Tradução
Translation

A lei de Torricelli $v=\sqrt{2gh}$: Uma tradução comentada de sua origem no *De Motu Aquarum* (Do Movimento das Águas)

Torricelli's law $v=\sqrt{2gh}$: A commented translation on its origin in the De Motu Aquarum *(On the Movement of the Waters)*

SYLVIO R. BISTAFA
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo | USP

RESUMO Apresenta-se uma tradução comentada para o português do *De Motu Aquarum* (1644), em que Evangelista Torricelli apresenta os desenvolvimentos que ficaram consolidados na sua famosa lei $v=\sqrt{2gh}$ que permite determinar a velocidade de efluxo v de um jato de líquido submetido à gravidade g, jorrando de um pequeno orifício do recipiente, para o qual a distância vertical até a superfície livre da água no recipiente é h.

Palavras-chave lei de Torricelli da hidrodinâmica – movimento das águas – história da mecânica.

ABSTRACT *We present a translation with commentary of De Motu Aquarum (1644), where Torricelli presents the developments that became consolidated in his famous law $v=\sqrt{2gh}$ that allows the determination of the efflux velocity v of a liquid jet under the gravity g, issuing from a small orifice in a vessel, for which the vertical distance up to the free surface of the water in the vessel is h.*

Key words *Torricelli's law in hydrodynamics – movement of waters – history of mechanics.*

Introdução

Em 1644, Evangelista Torricelli (1608 – 1647)[1] publicou em Florença sua *Opera Geometrica*,[2] que contém *De Sphaera & Solidis Sphaeralibus, De Motu Grauium Naturaliter Descendentium (Liber Primus), De Motu Proiectorum (Liber Secundus), De Dimensione Parabolae, De Solido Hyperbolico cum Appendicibus De Dimensione Cycloidis, & De Dimensione Cochlea*.

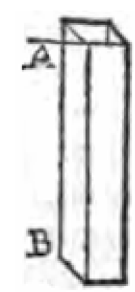
Nas páginas 191-203 do *De Motu Proiectorum (Liber Secundus)*, aparece o capítulo *De Motu Aquarum* (Do Movimento das Águas), no qual Torricelli apresenta os desenvolvimentos que ficaram consolidados na sua famosa lei $v=\sqrt{2gh}$, que permite determinar a velocidade de efluxo v de um jato de líquido submetido à gravidade g, jorrando de um pequeno orifício do recipiente, para o qual a distância até a superfície livre da água no recipiente é h. Ernst Mach considerou este capítulo tão importante para o movimento dos líquidos, que proclamou Torricelli o fundador da hidrodinâmica[3].

Paradoxalmente, este capítulo da obra de Torricelli não se encontra traduzido em nenhuma língua moderna. *Opera Geometrica* foi toda escrita em latim, à exceção do material que consta nas páginas 217-243 do *De Motu Proiectorum*, escrito em italiano, segundo consta, para facilitar o seu entendimento e emprego pelos práticos da artilharia. É, pois, objetivo deste trabalho apresentar uma tradução para o português do *De Motu Aquarum*, comentada, no sentido de facilitar o entendimento do leitor sobre esta importante contribuição para a Física, ocorrida no século XVII.

Do movimento das águas

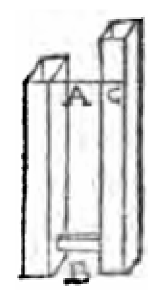
Não será inconveniente ser agora oferecido neste pequeno tratado alguma consideração acerca das águas: na verdade, a tal ponto peculiar, diante dos outros corpos sublunares, o movimento com as águas é visto conectado, posto que ordinariamente nunca repousem. Omito aquele grande movimento de mudança dos mares; Também deixo de lado cada um dos rios, e dos lagos; além disto, tanto a medição como o uso das correntes, dos quais toda a doutrina foi descoberta pelo Abade Benedito Castelli[4]*, meu preceptor. Ele escreveu seu conhecimento, e aquela (doutrina) consolidou, não somente pela demonstração, também verdadeiramente pela obra, com a máxima utilidade de Príncipes e povos, com a maior admiração de filósofos. Sobressai o livro daquele, verdadeiramente esplêndido. Ainda que não totalmente indiferentes a respeito desta matéria, nós descreveremos a seguir qualquer coisa de pequena monta, e a maioria; coisas inúteis.*

Supomos.



Que as águas irrompendo impetuosamente teriam o mesmo ímpeto no próprio ponto de erupção, que tivesse algo pesado, ou de uma única gota da própria água, se desde a superfície suprema da mesma água; em direção ao orifício de erupção caísse naturalmente.

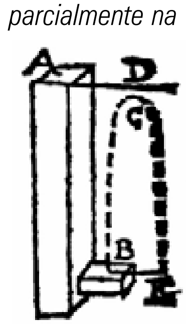
Por exemplo. Se o tubo AB de capacidade conveniente, isto é de grande extensão, seja entendido continuamente sempre cheio com água, junto ao nível A, e seja perfurado um estreito orifício em B. Supomos que a água irrompendo através de B tem o mesmo ímpeto, que tivesse algo pesado se naturalmente caísse de A até B.



Para este raciocínio poder ser confirmado de alguma maneira, é visto que se de fato junto da pequena abertura B for colocado outro tubo, e com muito cuidado for ligado, a água que escoa através de B no tubo BC, tem tanta força que por si própria seja sempre elevada; em direção ao mesmo nível horizontal CA, tivesse sido conduzida através do orifício A.

Razão pela qual, é também visto verossímil quando a própria (água) irrompe livre de B, tem a força de sempre ser restituída; junto da linha horizontal que por A é guiada; ou que a mesma há de ter tanto ímpeto quanto tem algo de peso, como de uma única gota que cai livremente de A até B.

Também, um experimento demonstra de algum modo o nosso princípio, ainda que em alguma parte pareça rejeitar. De fato, se a pequena abertura B for dirigida para cima, e seja convenientemente arredondada, e aparada, e seja a largura total do tubo remanescente muito mais ampla que o orifício B, veríamos a água que jorra através da linha BC, quase ascender até o nível AD. Podemos atribuir a causa da deserção diante de CD parcialmente ao impedimento do ar que contrário não importa para onde; o corpo móvel é combatido; além disso, parcialmente na própria água, que enquanto retorna do pico C está de volta para baixo, ela mesma aproximando-se impede que se deixe elevar, e retarde, e nem deixa que as subsequentes gotas alcançassem a própria marca com o seu ímpeto. Evidentemente, isto ficará patente, quando é obstruída completamente a abertura B com a mão oposta; em seguida retirada subitamente a mão para que seja de repente descoberto: serão vistas, pois, as primeiras, e subsequentes gotas alcançar o ponto mais alto, o qual esteja além do topo da água C. Depois a água começará a fluir para baixo, pois aquelas primeiras gotas não possuem água na frente delas, que impeça o movimento que corre em sentido contrário das mesmas no final da ascensão, pois suponho que BC é dirigido perpendicularmente.



Adicione-se também que se alguém observasse o ar que envolve a própria água BC, o veria ser agitado, e ser movido para baixo, que certamente esta ação não é feita sem força, e por esta razão com o impedimento da água ascendente. Daí é que se alguém queira fazer um experimento deste principio que fosse escolhido o mercúrio, que devido à gravidade intrínseca está mais apto, para conservar durante muito tempo o ímpeto recebido, e para superar a resistência do ar. Também será observado que a água muito se extravia diante da leveza, e particularmente se o tubo for de grande altura: pois, nesse caso, diante do máximo ímpeto é espalhada em gotinhas muito pequenas como orvalho, não ascende à metade, e possivelmente um terço, uma quarta parte daquela distância que pela própria coisa, teoricamente falando, com todos os impedimentos removidos com o ímpeto recebido devesse toda completar. Por fim, se alguém não estiver satisfeito com os cálculos preditos, veja qualquer um que demonstre entre as seguintes Proposições, que se assim for, facilmente demonstraremos a principal suposição pela resolução da proposição aprovada; ou se aceite com dança (de aprovação) todo este suplemento acerca do movimento das águas, ou rasgue completamente este panfleto, que certamente permito, com muito prazer, se um experimento feito com toda diligência exclua plenamente grande parte das seguintes proposições.

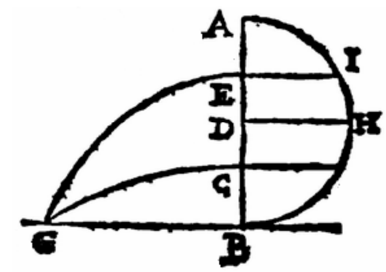
Nestas exposições, consideremos a água caindo de volta em E, certamente no plano horizontal guiado através do nível do orifício B. De Galileu, temos que o ímpeto da água que cai de C em E, é tão capaz quanto do mesmo modo transportar a água de E para C. Portanto, o ímpeto em E é como em B, por outro lado, em E, o ímpeto é como um pesado caindo de C em E, ou de A em B (na verdade dissemos que o ponto C da mesma forma devesse estar no nível AD com os impedimentos que retardam a água abstraídos), pois o ímpeto em B é como um pesado caindo naturalmente de A em B.

Com estas suposições, demonstraremos certas coisas das águas que irrompem, as quais são observadas concordar admiravelmente com a doutrina dos projéteis.

O primeiro manifesto é que todas as águas que irrompem das aberturas de algum tubo perfurado, descrevem parábolas. Em primeiro lugar, efetivamente, as gotas que jorram do tubo são da natureza dos projéteis já que na verdade as mesmas, ainda que líquidas, não obstante sejam esferas pesadas e unidas, e por esta razão, certamente, traçarão uma parábola. Também, todas as subsequentes, as quais são emitidas com o mesmo ímpeto (pois supomos os tubos sempre cheios com água) percorrerão a trajetória das precedentes; porque aquele traçado contínuo da água fluente será uma parábola.

Talvez alguém censurará que isto não será visto, especialmente quando o orifício do tubo for muito estreito, e o impulso veemente. Então efetivamente (que é de se ver naquela linha d'água, que irrompe violentamente das fontes com tubos) a primeira parte daquela órbita parece que ascende mais estendida, e verdadeiramente é conformada segundo uma parábola; porém a (parte) posterior, isto é aquela que como água descendo percorre, mais curvada, e como assim direi, lânguida; e curva é observada. Dá-se como resposta para a objeção, não somente a precedente premissa, como também a maior parte das seguintes a submeter neste instante. A causa é o impedimento do meio, o qual age contra o movimento de um corpo móvel muito sensível, e muito maior que nos projéteis que são feitos para as máquinas bélicas. Visto que ali a matéria do projétil são globos de chumbo, de ferro, ou ao menos de mármore; aqui verdadeiramente é uma linha, e ainda aquosa. Logo, não seja nada espetacular, que sendo o fundamento desta doutrina Teoricamente falando, igualmente verdadeiro, e, entretanto, como nos projéteis de Galileu, os experimentos frequentemente desviassem praticamente pelas mesmas considerações, os quais, a fim de que se realizassem mais rigorosamente, ou devessem ser realizados em meio não obstaculizante, ou pelo menos, que fosse utilizada matéria muito pesada. Ainda que se alguém com grandeza, e habilidade; com disciplina deseje tentar todas estas coisas, descobrirá pelo menos algo, e geralmente inesperado. O experimento que para nós confirmou quase todas estas especulações foi de fato um certo tubo, ou melhor, uma caixa paralelepipedal, cuja altura excedia um passo Geométrico, cuja base não era menor que um palmo quadrado. As aberturas eram com toda certeza redondas e maiores do que o círculo da pupila humana, não feitas incorretamente, mas muito habilmente escavadas com pequenas lâminas de cobre, finas, e dirigidas para o horizonte. Efetivamente a água irrompendo impetuosamente sai sempre na direção perpendicular àquele plano através do qual irrompeu, e por este motivo; fazia que as emissões fossem horizontais ao nosso tubo.

Dado o tubo AB sempre cheio, e convenientemente perfurado com as aberturas CDE, isto é que sejam formas circulares, e seja; uma condução horizontal daqueles, isto é, numa fina lâmina perpendicular. E, dado BG para qualquer lugar do horizonte, encontrar a amplitude de cada parábola. Faça o semicírculo AHB em torno do diâmetro AB. A amplitude da parábola que fluirá através de E será o dobro da linha EI, a qual é conduzida horizontalmente em semicírculo. E a amplitude da parábola que irrompe de D será o dobro da linha DH. E isto é demonstrado, porque sendo a água algo como um projétil, e seja (através da substituição) do mesmo no ponto de cima A, conforme Proposição 5 de Galileu[5], as metades das amplitudes no ponto médio serão proporcionais entre a sublimidade[6] e a altura; por isso as metades das amplitudes serão iguais às linhas EI, DH.



Corolários[7]

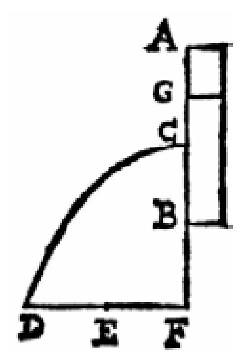
Daqui o manifesto é que se o tubo AB é perfurado no ponto médio D da altura, então a emissão feita de D cairá mais longe que outra (perfurada) em qualquer lugar.

Verdadeiramente, aberturas que distam igualmente do ponto médio D são abertas para fazer amplitudes iguais.

O manifesto é também que as parábolas inferiores sejam sempre maiores que as superiores, pois possuindo maior sublimidade, isto é um maior lado reto[8], pois a sublimidade é a quarta parte do lado reto, conforme foi exposto.

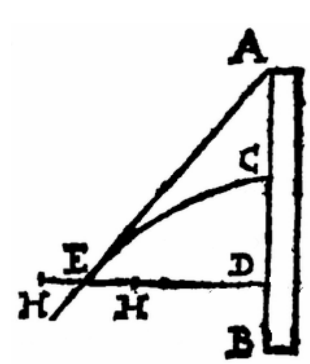
Que seja dado um tonel, ou um tubo AB, convenientemente perfurado em C, e que faça a emissão CD. Seja para encontrar o nível horizontal desconhecido da água no tubo, ou a superfície suprema.

Seja a linha horizontal DF, e que seja estendida CB sobre F, e que FD seja seccionada em duas em E, e se faça; que a altura CF para a semibase FE, assim como FE, com a outra, que será a sublimidade CG. Portanto, estará descoberto através do ponto G o nível da água escondida no tubo.



Se o tubo AB é convenientemente perfurado em qualquer lugar; em E, a emissão da água que flui tocará a superfície do cone retangular, cujo eixo seja o próprio tubo, com toda certeza o vértice esteja no nível d'água.

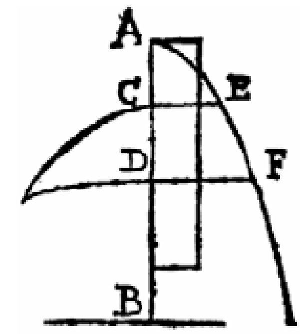
Seja o ângulo do cone BAE semireto, e o tubo AB, seja a mesma linha na qual estão as aberturas, onde é colocado o eixo do cone. Que seja assumido CD igual ao próprio CA. E seja estabelecido; DE horizontal. Digo que a parábola passa por E. Pois se na verdade é possível que passe por H e sendo a sublimidade da água CA, será a metade da linha HD a média proporcional entre duas iguais DC, CA, e por essa razão toda HD será igual a própria DA, ou DE, que é um absurdo. Logo, se a parábola transita pelo ponto E, a própria EA é tangente, sendo iguais AC, CD.



A partir deste momento, o manifesto é que se o tubo em todos os seus pontos fosse perfurado convenientemente, todas as emissões serão vistas de algum modo concordar para formar uma espécie de cone retangular. Se na verdade não é um tubo, mas é uma pequena esfera colocada no vértice do mesmo, e seja perfurada convenientemente em todos os seus pontos, todas as emissões de tal coisa conformarão numa imagem de conóide parabólico, segundo a Proposição 30 deste (livro).

As velocidades das águas que são lançadas pelo tubo AB perfurado são como linhas aplicadas na parábola em direção à sublimidade de cada uma.

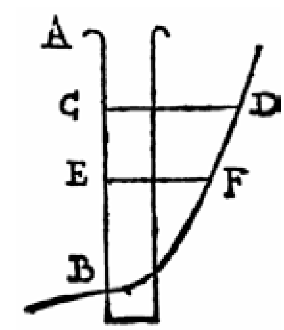
Seja o tubo AB sempre cheio de água; e das aberturas, C, D irrompem as linhas fluentes; e descrita a parábola AEF ao redor ao eixo AB, é conduzida ordenadamente, CE, DF. Será, portanto, a velocidade em C para a velocidade em D, como o ímpeto de um pesado caindo de A em C para o ímpeto de um pesado caindo de A em D, evidentemente como CE para DF, conforme demonstrado no primeiro livro do movimento.



Corolário

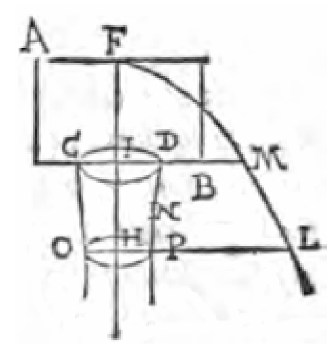
Daqui segue da doutrina do Abade Castelli[9], relativa à quantidade de água que sai através da abertura C para a quantidade de água que sai através de D (quando as aberturas fossem iguais) é como CE para DF. Isto é, as águas que se precipitam de aberturas iguais estão sob a raiz quadrada da razão das sublimidades, ou das suas alturas[10]. Raphael Magiotti[11], o muito erudito senhor, igualmente preparado em todas as letras e ciências, foi o primeiro que com o experimento investigou a verdade deste Corolário, e o êxito da nossa verdade confirmou com felicidade.

Quando verdadeiramente as aberturas forem desiguais, as quantidades de água de saída terão o cálculo composto pelo cálculo das velocidades e pelo cálculo das aberturas.



Se o tubo AB cilíndrico ou prismático é perfurado no fundo B para que flua, sem que outro líquido seja derramado por cima, as velocidades da superfície oculta mais elevada do líquido decrescerão com a mesma razão, como decrescem as linhas regularmente aplicadas na parábola BD que tenha o eixo BA e de fato o vértice B. Isto é manifestado. Na verdade, quando a superfície mais elevada da água for C, a velocidade será CD e quando a superfície mais elevada for E, a velocidade será EF, desde já demonstrados; e sempre deste modo.

De que modo seja investigar um sólido conformado a partir das águas que caem.

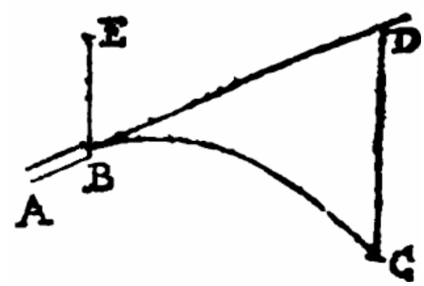


Seja um recipiente amplíssimo AB sempre cheio, cuja abertura no fundo CD seja circular, além disso, esteja o sólido $COPD$ com água que flui dele, e seja o eixo do sólido FH. Digo ser DNP a tal linha geratriz deste sólido, tal que o número do diâmetro CD biquadrado, para o número do diâmetro OP biquadrado, seja reciprocamente como a altura FH para a altura FI.

O Abade Castelli mostrou que a seção CD para a seção OP é reciprocamente como a velocidade em OP, para a velocidade em CD. Certamente como HL para IM na parábola FML. Conforme posto adiante. O número do diâmetro CD ao quadrado para o quadrado de OP é como o círculo CD, para o círculo OP, certamente como HL para IM. Por outro lado, o número de HL ao quadrado para o quadrado do número IM é como HF para FI. Portanto, o biquadrado do número do diâmetro CD para o biquadrado do número OP é reciprocamente como a altura FH, para a altura FI. C.Q.D.

Seja dada para a mesma figura a altura FI *100* FH *160*; e seja dado o diâmetro da abertura CD *50*. É procurado quão grande há de ser o diâmetro OP do sólido. Faça como FH para FI, certamente como *160* para *100* assim o número biquadrado do diâmetro CD, certamente *6250000* para o outro, que será *3906250*; e o mesmo será o número biquadrado do diâmetro OP: logo deste seja extraída a raiz biquadrada, aparecerá *44* com *55 (44,5)* com aproximação de um décimo. Portanto pronunciaremos que este é o diâmetro OP.

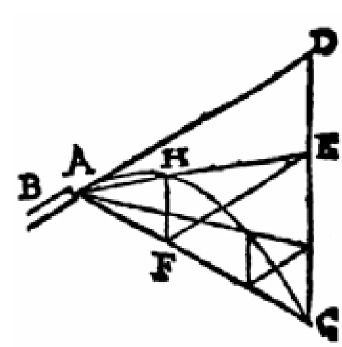
Dada BD para a direção do cano AB, e o ponto C no qual incide a água que flui, seja para encontrar o nível desconhecido, ou a superfície mais elevada da água. Seja conduzido ABD, & de C seja erguida CD na vertical. Em seguida, faça que CD, para BD, assim como BD para a outra, cuja quarta parte seja BE. Digo que através de E passará o nível desconhecido mais elevado da água. Com efeito, BD é a tangente da parábola, e CD paralela ao diâmetro, portanto, o quadrado de BD será igual ao retângulo sob CD, e com lado reto, por isso, portanto descoberta aquela linha (da qual a quarta parte atribuímos à BE) que será o lado reto, e BE a sublimidade[12]. C.Q.D.



Advertimos, novamente, para que os experimentos concordem com as demonstrações, que a abertura B deve ser uma tênue lâmina, e plana, contra a qual seja perpendicular à reta BD. Verdadeiramente, o restante do interior do tubo BA e até C, em todo o percurso desde o início do aqueduto, deve ser muito amplo; pelo que, com efeito, ficará mais livre, de modo que o experimento tornar-se-á mais exato. No entanto, todas as vezes que a água que escoa através de um tubo desconhecido tiver que passar através de estreitezas, serão encontradas coisas falsas; da mesma forma que também acontecerá, se por causa de um forte ímpeto, a água for liberada repentinamente, sendo dispersada em um orvalho muito tênue.

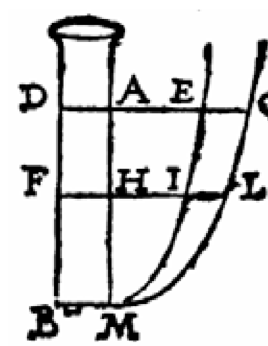
Dada a direção AD, do tubo, ou do cano BA, e o ponto C no qual incide a emissão da água, para descrever toda uma parábola da água que flui.

Seja produzida BAD, e seja elevada a perpendicular CD. Em seguida seja conectada AC. Sejam agora produzidas três linhas AE, EF, FH, das quais a primeira faça a partir de A um ângulo qualquer, a segunda paralela à tangente, a terceira paralela ao diâmetro, e H será o ponto de passagem da parábola, o que é certo a partir das demonstrações, e deste modo para cada um dos pontos da parábola procurada.



Colocado o vaso AB ou cilíndrico ou prismático que no fundo seja perfurado com a abertura B. A velocidade da água que sai de B para a velocidade do nível, ou da mais alta superfície que desce no vaso, sempre responderá com o mesmo cálculo[13].

Quando o nível de água no vaso é AD, seja AC a velocidade da água que sai por B. Então faça que a seção AD do vaso, para a secção do orifício B, de tal modo como AC para AE. E será pela doutrina de Castelli, a própria AE a velocidade do nível DA descendendo. Agora em torno ao diâmetro AM, se façam através de C e E, duas parábolas MC, ME.



Além disso, seja considerado outro nível FH. Quando o nível estiver em FH, então conforme mostrado, será a velocidade em B assim como a linha HL. Mas a velocidade em B para a velocidade do nível FH será pela doutrina de Castelli, como a seção FH para a seção B, certamente como CA para AE, assim sempre. Por isso, portanto, a velocidade da água que sai para a velocidade do nível que desce em qualquer local considerado, sempre será como a linha aplicada na parábola maior, para aquela aplicada na menor, isto é, sempre conforme o mesmo cálculo.

Além disso, de outro modo isto também será mostrado. Seja considerada a seção FH em qualquer parte do vaso AB, contanto que não seja a superfície mais elevada: mas que, no entanto, seja AD a superfície mais elevada. Estando agora transitando a mesma quantidade de água pela seção B e pela seção FH, será a velocidade em B para a velocidade FH reciprocamente como a seção FH para a seção B; todavia assumindo que a seção FH é igualmente veloz que a superfície suprema DA (sendo considerado o vaso como um cilindro ou um prisma), pois a velocidade em B para a velocidade descendente da superfície suprema DA no vaso, sempre responderá com o mesmo cálculo, sem dúvida sempre será como a seção do vaso para a seção da abertura B.

Corolário

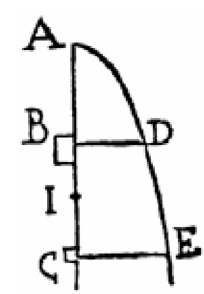
Portanto, quando as alturas no vaso forem AM, HM a velocidade da água que sai através de B é fixada pela altura AM, para a velocidade que sai através de B é fixada pela altura HM, que é a velocidade da superfície mais elevada DA para a velocidade da superfície mais elevada FH que efetivamente está exposta. De fato, este Corolário é deduzido apenas permutando a conclusão acima obtida.

As quantidades das águas pelo mesmo, ou que irrompem de aberturas iguais no mesmo tempo, estão entre si sob a raiz quadrada da razão das alturas.

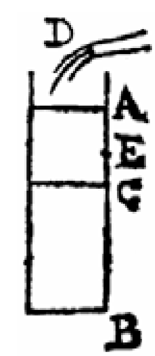
Seja o vaso AB da figura precedente perfurado em B e uma vez permaneça sempre cheio até a marca DA; e verdadeiramente outra vez até FH. Digo que a quantidade de água que sai quando a altura é AM, para a quantidade de água que sai quando a altura é HM (entendido sempre ao mesmo tempo) estão na razão da raiz quadrada da altura AM para a altura HM. Certamente como a reta AC para a reta HL. De fato, quando as alturas são AM e HM, as velocidades em B são pelo Corolário precedente como a velocidade da mais alta superfície DA, para a velocidade da mais alta superfície FH; ou como aplicada à AE para HI. Portanto, as quantidades de água que irrompem da mesma abertura B serão como AE para HI, certamente na razão da raiz quadrada da altura AM para a altura HM.

Esta especulação está exatamente de acordo com o experimento feito por nós com total diligência.

Certo vaso, cuja parte mais elevada A é perfurado com a abertura B, de tal modo que permaneça sempre cheio com certa corrente de água conduzida por cima em A. É procurada qual a abertura que deve ser perfurada em C, para que com a mesma água corrente por cima, permaneça do mesmo modo precisamente cheio como antes. Seja tomada entre AB, AC a média AI. E faça que a altura CA para a média AI assim como a abertura B para a abertura C. Portanto a abertura B para a abertura C será como a aplicada em CE, para a aplicada em BD; isto é, reciprocamente como a velocidade da abertura C para a velocidade da B. Por essa razão, a mesma quantidade de água efluirá por cada um deles; estabelecido; que o vaso permanecerá sempre cheio.



Verdadeiramente, certo vaso AB que seja perfurado no fundo com uma abertura B, sendo conduzida certa corrente de água por cima em D, permanece cheio até a marca C. Seja procurada a quantidade de água que deve ser derramada no mesmo vaso para que seja preenchido até a marca A. Seja tomada entre AB, BC a média BE: e seja como EB para BA, de tal modo que uma dada quantidade de água em D para a outra quantidade; que admitida totalmente no vaso encherá novamente até a marca A, e não a excederá[14]*. O qual, como os muitos outros deste tipo, será facilmente demonstrado a partir dos precedentes.*



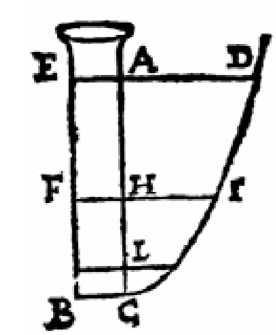
As águas que fluem (as quais, contudo, possam ser recuperadas de alguma parte) são declaradas em proporção, sem nenhuma medida de tempo, de velocidade, e de seção.

Seja tomada na figura precedente, não importa para qual vaso AB, e qualquer que seja sua forma, contudo de tal modo seja perfurado no fundo, que com dadas águas escoantes que tenham sido admitidas não eflua totalmente, mas cresça, e faça no vaso certa altura, por exemplo, a altura BC e depois não cresça mais, mas o vaso emita precisamente tanta água quanto recebe. Verdadeiramente, uma maior quantidade de água faça a altura AB. Fica patente pelos precedentes, que a água maior está para a menor na razão da raiz quadrada da reta AB para a BC. Pois atravessando cada água através da mesma seção B, e uma delas tenha a altura AB e a outra verdadeiramente CB, serão as velocidades das saídas das águas através da dita seção na razão da raiz quadrada de AB para CB. E, portanto, as quantidades das águas que fluem serão na razão da raiz quadrada das alturas feitas AB, BC.

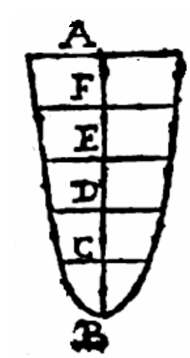
Lema[15]

Seja AB o diâmetro de alguma parábola, e um algum móvel que seja movido por AB com uma mesma lei, de tal forma que em qualquer ponto da linha AB o seu ímpeto seja sempre considerado como aplicado entre aquele ponto e alguma parábola. Digo que este movimento é o mesmo que dos pesados que caem naturalmente. De fato é compreendido que algum pesado se move desde A até B, com movimento naturalmente acelerado, e concebido de tal maneira que o momento[16] do móvel seja considerado como de um pesado que também é simultaneamente liberado de A e que no mesmo tempo chegue ao ponto B. E é evidente que de ambos os móveis um só terá o mesmo momento futuro. Pois em qualquer ponto da linha AB é considerado que um ou outro dos dois, móvel ou pesado terá o mesmo ímpeto e o outro, por isso, também atravessará o mesmo espaço AB e as suas próprias partes, e isto verdadeiramente também acontecerá se o móvel for movido de B para A com ímpeto decrescente e não crescente.

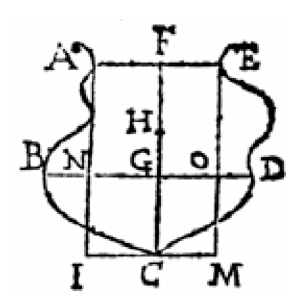
Vasos, cilíndricos ou prismáticos perfurados no fundo são esvaziados por essa lei, que uma vez dividido o tempo total em partes iguais, a emissão do último tempo seja como um, além disso, a emissão do penúltimo tempo seja como 3, a do antepenúltimo tempo seja como 5, e assim sucessivamente como números ímpares para a unidade.



Seja um vaso como é estabelecido; perfurado no fundo, e que ao mesmo seja associada a parábola CD. Já demonstramos que devido a água que flui pelo fundo, o nível AE irá descer de tal modo que a velocidade do mesmo seja como uma linha que corresponde a ela mesma na parábola, certamente o ímpeto em EA, seja como AD, em FH seja como HI, e assim sempre; portanto o movimento do nível EA será como o movimento que se esgota de pesados atirados para cima, ou de projéteis; e uma vez dividido o tempo total da emissão em partes iguais, será o espaço LC de queda do nível no último tempo, como um; também o espaço HL como três, e HA como cinco. Pois, conforme o lema estabelecido, o movimento do nível AE é como o movimento de pesados não em queda, mas como projetados perpendicularmente para cima (o que é o mesmo), pois o movimento do nível AE do mesmo modo percorre o espaço com tempos iguais, e como algum pesado projetado para cima, sem dúvida no último tempo um, no penúltimo três; e assim sucessivamente[17].



Se o vaso for um conóide parabólico cujo eixo seja AB, e seja perfurado no fundo em B a sua emissão poderá ser vista como sendo igual ao movimento descendente da superfície mais elevada: isto é, em tempos iguais sejam exauridas massas com alturas iguais; o que, entretanto, é falso. Isto porque os conóides parabólicos são entre si como o quadrado do eixo, ou altura. Portanto, se dividimos toda AB em partes iguais, será para o conóide CB como um, e para o DB como quatro; e o próprio EB como 9, e assim sucessivamente, sempre como números ao quadrado. Serão, pois, para os conóides: CB como um; depois a diferença com CD como três, DE como 5, EF como 7, e assim sucessivamente, as diferenças serão para a unidade como números ímpares. Por isso será visto por alguém que desta maneira as diferenças de cada uma em tempos iguais devam ser exauridas conforme já demonstrado na precedente; mas visto que desse modo, a evacuação depende da forma do próprio vaso, é absolutamente falso isto que pronunciamos; e a demonstração cada um poderá deduzir a partir destas que seguem.



Seja o vaso irregular $ABCDE$ perfurado no fundo com uma abertura C; e sejam consideradas duas seções do mesmo AE, BD. Digo que a velocidade descendente da água da mais elevada superfície, quando será AE, para a velocidade da superfície, quando será BD, ter o cálculo composto pela razão da raiz quadrada da altura FC para CG, e recíproca das seções, certamente da seção BD para AE. Seja, pois, concebido a seção superior com base AE qualquer que ela seja, o vaso prismático $AIME$ cuja altitude seja FC. Já a velocidade da seção prismática AE para NO será como a reta FC para a média[18] CH entre as alturas. Verdadeiramente, a velocidade da seção NO para a velocidade da seção

BD, tendo a mesma altura, é recíproca como a seção BD para NO. Portanto, fica claro que o cálculo da velocidade da seção AE para a velocidade da seção BD é composto da razão da reta FC para CH, e da razão da seção BD para NO, ou BD para AE.

A partir daqui o manifesto é que recentemente dizíamos do Conóide parabólico, certamente o movimento da superfície descendente mais elevada não é igual; mas sucessivamente acelerado. Verdadeiramente o cálculo de como é acelerado; e de que maneira são variadas as velocidades descendentes da superfície mais elevada da água numa esfera perfurada, esferoide, e em outros vasos regulares, ficará facilmente acessível pela precedente consideração.

Notas e referencias bibliográficas

Sylvio R. Bistafa é professor do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da USP. E-mail: sbistafa@usp.br

1 Uma biografia de Torricelli com toda sua obra comentada e contextualizada encontra-se disponível em http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/torricel.htm

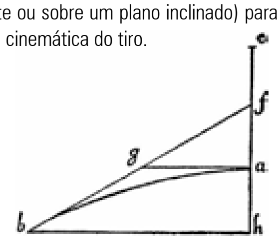
2 A obra original digitalizada encontra-se disponível em http://archive.org/stream/operageometrica00torrgoog#page/n212/mode/2up

3 Esta proclamação aparece na página 402 do *The Science of Mechanics* de Ernst Mach (edição da The Open Court Publishing Co., 1919).

4 Torricelli perdeu o pai por volta de1626, tendo então se mudado com a família para Roma, onde um tio monge conseguiu que ele estudasse com o beneditino Dom Benedetto Castelli (1578-1643), professor no Collegio di Sapienza (atualmente Universidade de Roma "La Sapienza"). Em 1628 Castelli publicou *Della misura dell'acque correnti,* seu famoso livro de hidráulica, onde ele enuncia pela primeira vez a relação entre a área da seção de escoamento e a velocidade, que é um resultado imediato derivado da equação da continuidade do fluido incompressível.

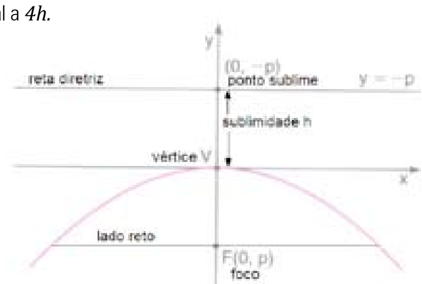
5 Trata-se do Problema II - Proposição 5 da Quarta Jornada (Movimento dos Projéteis) de *Due nuove scienze* (1638), de Galileu Galilei. Nesta proposição, Galileu procura determinar o ponto sublime E (ver figura abaixo), a partir do qual o móvel que cai, partindo do repouso em E, desvia o ímpeto adquirido em A pela horizontal, acrescentando o ímpeto adquirido em H, ao cair a partir do repouso em A, descrevendo a parábola AB. Para tanto mostra que EA poderá ser obtido de AG e de AF, uma vez que AG é a média proporcional entre EA e AF (ou AH, uma vez que $AF=AH$). Ou seja, a metade da amplitude HB da semiparábola é a média proporcional entre sua altura AH e a sublimidade EA procurada. Da Geometria, sabe-se que a média proporcional dos segmentos EA e AH é dada por $\sqrt{EA \cdot AH}$, que, segundo Galileu, seria então igual ao segmento AG. Numa abordagem atual, este mesmo resultado poderá ser obtido observando que a velocidade horizontal que um móvel adquire em A, caindo de E, é dada por $v=\sqrt{2gEA}$ (g é a gravidade). A distância horizontal percorrida pelo móvel animado desta velocidade será dado por $t\sqrt{2gEA}$ (t é o tempo). O tempo t de interesse, é o da queda do móvel na vertical desde A até H e dado por $t = \sqrt{\frac{2AH}{g}}$. Logo, a distância percorrida pelo móvel na horizontal será dada por $2\sqrt{EA \cdot AH}$, que é o dobro da média proporcional dos segmentos EA e AH , e igual à amplitude HB da semiparábola; ou seja: $HB=2AG$.

6 Lat. *Sublimitas*, ital. *Sublimità*: parâmetro usado por Galileu em sua balística, com o qual fixa a velocidade horizontal constante do tiro. A sublimidade é a altura de onde haveria de descer o móvel (livremente ou sobre um plano inclinado) para alcançar ao final do seu descenso a tal velocidade. Com este parâmetro, Galileu consegue geometrizar totalmente a cinemática do tiro.



7 Um Corolário é uma consequência direta de outro teorema ou de uma definição, muitas vezes tendo suas demonstrações omitidas, por serem simples.

8 A corda de uma parábola é um segmento de reta que une dois pontos quaisquer e distintos da parábola. Em particular, uma corda que passa pelo foco é chamada de corda focal. Uma corda focal perpendicular ao eixo de simetria é chamada de *lado reto* da parábola. A equação da parábola com vértice na origem, com eixo de simetria coincidente com o eixo coordenado y e com concavidade voltada para baixo é dada por $x^2=4py$; onde, no caso, $p=-h$. Logo, para , $y=-h$ $x=+-2h$, sendo o lado reto igual a $4h$.



9 Aqui Torricelli dá a entender que Castelli sabia que as quantidades de água que saem de aberturas iguais são proporcionais à raiz quadrada das respectivas alturas. Entretanto, segundo Giovanni Poleni (em sua *Raccolta D'Autori Italiani Che Trattano Del Moto Dell'Acque (Edizione Quarta)*, Tomo VI, 1823), Torricelli havia dito ter sido ensinado por Castelli que as quantidades de água são na razão direta das alturas, e então julgava que isto devesse ser corrigido no seu livro sobre o movimento das águas.

10 Talvez seja aqui que Torricelli faz a assertiva mais direta do que ficou mais tarde sendo conhecida como lei de Torricelli. A tradução desta lei ficou consagrada na fórmula $v=\sqrt{2gh}$, onde v é a velocidade, g é a gravidade e h é a altura da superfície livre da água no reservatório em relação à abertura. Contudo, deve ser observado que esta lei não é tão óbvia, já que a água que sai do fundo de um tanque não é tão facilmente assimilável como sendo similar à queda de um pesado desde a superfície livre até o fundo do tanque. Esta lei foi importante por não somente estabelecer um método de cálculo da velocidade e, portanto, da vazão ou descarga, mas também por referir-se pela primeira vez à água em movimento. Isto justifica o importante papel de Torricelli no desenvolvimento da mecânica dos fluidos, a ponto de Ernest Mach considerá-lo como o fundador da hidrodinâmica.

11 Raffaello Magiotti (1597-1656) foi um astrônomo italiano, matemático e físico. Estudou em Florença, e, depois de ter tomado os votos, mudou-se para Roma. Em 1636, começou a trabalhar na Biblioteca do Vaticano. Foi aluno de Castelli em Roma, tendo sido indicado a Galileu por Castelli em 1638 como o candidato à cadeira de Matemática em Pisa. Demonstrou experimentalmente a hipótese de Torricelli que a velocidade média de um líquido que flui para fora da saída de fundo de um vaso é proporcional à raiz quadrada da altura, medindo a vazão através de vários tamanhos de aberturas. Apenas um trabalho seu foi impresso durante a sua vida *Renitenza dell'acqua alla compressione* (1648). Este trabalho incorpora o primeiro anúncio publicado da quase incompressibilidade da água à temperatura constante, e a expansão e contração da água e do ar de acordo com mudanças na temperatura. Ele foi um dos três favoritos seguidores, junto com Castelli e Torricelli, a quem Galileu referia-se como seu 'triunvirato' Romano. Ele manteve correspondência com Galileu, embora nunca tenha sido aluno deste em qualquer tempo.

12 $\frac{CD}{DB}=\frac{DB}{4BE}$; ou $4BE=\frac{DB^2}{CD}$. Este desenvolvimento é essencialmente geométrico, e poderá ser verificado para a tangente que passa pelo vértice da parábola (ver figura da nota de rodapé 4) e para o ponto D sobre ela, de coordenadas $(x_D;y_D)=(2h,-h)$. Neste caso, $2h=BD$ e $h=CD$. Então, o quadrado de BD será igual a $4h^2$; e como esta área é igual a área do retângulo sob CD e de lado reto igual $4BE$ $(CD \cdot 4BE=h \cdot 4BE)$; então, $4h^2=4BE$, ou $BE=h$.

13 Trata-se de um problema de aplicação da equação da continuidade e da própria lei de Torricelli.

14 Como $\frac{v_C}{v_A}=\sqrt{\frac{BC}{AB}}$; então, $\frac{v_C}{v_A}=\sqrt{\frac{BC \cdot AB}{AB \cdot AB}}=\frac{BE}{AB}$. A quantidade admitida em D, para a quantidade que admitida totalmente no vaso o encherá novamente até a marca A e não a excederá, corresponde à razão $\frac{v_C}{v_A}$.

15 Um Lema é um "pré-teorema", um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros.

16 *Momentum* (momento) é a palavra latina que na Mecânica moderna se atribui à grandeza 'quantidade de movimento', e que no texto original também se associa à palavra 'ímpeto' (*impetus*).

17 Aqui fica claro que o lema, enunciado de forma um tanto obscura, associa o espaço percorrido pelo nível em queda da água no vaso, ao espaço percorrido por um projétil lançado verticalmente para cima.

18 Torricelli se refere à média geométrica $CH=\sqrt{CG \cdot FC}$. Para a seção prismática: $\frac{v_{AE}}{v_{NO}}=\sqrt{\frac{FC}{CG}}$, ou $\frac{v_{AE}}{v_{NO}}=\sqrt{\frac{FC \cdot FC}{CG \cdot FC}}=\frac{FC}{CH}$.