Substituindo as transformações de coordenadas, obtemos:

$$J_{t'\tau'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(kl(x+\varepsilon t))}{\partial x} & \frac{\partial(kl(x+\varepsilon t))}{\partial y} & \frac{\partial(kl(x+\varepsilon t))}{\partial z} & \frac{\partial(kl(x+\varepsilon t))}{\partial t} \\ \frac{\partial(ly)}{\partial x} & \frac{\partial(ly)}{\partial y} & \frac{\partial(ly)}{\partial z} & \frac{\partial(ly)}{\partial t} \\ \frac{\partial(lz)}{\partial x} & \frac{\partial(lz)}{\partial y} & \frac{\partial(lz)}{\partial z} & \frac{\partial(lz)}{\partial t} \\ \frac{\partial(kl(t+\varepsilon x))}{\partial x} & \frac{\partial(kl(t+\varepsilon x))}{\partial y} & \frac{\partial(kl(t+\varepsilon x))}{\partial z} & \frac{\partial(kl(t+\varepsilon x))}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Realizando as derivadas parciais, o determinante se reduz a:

$$J_{t'\tau'} = \begin{vmatrix} kl & 0 & 0 & kl\varepsilon \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \\ kl\varepsilon & 0 & 0 & kl \end{vmatrix}$$

Computando esse determinante, obtemos o seguinte valor:

$$J_{t'\tau'} = \left(1-\varepsilon^2\right)k^2l^4$$

Mas, como o fator *k* é definido como $\left(1-\varepsilon^2\right)^{-1/2}$, então $\left(1-\varepsilon^2\right)=k^{-2}$, e o determinante jacobiano se torna:

$$J_{t'\tau'} = l^4$$

Substituindo na equação de transformação dos elementos de volume e do tempo, obtemos o resultado anteriormente apresentado por Poincaré:

$$dt'd\tau' = l^4 dt\ d\tau$$

Partindo deste resultado, Poincaré, por meio da transformação de Lorentz, provou a seguinte igualdade:

$$\int dt\ d\tau\left(\frac{1}{2}\sum f^2 - \frac{1}{2}\sum \alpha^2\right) = \int dt'd\tau'\left(\frac{1}{2}\sum f'^2 - \frac{1}{2}\sum \alpha'^2\right)$$

O que significa que a ação eletromagnética é um invariante de Lorentz (para qualquer valor de *l*):

$$J = J'$$

Sobre essa invariância, Poincaré faz a seguinte observação:

> No entanto, para justificar essa igualdade, os limites de integração devem ser os mesmos; Até agora, assumimos que *t* varia de t_0 a t_1, e *x, y, z* de -∞ para +∞. Nesta operação, os limites de integração serão afetados pela transformação de Lorentz, mas nada nos impede de assumir t_0 = -∞, t_1 = +∞; Com essas condições, os limites são os mesmos para *J* e *J'*. (POINCARÉ, 1906, p. 143)

A seguir, Poincaré estuda a variação das ações *J* e *J'*. Seus resultados conduzem à fórmula de transformação da força por unidade de volume, já obtida no primeiro parágrafo, e levam à obtenção de um novo invariante:

$$\sum f^2 - \sum \alpha^2$$

ou, em notação moderna:

$$\frac{\varepsilon E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu}$$

Sobre esses resultados, Poincaré faz a seguinte observação: "vemos que $Sf^2 - Sa^2$ não é afetado pela transformação de Lorentz, exceto por um fator constante; não é o caso da expressão $Sf^2 + Sa^2$ que representa a energia. (POINCARÉ, 1906, p. 144). Adiante, Poincaré estuda o caso particular em que ε (β) é muito pequeno, implicando que o fator de Lorentz é igual à unidade, *k* = 1, e o valor de *l* = 1 (o que corresponde à teoria de Lorentz). Neste caso, Poincaré obtém as seguintes transformações para os campos elétricos e magnéticos:

$$\sum f'^2 = \sum f^2 + 2\varepsilon\left(g\gamma - h\beta\right)$$
$$\sum \alpha'^2 = \sum \alpha^2 + 2\varepsilon\left(g\gamma - h\beta\right)$$

Que em notação vetorial, é escrito como:

$$E'^2 = E^2 - 2\beta\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_x$$
$$B'^2 = B^2 - 2\mu\varepsilon\beta\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_x$$

onde o índice subscrito *x* indica que estamos tomando a norma da componente nesta direção.

A partir dessa expressão, podemos verificar a expressão de energia somando os quadrados das componentes dos campos elétricos e magnéticos:

$$\sum f'^2 + \sum \alpha'^2 = \sum f^2 + \sum \alpha^2 + 4\varepsilon\left(g\gamma - h\beta\right)$$

Que, na notação atualmente empregada no eletromagnetismo, toma a seguinte forma:

$$\varepsilon E'^2 + \frac{B'^2}{\mu} = \varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu} - 4\varepsilon\beta\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_x$$

Se subtrairmos, mostramos que esta transformação é invariante:

$$\sum f'^2 - \sum \alpha'^2 = \sum f^2 + \sum \alpha^2 + 2\varepsilon\left(g\gamma - h\beta\right) - 2\varepsilon\left(g\gamma - h\beta\right)$$

E, portanto:

$$\sum f'^2 - \sum \alpha'^2 = \sum f^2 + \sum \alpha^2$$

Em notação moderna, precisamos levar em consideração os fatores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética. Realizando as simplificações, obtemos a expressão equivalente à obtida por Poincaré:

$$\varepsilon E'^2 - \frac{B'^2}{\mu} = \varepsilon E^2 - \frac{B^2}{\mu}$$

Como Poincaré demonstrará na próxima seção, a invariância das equações de Maxwell sob as transformações de Lorentz é uma consequência do princípio da relatividade e do grupo de Lorentz, o que possibilita a construção de um espaço-tempo quadrimensional. No entanto, a análise dessa e de outras consequências será desenvolvida apenas na segunda parte deste ensaio.

8. Considerações finais

No final do século XIX e no início do século XX, as tentativas de evidenciar a velocidade da Terra em relação ao éter, a necessidade de estabelecer métodos precisos para medir o espaço e sincronizar relógios usando ondas eletromagnéticas, e os estudos sobre a dinâmica do elétron, levaram os físicos a desenvolver a base teórica e empírica da Teoria da Relatividade Especial. Entre esses pesquisadores que contribuíram para a gênese e o desenvolvimento da Teoria da Relatividade estava o físico-matemático francês Henri Poincaré.

Um aspecto característico da abordagem de Poincaré, em comparação com Abraham, Bucherer, Hasenöhrl, Lorentz, Langevin e Larmor, era sua confiança no princípio da relatividade, que o levou posteriormente ao estabelecimento do grupo de Lorentz e à derivação dos seguintes resultados, fundamentais para a Relatividade Especial (DAMOUR, 2017, p. 559):

> A lei relativista da adição de velocidades;
>
> A lagrangiana relativística do elétron;
>
> A compreensão das transformações de Lorentz como "rotações" em um "espaço quadri-dimensional" com coordenadas "x, y, z, t√−1", e o método associado de construção de invariantes relativísticos;
>
> A álgebra de Lie do grupo de Lorentz
>
> Uma descrição mais explícita da classe de leis de força gravitacional relativisticamente invariantes, de ação à distância, entre duas massas (em movimento arbitrário) e dos efeitos de propagação de "onda gravitacional" entre estes corpos associados.

À luz desses resultados, esta primeira parte de nossa análise de *Sur la dynamique de l'électron* (1906) concentrou-se nas três seções iniciais do ensaio. Nelas, Poincaré corrige transformações propostas por Lorentz, articula o princípio da relatividade com o princípio de mínima ação e introduz elementos associados a uma formulação espaço-temporal quadrimensional. Essa delimitação metodológica permitiu destacar aspectos decisivos de sua formulação, ainda que tenha deixado em aberto discussões desenvolvidas nas seções posteriores, relativas às simetrias do grupo de Lorentz e, em particular, às hipóteses sobre a gravitação, já examinadas por Nunes e Queirós (2025a).

As limitações deste estudo decorrem tanto da restrição do corpus analisado quanto das fontes disponíveis. A documentação epistolar de Poincaré é fragmentária: conhecemos apenas

algumas cartas trocadas com Lorentz e um registro isolado de correspondência com Langevin, não havendo indícios de que tenha se comunicado diretamente com Abraham. Isso impõe limites à reconstrução integral do processo criativo e das redes de interação científica que moldaram a recepção de suas ideias. Além disso, a análise aqui desenvolvida não busca estabelecer precedências entre autores, mas situar o ensaio de Poincaré no quadro histórico e conceitual da dinâmica do elétron e da eletrodinâmica dos corpos em movimento.

Essas restrições, porém, abrem caminhos promissores para investigações futuras. Destacam-se a análise comparativa detalhada das versões de 1905 e 1906 de *Sur la dynamique de l'électron*, a exploração mais profunda dos arquivos epistolares e manuscritos, e a pesquisa sistemática sobre a recepção imediata de suas ideias em diferentes comunidades científicas europeias. Igualmente relevante é investigar como suas hipóteses sobre a gravitação, ainda incipientes, repercutiram indiretamente na formulação da relatividade geral e em programas posteriores de unificação. Assim, ao mesmo tempo em que este estudo buscou oferecer uma contribuição crítica ao entendimento da obra de Poincaré, ele também aponta para a necessidade de novas leituras, capazes de situar suas ideias em um horizonte histórico e epistemológico mais amplo.

DECLARAÇÃO DO USO DE IA

Em conformidade com a Portaria CNPq nº 2.664, de 6 de março de 2026, com a declaração de posição do Committee on Publication Ethics (COPE) sobre autoria e ferramentas de inteligência artificial, com as orientações da UNESCO sobre inteligência artificial generativa em educação e pesquisa e com a Declaração de Heredia, declaramos que o ChatGPT, da OpenAI, foi utilizado exclusivamente como ferramenta de apoio editorial durante a etapa de revisão do manuscrito, especialmente para apoio à redação, revisão linguística, organização textual e tradução pontual de excertos. A ferramenta não foi utilizada como fonte de autoria, análise ou interpretação das fontes históricas. Após o uso da ferramenta, os autores revisaram e editaram integralmente o conteúdo. A pesquisa, a seleção e interpretação das fontes, a argumentação, as conclusões e a responsabilidade integral pelo conteúdo permanecem exclusivamente sob responsabilidade dos autores.

Referências bibliográficas

DAMOUR, T. Poincaré, the dynamics of the electron, and relativity. *Comptes Rendus. Physique*, v. 18, p. 551-562, 2017.

DARRIGOL, Olivier. Henri Poincaré's criticism of *fin de siècle* electrodynamics. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, v. 26, n. 1, p. 1–44, 1995.

DARRIGOL, Olivier. The electrodynamic origins of relativity theory. *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, v. 26, n. 2, p. 241–312, 1996.

DARRIGOL, Olivier. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. New York: Oxford University Press, 2003.

GIANNETTO, Enrico. The rise of special relativity: Henri Poincaré’s works before Einstein. p. 171–207. In: *Atti del XVIII Congresso di Storia della Fisica e dell’Astronomia*. Milano: Istituto de Física Generale Applicata/Centro Volta de Como, 1999.

KESWANI, G. H. Origin and Concept of Relativity (I). *The British Journal for the Philosophy of Science***,** v. 15, p.286-306, 1965.

LANGEVIN, Paul. *La physique des électrons*. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, v. 16, p. 257–276, 1905.

LOGUNOV, A. A. *Henri Poincaré and Relativity Theory*. 2004. Disponível em: https://arxiv.org/abs/physics/0408077. Acesso em: 21 fev. 2025.

LOGUNOV, Anatoly A. *Sur les articles de Henri Poincaré: Sur la dynamique de l’électron*. Le texte fondateur de la relativité en langage scientifique moderne. Tradução de Vladimir Petrov e Christian Marchal. [s.d.]. Disponível em: https://www.annales.org/)edit/archives/x/Poincare-Logunov.pdf. Acesso em: 21 fev. 2025.

LORENTZ, Hendrik Antoon. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. *Verslagen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, v. 12, p. 986-1009, 1904.

LORENTZ, Hendrik Antoon. Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique. *Acta Mathematica*, v. 38, p. 293–308, 1915/1921.

MARTINS, R. A. O éter e a óptica dos corpos em movimento: a teoria de Fresnel e as tentativas de detecção do movimento da Terra, antes dos experimentos de Michelson e Morley (1818-1880). *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Florianópolis, v. 29, n. 1, p. 52-80, 2012a.

MARTINS, R. A. *Teoria da Relatividade Especial.* São Paulo: Livraria da Física, 2012b.

MARTINS, R. A. *A Origem Histórica da Relatividade Especial.* São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MILLER, Arthur I. A study of Henri Poincaré’s Sur la dynamique de l’électron. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 10, p. 207–328, 1973.

MILLER, Arthur I. *Frontiers of physics: 1900-1911: selected essays*. New York: Springer, 1986.

NUNES, Clair de Luma Capiberibe; QUEIRÓS, Wellington. Poincaré e o Princípio da Relatividade. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 16, p. 765-792, 2023.

NUNES, Clair de Luma Capiberibe; QUEIRÓS, Wellington Pereira de. As hipóteses de Poincaré sobre a gravitação. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 18, n. 1, 2025a.

NUNES, Clair de Luma Capiberibe; QUEIRÓS, Wellington Pereira de. Fontes Primárias no Ensino de Ciências: A Reconstrução Racional das Cartas de Poincaré como Recurso Didático. *Revista de Enseñanza de la Física*, v. 37, n. 2, p. 181-193, 2025b.

POINCARÉ, Henri. À propos de la théorie de M. Larmor. *L’Éclairage électrique*, Paris, v. 3, p. 5-13, 289-295, 1895; v. 5, p. 5-14, 385-392, 1895. Republicado em: POINCARÉ, Henri. *Œuvres de Henri Poincaré*. Paris: Gauthier-Villars, 1934-1954. v. 9, p. 369-426.

POINCARÉ, H. *La Science et l’Hypothèse***.** Paris: Flammarion, 1902.

POINCARÉ, H. [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris, 27 de abril de 1905a. 1 f. Poincaré lamenta não poder comparecer à recepção de Lorentz na Sociedade de Física, agradece o envio de materiais e expressa interesse em encontrá-lo na Academia de Ciências.

POINCARÉ, H. [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris, ca. maio de 1905b. 1 f. Poincaré pede desculpas por não poder assistir à palestra de Lorentz e discute a transformação de densidade de carga de seu ensaio de 1904.

POINCARÉ, H. [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris, maio de 1905c. 2 f. Poincaré comunica a Lorentz seus desenvolvimentos sobre o fator l e a estrutura de grupo das transformações de Lorentz, ressaltando dificuldades relativas à dinâmica do elétron.

POINCARÉ, H. [Carta] Paris para LORENTZ, H. Paris, maio de 1905d. 1 f. Poincaré comunica a Lorentz seus resultados sobre a compatibilidade entre o modelo lorentziano do elétron e o princípio da relatividade, bem como sobre a necessidade de forças complementares não eletromagnéticas.

POINCARÉ, H. *La valeur de la science*. Paris: Flammarion, 1905e.

POINCARÉ, H. Sur la dynamique de l'électron. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, v. 140, p. 1504–1508, 1905f.

POINCARÉ, H. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, v. 21, p. 129–176, 1906.

POINCARÉ, H. Les rapports de la matière et de l'éther. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, v. 2, p. 347–360, 1912.

SCHWARTZ, H. M. A note on Poincaré's contribution to relativity. *American Journal of Physics*, v. 33, n. 2, p. 170, 1965.

SCHWARTZ, H. M. Poincaré's Rendiconti paper on relativity. Part I. *American Journal of Physics*, v. 39, n. 7, p. 1287-1294, 1971.

SCHWARTZ, H. M. Poincaré's Rendiconti paper on relativity. Part II. *American Journal of Physics*, v. 40, n. 6, p. 862-872, 1972a.

SCHWARTZ, H. M. Poincaré's Rendiconti paper on relativity. Part III. *American Journal of Physics*, v. 40, n. 9, p. 1282-1287, 1972b.

SWENSON JR., Loyd S. *The Ethereal Aether: A History of the Michelson-Morley-Miller Aether-Drift Experiments, 1880-1930*. London: University of Texas Press, 1972.

Recebido em 25/09/2025

Aceito em 15/06/2026