Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática?

Unmasking the equation. History for the teaching of which mathematics?

TATIANA ROQUE

Universidade Federal do Rio de Janeiro | UFRJ

RESUMO Muitos estudos têm sido feitos sobre os modos de se incorporar a história ao ensino de matemática. A maioria, contudo, não chega a questionar a matemática que se pretende ensinar, admitindo os tópicos do currículo como objetos que precisam ser aprendidos enquanto tais. Usando o exemplo da equação, buscaremos mostrar que o simples enunciado deste conceito em linguagem simbólica mascara diversos pressupostos que não são explicitados no ensino. O papel da história seria, assim, exibir o caminho de sua constituição como objeto, enfatizando o caráter contingente das escolhas que foram feitas para que a equação adquirisse o aspecto que conhecemos atualmente.

Palavras-chave ensino da matemática – currículos – história da ciência.

ABSTRACT *Many studies have been done about the ways to incorporate history in the teaching of mathematics. Most of them, however, fail to question the very mathematics we intend to teach, admitting topics in the curricula as objects students must learn as such. Using the example of the equation, we try to show that the statement of this concept in symbolic language masks many assumptions not made explicit in teaching. The role of history would so be to exhibit the ways in which it was constituted as an object, emphasizing the contingent character of the choices that were done for the equation to acquire the aspect we know nowadays.*

Keywords *mathematics teaching – curricula – history of science.*

Introdução

A história da matemática pode ajudar no ensino de matemática? A pergunta tornou-se comum ultimamente e pesquisadores da área vêm debatendo argumentos favoráveis e contrários. Não partimos desta pergunta, mas de outra que, de nosso ponto de vista, se coloca antes dessa: que pressupostos sobre o tipo de matemática que deve ser ensinada estão em jogo ao questionarmos a utilidade da história para o seu ensino?

Esta pergunta é abordada tão raramente que sua própria formulação causa estranheza. Há vários tipos de matemática? Claro que, ao indagarmos qual matemática deve ser ensinada, supomos que não há apenas uma matemática, o que confronta por si só a ideia hegemônica sobre a natureza da matemática. Abordagens metodológicas mais recentes na pesquisa em história da matemática indicam que não há *uma* matemática, que evolui linearmente ao longo do tempo, mas várias práticas matemáticas que nem sempre podem ser traduzidas umas nas outras.

Resumindo, para refletir sobre os usos da história no ensino, podemos partir de dois pressupostos distintos: investigar a efetividade da história para o ensino de matemática, corroborando que a matemática que é ensinada nas escolas, que consta dos currículos e dos livros-textos é realmente a matemática que deve ser ensinada; mas também podemos pensar como a história pode servir para questionar que esta seja realmente a matemática a ser ensinada. Este artigo defende o segundo ponto de vista.

Nos anos 1970, disseminou-se a ideia de que a história da matemática pode ter um papel na educação matemática e organizaram-se comunidades internacionais com o fim de pesquisar mais atentamente os usos da história, em particular o *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (ISGHPM, conhecido hoje como HPM) dentro do *International Comitee on Mathematical Instruction*. Conferências, livros e cooperações internacionais surgiram desta iniciativa[1].

Nas últimas reuniões do grupo, tem-se reconhecido a carência de estudos empíricos sobre usos efetivos da história no ensino[2]. No entanto, das diferentes temáticas às quais os pesquisadores se dedicam, nossa pesquisa se insere na discussão sobre os quadros teóricos para integrar a história no ensino de matemática. Não pretendemos realizar um estudo empírico destes usos, uma vez que, na maioria dos casos, as experiências realizadas tratam de exemplos específicos de uso da história, que não chegam a questionar o tipo de matemática que se pretende ensinar[3].

No artigo "History of Mathematics in Mathematics Education"[4], um dos únicos sobre matemática no *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, Michael Fried traça um panorama das principais abordagens para justificar o interesse de se incorporar a história ao ensino. Ele reconhece que é preciso refinar nosso entendimento sobre a natureza da educação matemática em si mesma, se quisermos que a história da matemática não esteja subordinada a noções impostas no currículo – equações, funções, derivadas, geometria. Logo, o artigo não pergunta somente como a história deve ser incorporada ao ensino de matemática, mas que visões sobre este ensino devem ser reelaboradas para acomodar a história.

Ao analisar as pesquisas dos últimos quarenta anos, com diferentes concepções sobre como a história pode servir ao ensino, Fried classifica as iniciativas com base em três temas: tema motivacional, tema curricular e tema cultural. Nos próximos parágrafos, exporemos brevemente o que ele diz.

Apesar de bem intencionado, o tema motivacional parece problemático. Em primeiro lugar, supõe-se, ainda que inconscientemente, que o conteúdo matemático não pode ser interessante por si mesmo, logo deve ser embelezado com estórias, anedotas ou imagens. A história é algo a ser acrescentado às aulas de matemática a fim de tornar o ensino menos enfadonho. Em segundo lugar, negligencia-se a história como um corpo de conhecimentos a ser levado a sério e ensinado, sendo somente um "a mais" nas estratégias de ensino esperadas dos professores. O principal aqui é que a história possa despertar os estudantes, não importando se o que se conta é informativo, verdadeiro ou pertinente. Por estas razões, o tema motivacional acaba por não fazer justiça nem à matemática nem à história – a matemática é tida como um saber enfadonho por definição; e a especificidade da história é colocada de lado.

No tema curricular, propõe-se incluir no ensino argumentos sobre supostos tratamentos históricos de tópicos da matemática. Estas abordagens teriam um poder pedagógico por si mesmas ou por oferecer um contraste com abordagens modernas. Os conceitos tratados não são retirados da história, mas são tópicos dados de antemão, como funções, número, equação, derivada, limite, ou seja, assuntos do currículo de matemática. Enxerga-se aqui, com mais ênfase, a tendência de tratar a matemática do passado como contendo, de modo "implícito", conceitos modernos, que podem ser traduzidos em nossa linguagem. Um exemplo, do qual voltaremos a falar mais adiante, é a noção de equação, vista normalmente como um tópico cuja história vem se desenvolvendo desde os babilônios, ainda que de modo implícito, primitivo.

Um caso particular em que este segundo tema se faz presente é o chamado "argumento genético". Como afirma Gert Schubring,[5] a defesa do uso da história no ensino de matemática se baseou frequentemente em um suposto paralelismo entre os desenvolvimentos histórico e cognitivo do homem. As dificuldades enfrentadas pelos alunos reproduziriam dificuldades encontradas na história da matemática, o que se assume ao se enxergar estas dificuldades como "obstáculos epistemológicos". Schubring analisa argumentos desta natureza, muito difundidos em artigos de educação matemática dos anos 1980 e 1990, mostrando que eles seguem de um tratamento difundido por Guy Brousseau[6], que utiliza, por sua vez, e de modo abusivo o termo proposto inicialmente por Gaston Bachelard. Para além do paralelismo, Fried considera ser também possível que a recorrência de dificuldades conceituais no aprendizado de muitas ideias matemáticas não precise ser explicada por um paralelo entre a história e o desenvolvimento cognitivo individual; seria razoável defender que o desenvolvimento individual é uma função de ideias historicamente condicionadas. Ou seja, as dificuldades que aparecem no aprendizado podem ser relacionadas ao fato de que a invenção das ideias matemáticas, ensinadas aos estudantes, esteve imersa em uma cultura que não é aquela na qual estes estudantes vivem.

Chegamos finalmente ao tema cultural. Supõe-se que a cultura inclui a matemática e que a matemática é cultural, logo matemática e história são inseparáveis. A história poderia, assim, esclarecer ou aprofundar a compreensão das ideias matemáticas, mostrando que estão incluídas na cultura, levando os estudantes a compreenderem a matemática como uma invenção humana. Fried ressalta, contudo, que este objetivo de humanizar a matemática pode estar perigosamente próximo de tentativas simplistas, que buscam somente mostrar a matemática como algo menos formidável e triunfante, de modo que os estudantes não se sintam ameaçados. Ao invés disso, deve-se enxergar a matemática como uma atividade essencialmente humana, ou seja, a história como parte da natureza da matemática (*Geisteswissenschaft*). Assim, a história não funcionaria mais como um meio para promover interesse ou motivação, mas estaria no coração da matemática e do que significa aprender matemática. Acredita-se que, vista como expressão da cultura, a perspectiva dos alunos sobre a matemática possa se transformar radicalmente, pois esta visão questiona a imagem predominante dos objetos matemáticos como entes eternos, platônicos, apreendidos do mesmo modo em qualquer tempo e lugar. Desta perspectiva, o tema cultural tem muito em comum com a etnomatemática ou com as discussões sobre o multiculturalismo. A história da matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos *matemática*. Neste último sentido, seria possível conceber uma educação matemática realmente histórica, sem simplificações.

Estamos de acordo com as considerações de Fried, mas é preciso ir além. Para ele, uma reflexão sobre os usos da história implica em se questionar os pressupostos sobre o ensino de matemática; para nós, esta reflexão implica também em se questionar os pressupostos sobre a própria matemática, como um corpo de conhecimentos bem definido. A especificidade das ideias e dos objetos matemáticos ensinados aos alunos merece ser questionada, discutida, desvelada e a perspectiva cultural não aponta necessariamente nesta direção.

As abordagens culturalistas, ou multiculturalistas, costumam encarar a cultura como um corpo de ideias, ou de conhecimentos, que são compartilhados por um conjunto de sujeitos, habitando em certo ambiente e compartilhando práticas ou valores comuns. Esta noção de cultura dá pouca atenção à dinâmica de constituição de tais ideias, crenças e valores; e o próprio termo "cultura" não é problematizado. Recorremos, ao invés disso, à noção de discurso, sugerida por Michel Foucault na *Arqueologia do Saber*[7]. Queremos investigar a matemática como mecanismo constituinte de discursos, ou seja, práticas que formam sistematicamente os objetos de que falam.

O empreendimento parece ousado demais, mas esta perspectiva será adotada a partir do exemplo de uma noção particular, bastante típica no ensino de matemática: a equação. No Ensino Básico, o currículo de matemática não é constituído de resultados (teoremas, demonstrações), mas somente de poucos objetos, a maioria fornecida em linguagem algébrica, e de ferramentas a serem executadas sobre eles, de modo repetitivo. O caso da equação é paradigmático, basta pensar no que sabemos sobre a equação do segundo grau: a fórmula de resolução. Não aprendemos equações, mas o modo de resolvê-las. No melhor dos casos, parte-se de exemplos concretos, problemas práticos ou fenômenos físicos, que podem ser representados por meio da equação, exibindo a solução da equação como solução do problema, sem que a distância entre a equação e a situação que representa seja questionada.

Mas afinal o que é $ax^2 + bx + c = 0$?

Um bom aluno responderia: é um objeto matemático que pode ser resolvido pela fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$. Além disso, pode ser útil à resolução de problemas, como por exemplo o de encontrar dois números com soma e produto dados; ou talvez algum problema físico ou geométrico.

Esta resposta não nos parece satisfatória. Mas a limitação não é uma deficiência do aluno, ou uma inadequação que possa ser atribuída ao professor ou à escola. Com os recursos que desenvolve no Ensino Básico, o melhor aluno, da melhor escola possível, não seria capaz de responder à pergunta, pois o objeto *equação* lhe é apresentado como um dado, ou como diz Foucault, uma positividade. Trata-se de um fato incontornável, que o aluno deve aprender a resolver por meio da fórmula, ou aplicar a problemas preparados, de antemão, com o intuito de testar se este conhecimento foi aprendido.

Mas por que a equação é um objeto relevante, que devemos aprender a resolver? Para resolver problemas? Só que os problemas que ela permite resolver não foram sempre resolvidos por meio de equações... Será que a equação é um modo mais fácil de resolvê-los? Segundo que critérios?

A equação enunciada, nos termos citados, contém em si, de modo encapsulado, diversos *parti pris* que não são transmitidos aos alunos. Poderíamos mesmo afirmar que ela é produto de um processo de alienação operado no ensino: parte-se dos objetos já dados, sem mostrar de onde eles vêm e por que se deve aprender a resolvê-los. Resta aos alunos perguntar "pra que serve?". Com esta pergunta, os estudantes querem dizer que os objetos da matemática não fazem sentido para eles. Mas eles não teriam sido feitos para isso, para esconder seu processo de constituição? O que explicaria seu poder mítico, mas também seu enorme potencial para despertar a antipatia dos alunos.

Para Foucault, a razão de existir dos objetos matemáticos é esconder os processos da prática histórica que levaram até a sua constituição como objetos. Daí a impressão de que se tratam de entidades transcendentais. Podemos traduzir esta posição dizendo que os objetos da matemática são opacos. Transparentes no que tange à sua relação com o mundo, com o visível, e opacos na dissimulação do processo histórico que levou à sua constituição como um objeto. Nosso objetivo aqui será discutir, por meio do exemplo da equação, o papel da história da matemática em desmontar esta trama.

Começaremos desenvolvendo um pouco mais as ideias da *Arqueologia do Saber* e sua possível utilização na matemática. Foucault afirma que o método arqueológico não se aplica à matemática, mas no livro *Langage, visibilité, différence*, Lucien Vinciguerra[8] desafia esta conclusão e propõe exemplos históricos nos quais a matemática pode ser entendida como um discurso, no sentido proposto por Foucault.

Em seguida, analisaremos com mais detalhes o exemplo específico da equação, mostrando como a história da matemática, vista pela perspectiva de historiografias mais recentes, não corrobora a tese de um desenvolvimento linear que culmina com a equação enunciada em nossos termos. Estes episódios podem ajudar, portanto, a desfazer a opacidade da equação, permitindo vislumbrar saberes que não se identificam ao modo como concebemos a matemática atualmente.

O papel de tal abordagem para o ensino seria, assim, mostrar que a opacidade é uma construção particular à nossa matemática e ao tipo de formalização da qual ela decorre. Isto implicou em uma escolha por deixar de lado outras práticas, outros saberes que podem possuir, até mesmo, cientificidades diferentes da nossa. Entender estas matemáticas teria a função de trazer um sentido para os objetos de nossa matemática, que poderiam ser exibidos como uma criação singular, essencialmente distinta de práticas desenvolvidas em outros momentos históricos.

Existe uma história arqueológica da matemática?

Para Foucault, uma ciência se constitui enquanto tal a partir de diferentes limiares. Um limiar de epistemologização, a partir do qual um conjunto de enunciados se delineia e busca fazer valer normas de verificação e de coerência (ainda que sem sucesso). Um limiar de cientificidade para além do qual os enunciados que constituem esta figura epistemológica passam a obedecer a certo número de critérios formais, como leis de construção das proposições. Um limiar de formalização que, quando transposto, permite ao discurso científico definir os axiomas que lhe são necessários e as estruturas proposicionais legítimas, bem como prescrever as transformações que seu edifício formal comporta. Estes limiares permitem formas distintas de análise histórica.

A história da matemática tradicional é aquela que se dedica a analisar o que ocorreu uma vez transposto o limiar de formalização. Trata-se, quase sempre, de uma história retrospectiva feita do interior de uma ciência constituída, que reproduz uma visão cumulativa do desenvolvimento científico. O historiador aqui é, por definição, um matemático (ainda que não o seja por profissão), pois ele se localiza no interior da matemática constituída, com uma identidade como ciência. Uma análise histórica distinta é aquela que se situa no limiar de cientificidade e se interroga sobre a maneira pela qual ele pôde (ou não) ser transposto. O historiador, nesse caso, se propõe a investigar os processos dos quais teve que se libertar para virar ciência. Logo, ele deve esquecer, em certa medida, a matemática que conhece, pois ela será usada somente como termo de comparação, permitindo que se enxergue como a matemática se estabeleceu acima e contra um nível, tido como pré-científico, que tanto a preparava quanto resistia a seu avanço.

Mas há um terceiro tipo, que toma como ponto de ataque o limiar de epistemologização, o ponto de clivagem entre formações discursivas e figuras epistemológicas que ainda não são ciência (e que talvez nunca cheguem a sê-lo). Nesta história arqueológica, a cientificidade não serve como norma (nem de comparação). O objetivo seria mostrar como as práticas discursivas podem ter se transformado (em dado momento histórico) para dar lugar a estruturas epistemológicas que, por sua vez, podem ter servido à instauração de uma ciência. O trabalho do historiador-arqueólogo, neste último caso, começa por esquecer tudo o que ele sabe de matemática. Sua tarefa é fazer aparecer em meio a formações discursivas, figuras epistemológicas e ciências todo o jogo das diferenças, das relações, dos desvios, das defasagens, das autonomias e a maneira pela qual elas articulam suas historicidades: um campo indefinido e móvel de relações. Neste tipo de interrogação, só se acolhe o dado da ciência (matemática) a fim de perguntar o que é, para esta ciência, o fato de ser conhecida.

Para Foucault, a matemática é a única prática discursiva que transpôs de uma só vez o limiar da positividade, o de epistemologização, o da cientificidade e o da formalização. A própria possibilidade de sua existência implicava que fosse considerado, logo de início, aquilo que, em todos os outros casos, permanece disperso ao longo da história[i]. Ou seja, ela se apresenta, logo de início, como uma prática discursiva formalizada, daí o fato de sua instauração ser ao mesmo tempo tão enigmática (fechada à análise) e tão valorizada.

O método proposto na *Arqueologia do Saber* visa às ciências em sentido amplo, o exemplo da matemática é utilizado somente como contraexemplo, quer dizer, como uma formação discursiva que não se presta a uma arqueologia, uma vez que os diferentes limiares foram transpostos de uma vez.

Apesar disso, outros pensadores, como Vinciguerra, se dedicaram a explorar as possibilidades do método arqueológico na história da matemática. Um dos exemplos usados no livro *Langage, visibilité, différence* é exatamente o da equação. Para o autor, acreditamos que os signos remetem às coisas em uma transparência sem enigma; falamos de sistema simbólico, de representação ou de notação como se a evidência da linguagem tivesse o poder de expressar também o que ela torna visível. Dito de outro modo, uma equação pode dizer algo sobre o mundo visível, como acontece quando modelamos um fenômeno do mundo físico em linguagem matemática. A invenção da física matemática postula justamente que uma equação possa dizer algo sobre o mundo visível. Mas como as operações algébricas adquiriram o poder de exprimir em suas combinações uma ordem ou uma conexão entre as coisas? Como os corpos físicos em seu espaço de interações encontraram nos cálculos uma representação que permite que eles se exprimam em uma linguagem algébrica?

Como observa Vinciguerra, até a época moderna, havia uma distância entre a linguagem e o visível e, quando ambos se aproximavam, era preciso explicar as razões desta aproximação. Mas na época moderna, nos momentos que reconhecemos como grandes momentos da história da ciência, como na física cartesiana ou newtoniana, assistimos a uma operação silenciosa de não atravessar as evidências, não ousar inspecionar por debaixo dos conceitos dados como tais, ou seja, das equações e das representações. Forneceu-se, assim, à linguagem o poder de dizer a verdade inscrita nos corpos e no movimento, eclipsando a distância entre a linguagem e a visibilidade das coisas, ou seja, entre o dizível e o visível. A este fenômeno, inscrito em um tempo determinado, Vinciguerra chama de *transparência*: a crença de que os signos remetem às coisas sem distância, sem enigma.

Analisaremos em seguida, em seu contexto histórico, alguns problemas que poderiam ser, hoje, representados por meio de equações. No entanto, de modo distinto dos relatos tradicionais, não reportaremos estes discursos ao conhecimento que temos hoje sobre as equações. A arqueologia, como propõe Foucault, "não espreita o momento em que, a partir do que ainda não eram, tornaram-se o que são". O problema dela é "definir os discursos em sua especificidade; mostrar em que sentido o jogo das regras que utilizam é irredutível a qualquer outro"[10].

Eclipsar a distância entre a linguagem e o fenômeno é uma operação associada a um limiar de formalização, que foi ultrapassado em épocas bastante recentes. As práticas aqui analisadas podem ser consideradas saberes, no sentido de Foucault, e devem ser compreendidas sem recurso ao momento posterior de formalização. Deste modo, ainda que permaneça aberta a questão se podemos designá-las como outras matemáticas, elas constituem uma prática discursiva, com regras que designam quando se podem formar grupos de objetos, conjuntos de enunciações e escolhas teóricas; elementos que podem, ou não, constituir uma ciência.

Um estudo de caso: a equação

Tomaremos três momentos do que poderíamos chamar de uma história das equações, mas para mostrar, na verdade, que não se trata de uma mesma história[11]. Não exibiremos como se construiu a crença de que estes três momentos podem integrar uma mesma história, mas daremos indicações de que não há evidências para se acreditar que seriam todas instâncias de uma mesma matemática, a nossa.

Primeiro momento: um problema babilônico

Este exemplo se encontra na coleção do British Museum, placa BM 13901. Lembramos que, neste momento, está em uso um sistema de numeração sexagesimal. O problema #1 foi traduzido como segue por Otto Neugebauer, um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções dos textos matemáticos babilônicos[12]:

Procedimento: "Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?"

Solução:

(i) tome 1

(ii) fracione 1 tomando a metade (:0,30)

(iii) multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)

(iv) some 0,15 a 0,45 (:1)

(v) 1 é a raiz quadrada de 1

(vi) subtraia os 0,30 de 1

(vii) 0,30 é o lado do quadrado

Cada passo do procedimento era executado com a ajuda de um tablete, por exemplo, a etapa (iii) exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrado e a etapa (v), evidente neste caso particular, era resolvida pela consulta a um tablete de raízes quadradas.

Dado o enunciado do problema, nosso impulso quase automático, é traduzi-lo na equação $x^2 = x = 0,45$.

O problema poderia então ser resolvido pelo nosso método de resolver equações. Por esta razão, este modo de enunciar o procedimento babilônico levou historiadores como Neugebauer[13] e Bartel Leendert van der Waerden[14] a conjecturarem que a matemática babilônica seria de natureza algébrica.

Se temos uma equação do tipo $Ax^2 + Bx = C$, substituindo A, B e C por valores numéricos, o roteiro babilônico descrito a seguir seria um modo particular de encontrar a raiz $L = \left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \times \frac{1}{A}$.

1) Multiplique A por C (obtendo AC)

2) Encontre metade de B (obtendo $\frac{B}{2}$)

3) Multiplique $\frac{B}{2}$ por $\frac{B}{2}$ (obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2$)

4) Adicione AC a $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ (obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC$)

5) a raiz quadrada é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC}\right)$

6) Subtraia $\frac{B}{2}$ da raiz acima

7) tome o recíproco de A (obtendo $\frac{1}{A}$)

8) Multiplique $\frac{1}{A}$ pela raiz para obter o lado do quadrado

9) o lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \times \frac{1}{A}$

Mas a partir dos anos 1990, as primeiras traduções começaram a ser criticadas[15] por outros historiadores da matemática, como Eleanor Robson[16] e Jens Høyrup. Este último mostrou que as traduções iniciais já pressupunham, implicitamente, a natureza algébrica da matemática babilônica e, recorrendo às fontes originais, propõe novas traduções, que podem nos levar a conclusões bastante distintas. Traduzimos para o português, com algumas simplificações, a nova tradução do mesmo exemplo, proposta por Høyrup[17]:

Procedimento: "A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45" (Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação- o lado da superfície, que é um quadrado).

Solução:

(i) 1 é a projeção

(ii) quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15 ($0{,}30^2 = 0{,}15$)

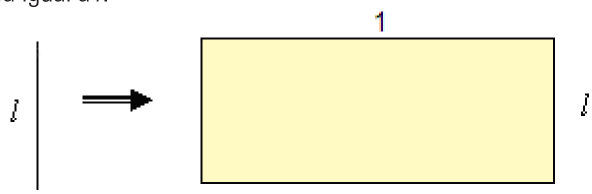
(iii) agregue 0,15 a 0,45

(iv) 1 é o lado igual

(v) retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve

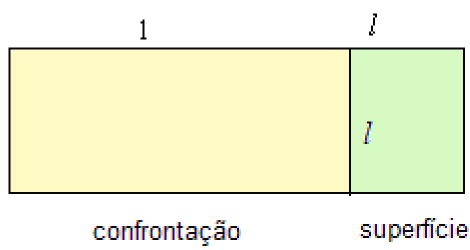
(vi) 0,30 é a confrontação.

Esta versão motiva uma nova interpretação do procedimento, de natureza geométrica. Em primeiro lugar, faz-se uma projeção de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, suponhamos *l*, concretamente como um retângulo de lados 1 e *l*. Os babilônicos transformavam, por meio de uma projeção, esta linha de comprimento *l* em um retângulo com um lado dado por *l* e o outro medindo 1. Ou seja, eles projetavam o lado *l* para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a *l*.



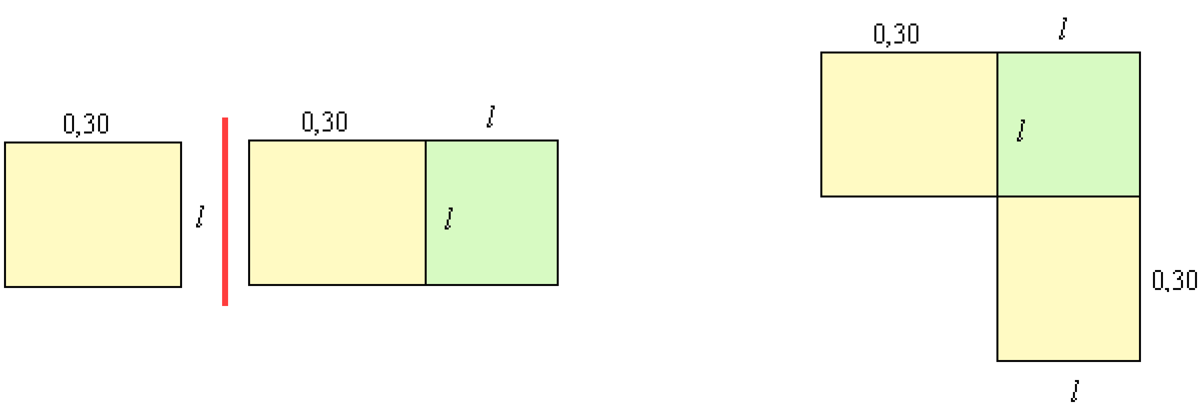
Passo (i): Projeção do lado *l*.

Na figura abaixo, temos um retângulo de lados 1 e *l* e um quadrado de lado *l*. Esta figura será "cortada e colada" com o fim de se estabelecer uma equivalência entre medidas de áreas que resolva o problema.



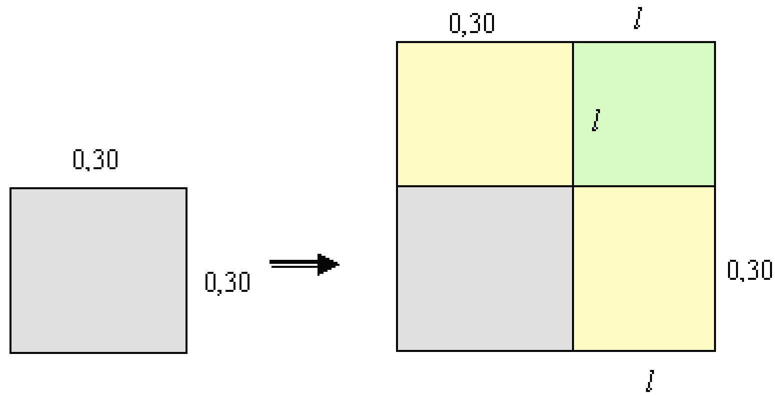
Enunciado: A superfície e a minha confrontação acumulei.

No passo (ii), quebramos 1 na metade, o que divide o retângulo inicial em duas partes. Rearrumando as duas metades do retângulo, obtemos a figura abaixo, cuja área é igual à área dada inicialmente (0,45).



Passo (ii): Quebre 1 na metade.

Os lados quebrados, na figura em forma de L acima, delimitam um quadrado de lado 0,30 que "retenho", ou seja, multiplico por ele mesmo, obtendo a área de um novo quadrado (0,15). Esta área pode ser agregada ao conjunto, completando o quadrado e formando um quadrado maior de área 1.



Passos (iii) e (iv): Retenha 0,30 e agregue o resultado a 0,45. O quadrado maior tem área 1 e lado 1.

Como 1 é o quadrado de 1, 1 é o lado igual. Deste lado, retiro o lado do quadrado menor (0,30). Obtemos, assim, que o lado procurado é 1 – 0,30 = 0,30.

É importante observar que este lado é chamado "confrontação" e o enunciado do problema pede para acumular uma área e uma confrontação. Ou seja, queremos somar a área de um quadrado com o seu lado, que seria a confrontação da área. Para efetuar esta operação, vimos que os babilônicos transformavam esta linha em um retângulo, por isso o lado é uma confrontação (da área).

Temos evidências de que em diversos momentos da história da matemática, principalmente na época grega, a geometria teve que respeitar a homogeneidade das grandezas. Isto quer dizer que não se somava uma área com um segmento de reta. O procedimento babilônico mostra que esta matemática não seguia este princípio, uma vez que havia um procedimento concreto para transformar um segmento de reta em um retângulo: aquele que foi traduzido aqui como "projeção". Høyrup conclui que houve uma fase da matemática babilônica em que eram considerados segmentos com espessura, substituídos pelos retângulos descritos aqui em escritos posteriores, pertencentes a uma tradição de formação de escribas. Exemplos como este, envolvendo operações de "cortar e colar" figuras geométricas, parecem ter sido comuns na época.

Apesar de ser bastante plausível a hipótese de que as técnicas dos mesopotâmicos para resolver problemas aritméticos usassem procedimentos geométricos de cortar e colar, seria precipitado concluir que, ao invés de uma álgebra, estes povos tivessem uma geometria. O que este exemplo nos ensina é que devemos ter cuidado ao aplicar as definições disciplinares que usamos hoje para caracterizar a matemática antiga.

Atualmente, o problema do exemplo poderia ser resolvido por uma equação do segundo grau, mas esta associação exige o uso de símbolos que não faziam parte da matemática de que tratamos aqui. Logo, não haveria sentido falar em algo próximo do que concebemos como "equação" se as quantidades desconhecidas não eram representadas por letras, mas designavam comprimentos, larguras e áreas dadas por números. A introdução da notação simbólica não é uma mera representação, em outra linguagem, de uma mesma forma de pensar, ela traz pressupostos importantes, que nunca ficam claros em nossa prática matemática, e ainda menos no ensino.

O exemplo serve para mostrar que existe uma matemática coerente, sem o uso da notação algébrica. O método aqui consiste de procedimentos geométricos aplicados a números considerados como grandezas geométricas. Se definíssemos álgebra como um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados a entidades matemáticas abstratas, poderíamos até concluir que os babilônicos realizavam uma álgebra de comprimentos, larguras e áreas. Mas neste caso, deveríamos ter o cuidado de definir a álgebra dos babilônicos de um modo particular, e não por extensão do nosso conceito moderno de álgebra.

Segundo momento: a álgebra árabe

Na historiografia tradicional[18], a matemática árabe é considerada, sobretudo, pelo seu papel de tradução da matemática grega e de transmissão desta tradição para a Europa. Por meio dos trabalhos árabes, as obras gregas teriam chegado ao Ocidente e sido traduzidas para o latim no final da Idade Média. O período do Renascimento teria podido, assim, desfrutar da influência grega e lançar os primeiros passos para o desenvolvimento da matemática na forma como a conhecemos atualmente. Este recorte histórico deixa a impressão de que somos os legítimos herdeiros dos gregos e os árabes não tiveram uma contribuição original para a matemática.

Atualmente, esta versão vem sendo desconstruída[19]. Após terem se apropriado das obras gregas, os matemáticos árabes expandiram seu conhecimento e o desenvolvimento da álgebra foi um fator que permitiu essa emancipação, justamente porque rompeu com a predominância do conhecimento grego. Por exemplo, a álgebra dos árabes não se restringiu à divisão entre número e grandeza, que era constituinte na matemática euclidiana.

Nos trabalhos iniciados por Al-Khwarizmi, há uma álgebra, no sentido de um estudo sistemático dos métodos para classificar e resolver equações. O próprio termo "álgebra" tem origem em um dos livros árabes mais importantes da idade média: *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarizmi[20]. A palavra *al-jabr*, ou "álgebra" em árabe, era utilizada para designar "restauração", uma das operações usadas na resolução de equações. Já a palavra árabe *al-muqabala* queria dizer algo como "balanceamento". Tratam-se, de fato, de duas etapas do método para resolver equações. Mas por que falamos de equações se não era usado um simbolismo algébrico?

A linguagem empregada por Al-Khwarizmi era exclusivamente retórica. No entanto, havia um vocabulário padrão para designar os objetos que apareciam nos problemas, sobretudo para os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples. A palavra *Mal* exprimia o quadrado da quantidade desconhecida. Na língua corrente, este termo significava "possessão", ou "tesouro", mas, como os outros, era usado por Al-Khwarizmi com um sentido técnico, no contexto da resolução de equações. Não se tratava tampouco do quadrado geométrico, designado pela palavra *murabba'a*[21]. A "raiz" é o termo essencial, designada pela palavra "*Jidhr*", mas também chamada de "coisa" ("*shay*"). As duas palavras eram empregadas para exprimir o que atualmente chamamos de incógnita. O emprego do termo "raiz" para designar a quantidade desconhecida está estreitamente ligado ao fato de que o quadrado desta quantidade era também uma incógnita, com nomenclatura própria, o *Mal*. Já o *Adad* era um número dado qualquer, ou seja, a quantidade conhecida[22].

Vale destacar que a palavra "coisa" era utilizada para enfatizar a condição de incógnita, pois, em árabe, esta palavra está associada a uma "indefinição" ou "indeterminação". Uma vez que, no trabalho de Al-Khwarizmi, a incógnita designava objetos de uma natureza qualquer, a escolha da palavra "coisa" pode revelar a preocupação em elaborar um procedimento que pudesse ser aplicado tanto aos números quanto a grandezas geométricas. Este relaxamento da distância entre grandeza e número foi fundamental para a criação de um novo domínio (a álgebra), que não estava contida nem na geometria, nem na aritmética. Justamente por isso, podemos dizer que havia uma álgebra, ainda que o termo não tenha o sentido disciplinar que usamos hoje em dia. Tratava-se de uma álgebra diferente da nossa.

Depois de mostrar como efetuar as quatro operações sobre expressões contendo quantidades desconhecidas e radicais, Al-Khwarizmi passa à enumeração dos seis problemas possíveis, enunciados de modo retórico:

1) quadrados iguais a raízes
2) quadrados iguais a um número
3) raízes iguais a um número
4) quadrados e raízes iguais a um número
5) quadrados e um número iguais a raízes
6) raízes e um número iguais a quadrados

Em notação simbólica, usada atualmente, estes tipos podem ser traduzidos como:

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $bx = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $bx + c = ax^2$

Uma tradução deste tipo não é neutra. Ela implica uma naturalização da notação simbólica que nos levaria a interpretar os procedimentos árabes como exemplos primitivos de nosso método para resolver equações. Mas estes seis tipos não eram vistos como casos particulares de uma equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, como entendemos hoje em dia. Esta enunciação admite implicitamente que *a*, *b* e *c* são quantidades arbitrárias e os casos são instâncias numéricas particulares destes símbolos. O procedimento de Al-Khwarizmi era muito distinto.

Cada caso era tratado a partir de exemplos, mas o método devia servir para um exemplo numérico qualquer dentro daquele caso. Não se tratam, assim, de métodos particulares, que só valem para o exemplo em questão. Para cada caso, enunciavam-se regras de solução e justificativas geométricas que deviam servir para qualquer exemplo dentro daquele caso. Logo, há uma preocupação com a generalidade, ainda que distinta da que conhecemos em nossa álgebra simbólica.

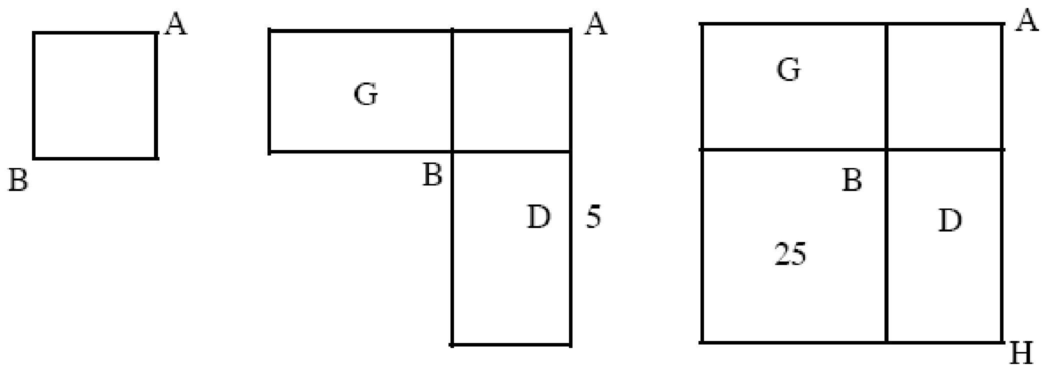
Para o quarto caso, Al-Khwarizmi considera o exemplo "um *Mal* e dez *Jidhr* igualam trinta e nove denares". O algoritmo de resolução era descrito do modo seguinte:

- tome a metade da quantidade de *Jidhr* (que neste exemplo é 5);
- multiplique esta quantidade por si mesma (obtendo 25);
- some no resultado os *Adad* (fazemos 39+25=64);
- extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8);
- subtraia deste resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução (esta solução é 8-5=3).

Em nossa notação algébrica, o exemplo seria representado como $x^2 + 10x = 39$. Traduzindo o procedimento em linguagem algébrica atual teríamos que a solução de uma equação do tipo $x^2 + bx = c$ é dada por $-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$. Esta equivalência, estabelecida *a posteriori*, fez com que muitos historiadores vissem na álgebra árabe uma instância primitiva da história da equação e de sua fórmula de resolução. Quando traduzidas em notação simbólica, as técnicas árabes são equivalentes à fórmula para resolução de equações do segundo grau. Mas não podemos dizer que os árabes possuam uma "fórmula", pois isto supõe: 1. representarmos simbolicamente as incógnitas e as operações que estão contidas em uma equação; e 2. a equação do segundo grau passar a ser considerada de modo genérico, ou seja, com todas as parcelas possíveis e coeficientes indeterminados.

As características 1 e 2 não estavam presentes na álgebra árabe. Mas isto também não quer dizer que se tratava de uma forma primitiva de álgebra. O método árabe é bem diferente da nossa fórmula, em particular por tratar cada um dos seis casos separadamente, de modo retórico. Mas estes procedimentos integravam uma matemática plenamente desenvolvida, pois composta de um conjunto de práticas justificadas, que exibiam uma preocupação com a generalidade e a aplicabilidade de seus procedimentos. Ainda que *justificativa* e *generalidade* não tivessem o mesmo significado que possuem na nossa matemática.

Depois de descrever o procedimento de resolução, Al-Khwarizmi acrescenta: "A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos". Deve-se construir um quadrado de diagonal AB que representa o *Mal*, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais G e D cujos lados são a raiz e 5, metade de 10. A figura obtida é um *gnomon* de área 39. Completando esta figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área 64 (39+25). O lado AH deste quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é 3 (8-5).



Essa construção geométrica reproduz exatamente o procedimento de resolução e demonstra a necessidade de completar o quadrado na solução algébrica. Al-Khwarizmi identificava o lado do quadrado geométrico à raiz do quadrado algébrico, com o objetivo de explicar a divisão do número de *Jidhr* em duas metades. Esta justificativa geométrica não servia para garantir a verdade do algoritmo, mas para explicar a sua causa: a necessidade de completar o quadrado. Esse papel para uma argumentação geométrica é totalmente novo na época.

É curioso observar que a equivalência de áreas, suposta no procedimento acima, é explicitada pela proposição II.4 dos *Elementos* de Euclides. Contudo, apesar desta obra já ter sido traduzida na época de Al-Khwarizmi, ele nunca a menciona explicitamente, o que pode indicar um desejo de se distanciar da tradição.

Mesmo que fosse exposto para um exemplo particular, o método descrito por Al-Khwarizmi permitia tratar qualquer exemplo dentro de um caso determinado. Identificada a sua classe, o problema seria resolvido pelo procedimento adequado à sua categoria. Sendo assim, para aplicar o método algébrico a situações concretas, era necessário reduzir um problema qualquer a um dos casos. Este é o papel dos procedimentos de "restauração" (*al-jabr*) e "balanceamento" (*al-muqabala*).

Podemos identificar, no conjunto destes procedimentos, diversas técnicas presentes em outros momentos históricos. Operações equivalentes às de *al-jabr* e *al-muqabala* eram conhecidas na época de Diofanto e a resolução de problemas de segundo grau já era praticada na matemática mesopotâmica e indiana. Mas nenhuma destas influências pode ser verificada diretamente nos primeiros tratados de álgebra árabe, o que também não quer dizer que estes escritos sejam absolutamente originais. As práticas algébricas dos árabes possuem conexão com os métodos babilônicos e indianos, mas é difícil encontrar evidências que testemunhem influências diretas destas culturas. Os matemáticos indianos usavam abreviações e símbolos para as operações. Al-Khwarizmi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos semelhantes aos utilizados na Mesopotâmia, mas não usava simbolismo.

Nem Bhaskara, nem outro matemático indiano, nem Al-Khwarizmi, nem outro árabe inventou a fórmula para resolução da equação de segundo grau, apesar de todos eles saberem resolver o análogo a uma equação deste tipo nos termos da matemática de seu tempo. A fórmula só pôde ser escrita depois de se ter introduzido um simbolismo para os coeficientes. Quem teria sido, afinal, o real inventor da fórmula de resolução das equações do segundo grau, atribuída erroneamente a Bhaskara[23]?

Esta pergunta é bastante frutífera para desconstruirmos algumas concepções equivocadas sobre a história da matemática. Às vezes pensamos que a matemática evoluiu de modo linear: os matemáticos, em certo momento, teriam disponível uma obra matemática inacabada e deveriam ir preenchendo as suas lacunas. As práticas aqui descritas não são instâncias de uma história universal da equação e de da fórmula para resolvê-la, mas integram diferentes matemáticas, em épocas distintas, cujas interações não são solidamente conhecidas.

Terceiro momento: a Arte Analítica de Viète

O que muda nas regras retóricas para a resolução de equações de segundo grau quando introduzimos símbolos para as quantidades desconhecidas? Quando se dizia "tomar a metade do número de *Jidhr*", ao substituirmos *Jidhr* por x, temos: "tomar a metade do número de x". O mesmo para o *Mal*, quantidade desconhecida que é o quadrado de x mas que seria, dentro desta lógica, designada por outro nome, como y.

Reunindo a generalidade das regras indianas e árabes a todos os simbolismos usados até então, poderíamos obter algo como:

Seja a equação $A + 21 = 10B$, onde A é o quadrado de B. Para qualquer número que substituirmos por 21 e 10 na equação, o valor de B (que é a raiz da equação) pode ser obtido pelo procedimento: tomar a metade do número de B's (note que aqui não estamos falando de B/2, mas da metade do número que multiplica B, que nesta equação é 10, mas pode mudar de uma equação para outra); multiplicar o resultado por si mesmo; subtrair do resultado o número (que na equação é 21, mas também pode mudar de uma equação para outra).

O passo decisivo para que possamos transformar esta regra em uma fórmula, tal como conhecemos hoje, será a introdução de um simbolismo para os coeficientes da equação, ou seja para o número de B's. Isto permitiria escrever algo como $A + m = nB$. Com a introdução destes símbolos, podemos entrever, diante somente do símbolo, a relação entre A e B, que é o que temos quando escrevemos $A + m = nB$. Os três primeiros passos do procedimento descrito acima se resumiriam, então, à fórmula: $(n/2)^2 - m$.

François Viète introduziu uma representação padrão para os "coeficientes" de uma equação, mas ainda assim a fórmula não era sua principal preocupação, como veremos adiante. Ele propõe que as incógnitas sejam representadas pelas vogais e os coeficientes, pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas.

É importante observar que há uma diferença de natureza fundamental entre uma "incógnita" e um "coeficiente". A incógnita é uma quantidade que está desconhecida e que será conhecida a partir das restrições representadas pela equação, já o coeficiente é uma quantidade conhecida genérica que está, portanto, indeterminada na expressão de uma equação qualquer. Ambos os casos pressupõem indeterminações, mas em níveis distintos: a determinação dos coeficientes é obtida pela escolha de uma equação particular (arbitrária) e a determinação do valor da incógnita, pela resolução (não arbitrária) desta equação. Sendo assim, no universo das equações, a escolha arbitrária de coeficientes determina uma equação. Já a determinação da incógnita depende das restrições dadas por uma equação.

A notação introduzida por Viète poderia ter representado, portanto, uma generalização dos métodos algébricos, que permitiria classificar as equações tratadas anteriormente como "casos". Este não era, contudo, o interesse de Viète e seus contemporâneos.

A obra publicada em 1591, que em latim se chama *In Artem Analyticem Isagoge* (*Introdução à Arte Analítica*) é o primeiro de dez tratados que formam a sua *Opus restituta Mathematica Analyseos, Seu, Algebra nova* (*Obra de Análise Matemática Restaurada, ou, Álgebra Nova*)[24]. Neste título a palavra que chama atenção é "*restituta*", levando-nos a acreditar que Viète queria "restaurar" a análise dos antigos. Dando sequência à *Isagoge*, Viète apresentou os *Cinco Livros das Zetéticas*, nos quais aplica sua arte analítica a 82 problemas que são, em sua maioria, análogos aos estudados por Diofanto na *Aritmética*.

O método da análise já era usado na geometria grega, mas sem o auxílio da álgebra. A análise consistia em um modelo típico de argumentação, que começa pela suposição (hipotética) de que alguma coisa que não é realmente dada

– e que se deseja obter – seja, de fato, dada. Alguns matemáticos do século XVI, como Viète, e mesmo Descartes no século XVII, acreditavam que os gregos omitiam, na maioria das vezes, a parte referente à análise das resoluções dos problemas. Para os antigos, a análise seria um método de descoberta, e não de demonstração.

No exemplo de uma equação algébrica, como definir a "análise". A incógnita, ou o x, é a quantidade desconhecida. Quando escrevemos $x + 2 = 3$, tratamos o x como se fosse conhecido e operamos com esta quantidade da mesma forma que fazemos com o 3 e o 2 que são, efetivamente, números conhecidos. Com esta manipulação, fazemos $x=3-2=1$ e encontramos o valor da quantidade desconhecida. Operamos, neste exemplo, com as quantidades procuradas, como se elas já estivessem dadas. Se quiséssemos resolver o problema de encontrar duas grandezas com soma e produto dados pelo método analítico, começaríamos supondo que estas grandezas, que procuramos, são dadas, e podem ser chamadas de x e y. Em seguida, por manipulações algébricas, encontraríamos os valores reais de x e y.

Na *Arte Analítica,* Viète propunha usar a análise, agora identificada à ferramenta algébrica, para resolver problemas geométricos. Os problemas planos dão lugar a equações de segundo grau, e os outros fazem surgir equações de grau mais elevado. Resolver equações algébricas, por métodos algébricos, servia como auxiliar na construção geométrica de soluções para os problemas geométricos. O objetivo de Viète era mostrar que a álgebra podia ser útil aos problemas de construção que tinham ocupado os gregos, uma vez que pretendia fundar uma nova álgebra, com o mesmo prestígio da geometria[25].

Foi para alcançar este objetivo que ele inventou o que chamou de *logística speciosa*, que era vista como uma ciência nos padrões gregos. A arte analítica propunha manipular grandezas independentemente da sua natureza. Por esta razão, foi preciso criar procedimentos simbólicos de cálculo que pudessem ser aplicados tanto a grandezas geométricas, quanto a quantidades numéricas. Um único símbolo devia poder representar todos os tipos de grandezas. Por exemplo, para manipular uma equação $BA^2 + CA = D$, não importa se a quantidade desconhecida A seja um número ou um segmento de reta.

Albert Girard, que foi aluno de Viète e prolongou suas reflexões sobre a álgebra, já afirmava que: "Para resolver uma questão, é preciso recolocá-la como questão sobre números abstratos, sem falar (se se puder) de matéria, como de escudos, pés etc."[26].

Ao fundar um cálculo para todos os tipos de grandeza (numérica ou geométrica; conhecida ou desconhecida), seria possível resolver todos os problemas. A álgebra, como ferramenta essencial da análise, não era uma técnica concernindo números, mas um cálculo simbólico de quantidades não especificadas. Os procedimentos simbólicos de cálculo deviam se aplicar a grandezas independentemente de sua natureza. Com este propósito, ele introduziu letras para simbolizar grandezas indeterminadas, bem como grandezas desconhecidas. Viète falava de grandezas 'em espécie', em forma ou em tipo, chamando sua nova álgebra de 'cálculo a respeito de formas', ou 'a respeito de espécies': também usou o termo '*logística speciosa*'[27].

O simbolismo tem como objetivo fundar um procedimento único para operar com números e grandezas. Mas que problemas geométricos propomos resolver quando ensinamos equações? E aqui não estamos falando de curvas ou funções representadas simbolicamente, mas de equações determinadas, que envolvem somente uma quantidade desconhecida, e que foram estudadas por Viète e muitos de seus contemporâneos para a construção de soluções para problemas geométricos.

A *logistica speciosa* trata de classes ou de "espécies" de equações. Este método se opõe ao modo como os problemas eram tratados anteriormente pela *"logistica numerosa"*, que dependia de números particulares. Na *logistica speciosa*, alguns fatos importantes que eram mascarados pela particularidade dos números, tornam-se mais gerais.

Viète enunciou, então, axiomas envolvendo operações sobre símbolos, como adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raiz e a formação de razões. Mas a lei da homogeneidade das grandezas exigia regras especiais de cálculo: as grandezas lineares só podiam ser somadas ou subtraídas de grandezas lineares, o mesmo valendo para grandezas quadradas ou de qualquer grau.

Ele simbolizava as potências usando uma mesma letra: se *A* é a incógnita seu quadrado é dito *A quadratum*, o cubo *A cubum*, e assim por diante. Se chamarmos *x* de *A*, a equação $x^2 + b = cx$ (significando área+área=área) seria escrita, na notação de Viète, como *A quadratum + B aequatur C in A* (*aequatur* quer dizer "igual"). Na verdade, esta equação era escrita adicionando a palavra "*plano*" depois de *B*, uma vez que todas as parcelas devem possuir as mesmas dimensões, o que daria: *A quadratum + B plano aequatur C in A* (observando que *C in A* já era plano, pois resultado da multiplicação de dois segmentos). De modo análogo, um número a ser igualado a um cubo era dito *"solido".* O modo como Viète designava as potências trazia a marca geométrica, pois as incógnitas eram escritas como *A*, *A quadratum* e *A cubum* e não eram consideradas como tendo a mesma natureza.

A equação, neste contexto, é um objeto simbólico, mas são necessárias regras para tornar os cálculos consistentes com aquilo que eles representam, no caso, as grandezas geométricas. Vemos assim que a transparência citada por Vinciguerra ainda não está presente aqui, pois há uma separação nítida entre o que a equação enuncia e o que ela dá a ver, o dizível e o visível.

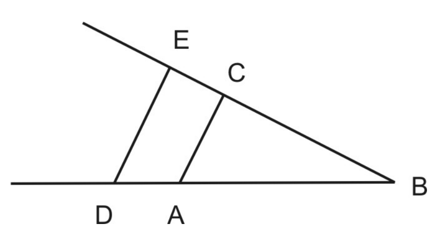
Mais do que uma coleção de resultados, a *Arte Analítica* pode ser vista como um programa de pesquisa do final do século XVI e início do XVII. Diversos outros trabalhos procuravam ampliar a aplicação de suas técnicas à resolução de problemas variados, traduzindo os problemas, estudados por meio da análise dos antigos, para a linguagem simbólica proposta pela arte analítica. Os trabalhos de Descartes e Fermat, que irão renovar a geometria, também se inserem nesta tradição.

Quarto momento: as grandezas em Descartes

Um dos objetivos principais da Geometria de Descartes[28], publicada em 1637, é associar retas a uma determinada curva para descrever, usando proporções, as propriedades desta curva. Trata-se de determinar certa curva a partir de uma proporção entre segmentos de reta por meio de uma equação algébrica. Para Descartes, a extensão deve ser conhecida por meio de relações, como a proporção, e o objetivo da nova geometria será estudar figuras usando proporções. Ao traduzir os problemas geométricos em linguagem algébrica, podemos compreender melhor as relações entre as grandezas do problema. Logo no início da Geometria, Descartes propõe a utilização do método analítico e, quando é possível expressar uma única quantidade de dois modos, temos uma equação.

Dar nomes às linhas da figura, tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas, era a proposta de Viète. Descartes queria utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, onde regras simples de composição levassem objetos simples a outros mais complexos.

Na abertura do primeiro livro da Geometria, Descartes se refere às cinco operações básicas da aritmética e mostra que estas operações correspondem a construções simples com régua e compasso. No exemplo abaixo, tomando-se AB como unidade, o segmento BE é o produto dos segmentos BD e BC obtidos ligando-se os pontos A e C e desenhando-se DE paralela a AC.



Uma consequência deste procedimento é que o produto dos segmentos BD e BC pode ser visto como um segmento BE, o que não podia acontecer na geometria euclidiana, na qual o produto de dois segmentos devia ser visto, necessariamente, como um retângulo, ou seja, como uma figura de natureza distinta de um segmento de reta. Suponhamos, por exemplo, que BA = 1 e BD = a e marquemos C de modo que BC = b. Temos que $\frac{a}{1} = \frac{\boldsymbol{B}}{b}$, logo BE=ab, produto de BD e BC (notem que aqui já podemos usar o produto dos meios e dos extremos, uma vez que estamos operando com números, e não mais com grandezas). Podemos também marcar o ponto C de modo que BC = a e, neste caso, BE = a^2. Temos assim uma potência quadrada que não é associada a um quadrado, mas a um segmento de reta. Procedimentos deste tipo permitirão vencer o problema da homogeneidade das grandezas que estava presente na geometria euclidiana, mas também na arte analítica de Viète.

Isto foi possível pela escolha de um segmento de reta arbitrário considerado a "unidade". A partir daí, o produto de dois segmentos pôde ser interpretado como outro segmento, e não mais necessariamente como a área de um retângulo. Este segmento produto era construído pelo procedimento exposto, que traz uma visão inovadora para a geometria, pois não respeita a homogeneidade das grandezas, operando com elas como se fossem números. Isto implica uma mistura entre gêneros tidos tradicionalmente como distintos, a aritmética e a geometria.

Este pressuposto, um dos principais para que o objeto equação possa ser manipulado e aplicado a problemas diversos, fica escondido por detrás do enunciado da equação em termos simbólicos. O processo constitutivo e o que se assume como válido para que o objeto possa ser apresentado como tal são mascarados na opacidade da equação.

Em busca de um sentido para as equações

Os quatro momentos analisados estariam ao alcance de um estudante do Ensino Básico. Mas qual a função de ensinar essas outras maneiras de se fazer matemática se é mais prático usar as nossas equações? Para nós, a história poderia sensibilizar alunos e professores para que enxerguem claramente os pressupostos que o objeto equação mascara. Diferentes problemas, em épocas distintas, explicam e mostram a necessidade do desenvolvimento de práticas matemáticas diferentes da nossa. Por que a equação, expressa em sua linguagem simbólica, deve ser aceita como um objeto a ser resolvido? Que relação este objeto mantém com as situações que representa? A enunciação que este objeto exibe é neutra?

A discussão destas questões pode dar sentido ao objeto equação. Os alunos clamam para que a matemática seja ensinada de modo mais concreto. Mas tornar a matemática mais concreta não precisa passar, necessariamente, por aproximá-la de atividades quotidianas como ir à feira, interpretar um gráfico, ou analisar as formas geométricas da natureza. A matemática se modificou também por necessidades que não possuem nenhuma relação com o senso comum ou com os fenômenos naturais. É claro que o trabalho matemático sofre influências de fatores externos (sejam eles sociais, políticos ou outros), mas estes fatores compõem o que chamamos de "campo de problemas", o qual é constituído também por necessidades internas à própria matemática, ou a campos de saberes correlatos (como a física). O ponto de vista histórico permite aproximar professores e alunos do fazer matemático, sem que eles sejam obrigados a tomar como ponto de partida os traços que adquiriram ao ultrapassar os limiares de cientificidade e formalização.

Tinne Hoff Kjeldsen e Morten Blomhøj[29] usam a categoria de "regras metadiscursivas" para descrever experiências de ensino usando a história. A matemática seria um discurso, no sentido proposto por Anna Sfard em *Thinking as Communicating*[30] com inspiração foucaultiana, mas defendendo um conceito de discurso, a nosso ver, distinto daquele proposto por Foucault, pois excessivamente baseado na comunicação. Discursos seriam os diferentes tipos de comunicação que algumas pessoas, em conjunto, possuem. O discurso matemático é um tipo particular de discurso, no qual o participante aprende novos usos para palavras como losango, potência, ou aprende termos que nunca tinha utilizado, como metade, menos dois etc; e a aprendizagem é o processo de tornar alguém capaz de se comunicar matematicamente. Segundo Sfard, a matemática é uma forma bem definida de comunicação ou um tipo de discurso governado por determinadas regras. Estas regras estão em dois níveis distintos: no nível do objeto; ou no nível metadiscursivo. As primeiras dizem respeito às propriedades dos objetos matemáticos em si mesmos; ao passo que as regras metadiscursivas se voltam para o discurso matemático, para moldá-lo. Estas últimas são implícitas e possuem um caráter historicamente determinado, logo contingente. Pelo fato da matemática ter sido praticada segundo regras metadiscursivas distintas em épocas distintas, a história teria um papel-chave na explicitação de tais regras. Metarregras governam o discurso matemático, pois permitem julgar se uma determinada descrição pode ser considerada uma definição matemática, se a solução de um problema ou uma demonstração pode ser aceita como correta do ponto de vista matemático. Como as regras metadiscursivas são dadas historicamente, o papel da história está no desenvolvimento de situações de aprendizagem nas quais as metarregras são exploradas e trazidas à reflexão dos alunos. As fontes históricas desempenham, assim, o papel de interlocutores, pois levam os estudantes a conhecer e compreender o trabalho de matemáticos de outras épocas, suas visões sobre matemática, ou o modo como argumentavam. Com isso, eles poderão contrastá-las com os padrões contemporâneos, engajando-se em processos de aprendizagem em que eles se tornam cientes de suas próprias metarregras.

Nosso ponto de vista é similar, apesar de colocarmos a questão nos mesmos termos. O papel da história no ensino de matemática é, também para nós, explicitar o sistema de justificação da matemática, com o qual trabalhamos hoje, exibindo sua historicidade, ou seja, seu caráter temporal e contingente. Mas a equação, de nosso ponto de vista, não é um discurso que deve ser ensinado aos alunos para que se comuniquem matematicamente, e aqui nos separamos da abordagem de Kjeldsen e Blomhøj. Desmascarar a equação significa questionar sua opacidade, e não explicitar as metarregras que nos permitam empregar nosso próprio metadiscurso em matemática de modo mais eficiente.

Os momentos que analisamos não nos permitem dizer o que é a equação. Explicar a positividade que sua enunciação simbólica opera exigiria uma investigação da análise no século XVIII. Contentamo-nos, por ora, a explicitar o que ela não é. Expresso do modo sintético e geral que conhecemos, este objeto:

1) Não é necessário para a resolução de problemas numéricos, como o dos babilônicos, que foram resolvidos por outros métodos.

2) Não é um integrante incontornável de uma álgebra coerente, geral e bem justificada, como a de Al-Khwarizmi.

3) Não está necessariamente associado a uma fórmula de resolução, que pressupõe a simbolização dos coeficientes proposta por Viète, mas não com o fim de obter uma fórmula. A simbolização está associada a um sistema de regras para lidar com quantidades que podem perder o referente, seja ele um número ou uma grandeza geométrica.

4) Não é um dado, um objeto a ser resolvido por si mesmo. No trabalho de Viète, e sobretudo de Descartes, aquele que reconhecemos como tendo contribuído de modo decisivo para sua autonomia, a equação era uma ferramenta para a construção de soluções para problemas geométricos.

Além desses pontos, a associação de uma equação à descrição de um fenômeno físico também não é natural. Basta lembrarmos que Galileu, em seu estudo do movimento, empregou argumentos puramente geométricos, de caráter sintético[31]. As grandezas envolvidas no movimento eram representadas por diagramas e as “leis” do movimento, expressas por relações de proporção entre as grandezas geométricas representadas no diagrama. Por exemplo, ao tratar do movimento de um corpo em queda livre, ele emprega um diagrama geométrico.

Supõe-se que o tempo seja representado pela reta AB sobre a qual tomamos quaisquer dois intervalos AD e AE. A reta HI representa a distância que o corpo, começando do repouso em H, percorre com aceleração uniforme. Se HL representa o espaço atravessado durante o intervalo AD e HM é percorrido durante o intervalo AE, então o espaço HM está para o espaço HL em uma razão que é o quadrado da razão entre os intervalos de tempo AE e AD. Ou seja, deve-se mostrar que as distâncias HM e HL estão uma para outra como os quadrados de AE e AD $\left(\frac{HM}{HL}=\frac{AE^2}{AD^2}\right)$.

A partir desta proposição, Galileu pôde constatar que a constante de proporcionalidade dependia de uma aceleração igual para todos os corpos, a gravidade. Esta lei, enunciada geometricamente por Galileu, é a que escrevemos hoje como $d=\frac{g}{2}t^2$. Mas o estudo do tratamento dado por Galileu mostra que, mesmo os fenômenos físicos, estudados por meio de equações, poderiam ser descritos por matematizações de outro tipo.

Diante dos argumentos expostos, o entendimento da equação como um objeto, com sua opacidade característica, depende de diversos dispositivos. A presença destes dispositivos na matemática de hoje contrasta com sua ausência

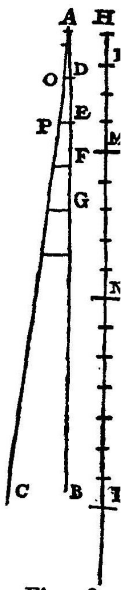


Fig. 48

em outras matemáticas. Nestas matemáticas, que fomos buscar em exemplos do passado, não encontramos as nossas práticas precarizadas, primitivas ou incompletas. Tratam-se de práticas consistentes, saberes, ou formações discursivas, no sentido de Foucault. Algumas podem, inclusive, ter ultrapassado limiares de cientificidade, com critérios próprios, sem que este movimento tenha convergido para o limiar de formalização que caracteriza a nossa matemática.

Podemos dizer que a equação é um discurso, mas não no sentido de uma linguagem, que representa leis intrínsecas à natureza. Um discurso é um sistema de signos que traz a marca de sua luta para se tornar autônomo, encapsulando as sinuosidades do percurso. Por que privar os estudantes do conhecimento deste percurso? Por que não explicitar os limiares de cientificidade e formalização que constituem a nossa matemática?

Objetos matemáticos, como a equação, trazem encapsulados os problemas que ficaram pelo caminho, no processo de sua constituição. Como o ensino parte destes objetos como dados, a história pode ter um papel fundamental em desmascarar seu percurso, exibindo os problemas que se encontram por debaixo de sua afirmação peremptória como algo a ser incorporado e resolvido.

Notas e referencias bibliográficas

Tatiana Roque é Professora da Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
E-mail: tati@im.ufrj.br.

1 Para números especiais sobre história da matemática em jornais de educação, ver FAUVEL, John (Ed.). Special Issue on History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematic.* White Rock, British Columbia*,* v. 11, n. 2, 1991, e também os artigos do v. 17, n. 1, 1997, do mesmo periódico; além de *Educational Studies in Mathematics* v. 66, n. 2, 2007.

2 Um bom exemplo está nos Anais do simpósio do grupo realizado em Viena em de 2010, ver KRONFELLNER, Manfred; TZANAKIS, Constantino; BARBIN, Evelyne. History and Epistemology in Mathematics Education, 6., 2014. *Proceedings*. Wien: Holzhauzen Publishing, 2011.

3 Só para dar alguns exemplos, citamos FAUSTMANN, Gerlinde. *Classroom experiences with the history of mathematics*; e PINTO, Hélder. The History of mathematics in the Classroom: Some Activities. In: KRONFELLNER, Manfred et al., op. cit., p. 245-58 e p. 275-86, respectivamente.

4 FRIED, Michael. History of Mathematics in Mathematics Education. In: MATTHEWS, Michael (Org.). *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*. New York: Springer, 2014.

5 SCHUBRING, Gert. Conceptions for Relating the Evolution of Mathematical Concepts to Mathematics Learning—Epistemology, History, and Semiotics Interacting. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, n. 1, 2011, p. 79-104.

6 A principal referência é BROUSSEAU, Guy. *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

7 FOUCAULT, Michel. *Arqueologia do Saber*. Trad. Luiz Felipe Baeta Neves. Rio de Janeiro: Forense Universitária. 2012.

8 VINCIGUERRA, Lucien. *Langage, visibilité, différence*: Éléments pour une histoire du discours mathématique de l'âge classique au XIXème siècle. Paris: Vrin. 1999.

9 FOUCAULT, op. cit., 2012, p.227.

10 FOUCAULT, op. cit., 2012, p.170.

11 Os momentos históricos aqui descritos são analisados com mais detalhes no livro ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

12 NEUGEBAUER, Otto; SACHS, Abraham. *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Series, v. 29. New Haven: American Oriental Society, 1945.

13 NEUGEBAUER, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton: Princeton University Press, 1952; reprint New York: Dover, 1969.

14 Ver VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. New York: Springer-Verlag, 1983 e VAN DER WAERDEN, Bartel Leendert. *A History of Algebra, from Al-Khwarizmi to Emmy Noether*. New York: Springer-Verlag, 1985.

15 Para se entender melhor as dificuldades na tradução dos textos cuneiformes indicamos GONÇALVES, Carlos. Observações sobre a Tradução de Textos Matemáticos Cuneiformes. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, v. 24, n. 38, 2011, p. 1-15.

16 Para mais detalhes, ver ROBSON, Eleanor. Mesopotamian Mathematics. In: KATZ, Victor (org.). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam:* A Sourcebook. Princeton: Princeton University Press, 2007, p. 58-186 e ROBSON, Eleanor. *Mathematics in ancient Iraq*: a social history. Princeton & Oxford: Princeton University Press, 2008**.**

17 HØYRUP, Jens. *Lenghts, widths, surfaces.* A portrait of Old Babylonian algebra and its kin. Berlin: Springer, 2002.

18 Para o que designamos como "historiografia tradicional", oferecemos uma análise mais detalhada, com referências, em ROQUE, op. cit., 2012.

19 Citamos principalmente os trabalhos de Ahmed Djebbar. Ver DJEBBAR, Ahmed. *L'algèbre arabe.* Genèse d'un art. Paris: Vuibert, 2005.

20 RASHED, Roshid. *Al-Khwarizmi*: Le commencement de l'algèbre. Paris: Librairie A. Blanchard, 2006.

21 ABGRALL, Philippe. Nascimento da Álgebra ou o que sabemos atualmente a respeito do início da álgebra como disciplina. In: FLAMENT, Dominique; BARROSO, Wilton (Orgs.). *Dualidade álgebra-geometria:* I Escola de Verão em História Conceitual da Matemática. Brasília: Ed. Maud, 2008, p. 1-16.

22 Ver RASHED, op. cit., 2006, p.96.

23 Ver MACHADO, F. et al., Por que Bhaskara? *História e Educação Matemática*, v. 2, n. 2, 2003, p.119-66.

24 VIÈTE, François. Introduction à l'art analytique. *Cahiers François Viète : Épistémologie, Histoire des Sciences et des Tecniques*, série 1, n.7, 2004.

25 Este contexto da abordagem de Viète, bem como de muitos de seus contemporâneos, é analisado em BARBIN, Evelyne; BOYÉ, Anne. *François Viète*: un mathématicien sous la Renaissance. Paris: Vuibert, 2005

26 GIRARD, Albert. *Invention nouvelle en l'algèbre*. Amsterdam: G. Iansson Blaeuw, 1629, p. 29.

27 BOS, Henk. *Redefining Geometrical Exactness:* Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction. New York: Springer-Verlag, 2001, p. 147.

28 DESCARTES, René. Discours de la méthode suivi de La Dioptrique, Les Météores, La Géométrie, Propositio demonstrata, Excerpta Mathematica et Traité de mécanique. In : BEYSSADE, Jean-Marie; KAMBOUCHNER, Denis (Direction). *Oeuvres complètes de René Descartes.* Paris: Gallimard, 2009, v. III.

29 KJELDSEN, Tinne Hoff; BLOMHØJ Morten. Beyond Motivation – History as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 2012, v. 80, 3, p. 327-49.

30 SFARD, Anna. *Thinking as Communicating*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

31 GALILEI, Galileu. *Two New Sciences*. Tradução de S. Drake. Madison: University of Wisconsin Press, 1974.

[Recebido em Dezembro de 2013. Aprovado para publicação em Setembro de 2014]