Da teoria à prática: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos números complexos e suas aplicações

From theory to practice: a historical analysis of the conceptual development of complex numbers and their application

MARCIO ANTONIO DA SILVA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL | UFMS

RESUMO O trabalho trata da evolução histórica do conceito de números complexos, do surgimento de sua necessidade no contexto matemático até sua formalização e aceitação. A análise principal repousa na Idade Moderna, ou seja, o início do Renascimento europeu e a transição do feudalismo para o capitalismo, fértil período cultural que influenciou filosofia, artes e ciências, inclusive a matemática. O artigo fará uma"viagem" desde as tábuas de argila dos sumérios, há cerca de 3.700 anos, até os geradores de fractais da atualidade, mostrando o receio de matemáticos em aceitá-los, semelhantemente ao que ocorreu com os números negativos. A teoria dos números complexos aplica-se, hoje, à tecnologia, às ciências, às artes e à natureza.

Palavras-chave história da matemática, história e biografia, números complexos, desenvolvimento conceitual.

ABSTRACT *The work analyses the historical evolution of the concept of complex numbers, since when they were first needed in the mathematical context until their eventual formalization and acceptance. The main analysis comprises the Middle Ages, that is, the beginning of European Renaissance and the transition from feudalism to capitalism, a fruitful cultural period that influenced Philosophy, Arts and Sciences as well as Mathematics. The article will make a "journey" since the Sumerians' clay tablets, some 3.700 years ago, until the fractal generators of the present time, showing the mathematicians' reserve in accepting them, as it had occurred with negative numbers. Today the theory of complex numbers is applied in technology, sciences, arts and nature.*

Key words *history of mathematics, history and biography, complex numbers, conceptual development.*

Introdução

Este ensaio tem como objetivo principal apresentar a evolução histórica do conceito de números complexos, desde o surgimento de sua necessidade dentro do contexto matemático envolvido na época, até o início de sua formalização e aceitação, o que não ocorreu em um período curto.

Essa descrição histórica ocorre desde épocas remotas até o estudo de aplicações do nosso tempo, mas analisaremos principalmente a Idade Moderna, período aceito tradicionalmente pelos historiadores como tendo seu marco inicial em 1453, quando ocorreu a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos, até o término, com a Revolução Francesa, em 1789. Esse período também é caracterizado pelo início do Renascimento europeu, marcado pela transição do feudalismo para o capitalismo, em meio a um intenso movimento cultural que influenciou a filosofia, as artes e as ciências, inclusive a matemática.

O renascimento cultural manifestou-se primeiramente em algumas cidades italianas, não causando surpresa que nossa história envolva o estudo de grandes matemáticos italianos. A origem italiana desse período histórico para a cultura deve-se, em parte, pela localização da Península Itálica: por situar-se geograficamente às margens do Mediterrâneo, a Itália tornou-se um importante polo comercial e caracterizou-se, também, por suas contribuições à matemática.

Além de situar historicamente esta pesquisa, procuraremos mostrar como surgiu o conceito matemático, algo que epistemologicamente é muito mais significativo do que agregar conhecimentos ao rol de informações que já possuímos. O estudo de como evolui um conceito, das dificuldades para sua aceitação nos meios matemáticos ou entre os leigos e da necessidade de incorporação de um novo conhecimento aos conceitos já adquiridos revelou-nos a deflagração de um processo lento, que pode durar muitos séculos. A compreensão de tal processo histórico pode e deve ser útil para compreendermos as dificuldades que os alunos têm ao se confrontarem com esse novo ente matemático.

No caso específico dos números complexos, que normalmente são apresentados apenas no último ano da Educação Básica, a justificativa do seu ensino muitas vezes é associada à possibilidade de resolver equações do segundo grau com discriminante negativo. No entanto, veremos que o surgimento desse conceito não está vinculado às equações de segundo grau.

Evolução histórica do conceito de números complexos

Iniciamos nossa jornada há cerca de 3.700 anos, aproximadamente 1.700 anos antes de Cristo, estudando os sumérios, uma das civilizações mais antigas da humanidade e que se localizava na parte sul da Mesopotâmia (o Iraque da atualidade), apropriadamente posicionada em terrenos conhecidos por sua fertilidade, entre os rios Tigre e Eufrates. Como as equações representavam uma formulação matemática para resolver um problema real, não havia necessidade de aceitar ou levar em conta a resolução de radicais de números negativos.

O primeiro exemplo da negação à tentativa de operar com raízes negativas surge na obra de Heron (também escrito como Hero ou Herão) de Alexandria, que foi um sábio do começo da era cristã (10 d.C.–70 d.C.). Geômetra e engenheiro grego, Heron ficou especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área do triângulo, conhecendo-se o comprimento dos três lados do mesmo. Em sua obra intitulada *Estereometria*, surge a necessidade de realizar o cálculo $\sqrt{81-144}$ a partir do desenho de uma pirâmide. Surpreendentemente e de maneira muito natural, Heron prossegue o cálculo realizando a troca dos números, dessa forma evitando o surgimento de um radicando negativo ao fazer $\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$, cujo resultado, em seu cálculo, é aproximadamente igual a $7\frac{15}{16}$.

Outro exemplo clássico dessa omissão das raízes negativas surge na obra intitulada *Arithmetica*. Diofanto de Alexandria é considerado como o maior algebrista grego, e sua obra *Arithmetica* é uma coleção de treze livros, dos quais remanesceram apenas seis que podemos estudar atualmente, e por meio dos quais Diofanto dedicou-se à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo graus. Só uma equação cúbica muito particular é resolvida.[1]

Nessa obra, aproximadamente no ano 275 d.C., Diofanto considera o seguinte problema: "Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados".[2] De acordo com a figura 1, chamando de x e y o comprimento dos catetos do triângulo, teríamos as seguintes relações: $\frac{xy}{2}=7$ (área); $x^2+y^2=(12-x-y)^2$ (Teorema de Pitágoras).

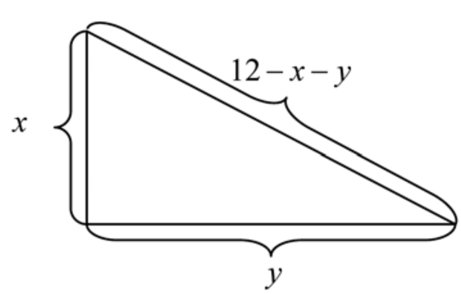


Figura 1

Substituindo y em função de x, obtemos a equação do segundo grau $24x^2 - 172x + 336 = 0$. Hoje sabemos que essa equação possui duas raízes complexas e distintas: $\frac{43-\sqrt{-167}}{12}$ e $\frac{43+\sqrt{-167}}{12}$. No entanto, Diofanto escreveu que só poderia haver solução para ela se a seguinte condição fosse satisfeita: $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 24 \times 336$. Em notação atual, pelo que concluiu Diofanto, seria de se supor que uma equação só teria solução caso $\Delta \geq 0$, ou seja, supunha ele que a solução estivesse ligada à existência de raízes reais.

Ainda no primeiro milênio da era cristã, alguns grandes matemáticos contribuíram para que houvesse uma evolução nos conceitos trabalhados por Diofanto. A matemática não era produto apenas da Europa, já que a Índia também produziu grandes matemáticos, como Brahmagupta (cerca de 630 d.C.) e Bhaskara (1114–1185). O nome desse último é conhecido até hoje, mesmo por qualquer aluno da Educação Básica, por ter uma fórmula conhecida para resolver equações do segundo grau. No entanto, essa fórmula geral foi encontrada cerca de um século antes de Bhaskara, pelo matemático hindu Sridhara (cerca de 991 d.C.), e publicada em uma obra que não chegou até nós.[3] Bhaskara percebeu a necessidade de obter duas raízes a partir de uma equação do segundo grau, em que o discriminante é positivo, mas o problema das raízes quadradas de números negativos continuou sendo um obstáculo: "O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado".[4]

Durante muitos séculos, outro ponto misterioso para os matemáticos foi a resolução de equações do terceiro grau. No início do segundo milênio da era cristã, os árabes produziram resultados significativos na resolução desses enigmas. O famoso poeta Omar Kahyyam (1044–1123) trabalhou muito com o intuito de resolver as equações do terceiro grau. Ele obteve êxito ao solucionar alguns casos particulares, inclusive alguns por construções geométricas. Entretanto, naquele momento da história, não havia nenhuma fórmula geral para solucionar equações desse tipo, e o mistério ficou no imaginário de muitos povos durante mais alguns séculos. Veremos mais adiante que a busca de uma solução para as equações de terceiro grau foi um passo decisivo para que os números complexos fossem aceitos e compreendidos.

Seguindo nossa história, já na Europa do século XIII, Leonardo de Pisa, conhecido posteriormente como Fibonacci, produziu enormes contribuições à simbologia algébrica existente, boa parte delas advindas de suas viagens ao Egito, Síria, Grécia, Sicília, sul da França e Constantinopla, onde estudou e aprendeu o método indo-arábico. Suas grandes obras foram o *Liber abaci* (1202) e *Pratica geometriae* (1220). Desafiado pelo Rei Frederico II da Germânia, que lhe propôs que resolvesse a equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ por métodos geométricos, Fibonacci provou que essa equação não poderia ser solucionada utilizando-se apenas régua não graduada e compasso, mas obteve uma solução numérica aproximada até a nona casa decimal! Embora a genialidade de Leonardo fosse colocada à prova e o desafio vencido, continuava em aberto a obtenção de uma regra geral para solucionar equações do terceiro grau.

Já no final do século XV, na mesma Itália de Fibonacci, o frade Luca Bartolomeo de Pacioli, nascido em 1445, na sua obra intitulada de *Arithmetica, geometria proportioni et propornaliti* (1494), escreveu que uma equação do segundo grau na forma $x^2 + c = bx$ só possui solução se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$, resultado semelhante ao obtido por Diofanto muitos séculos antes.

A emergência dos números complexos teve um capítulo decisivo escrito na Itália do século XVI, quando dois personagens tiveram papel de protagonistas, e suas ações, principalmente a obtenção de uma solução para as equações do terceiro grau, repercutiram por vários séculos e são estudadas até hoje: Girolamo Cardano e Niccolò Fontana.

Cardano nasceu em Pávia, Itália (1501), era filho de um jurista e exercia matemática informalmente, pois era médico por profissão. Após uma viagem para a Escócia, ocupou cadeiras importantes em universidades italianas. Além da matemática, também produzia trabalhos em astrologia, feitos inclusive para o papa, de quem recebia uma pensão. Foi preso durante um tempo, acusado de heresia por realizar uma análise astrológica de Jesus, e suicidou-se, segundo uma versão, porque havia previsto a data de sua morte e não queria contrariar sua previsão.[5]

A principal obra publicada por Cardano é, sem dúvida, a *Ars magna*, o primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente à álgebra. Como seus antecessores, Cardano também considerava que o surgimento de raízes quadradas de números negativos na resolução de um problema apenas indicava que o mesmo não tinha solução. Apesar disso, prosseguiu com os cálculos e, no capítulo 37 do *Ars magna*, ele resolveu o problema descrito abaixo:

"Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes, tal que o produto delas seja igual a 40".

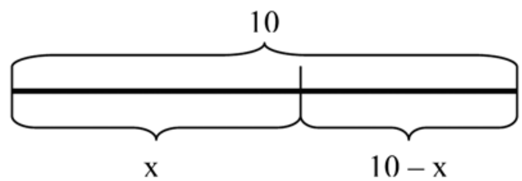


Figura 2

Se chamamos de x o comprimento de uma das partes, a outra terá comprimento $10-x$ (Figura 3), e a condição do problema se traduz na equação $x(10-x)=40$, ou seja, $x^2-10x+40=0$, cujas soluções são $x=5-\sqrt{-15}$ ou $x=5+\sqrt{-15}$. Cardano reconhece que o problema dado não tem solução, mas, curiosamente, opera com essas raízes como se fossem números, aplicando as propriedades conhecidas, e percebe que multiplicando $5-\sqrt{-15}$ por $5+\sqrt{-15}$ obtém o produto 40.[6] Pela primeira vez temos um registro histórico de uma operação realizada com números complexos, embora não fossem aceitos na época. Esse resultado mostrou-se tão absurdo para aquele tempo que, em consequência, ele chamou essas expressões obtidas de raízes sofísticas da equação e disse, a respeito delas, que eram tão sutis quanto inúteis.

Já Niccolò Fontana nasceu em Brescia, Itália (1499). Diferente de Cardano, ele tinha pais muito pobres e presenciou a tomada de sua cidade natal pelos franceses em 1512. Durante as invasões francesas, ele e seu pai refugiavam-se na catedral local, imaginando que estariam a salvo. No entanto, os soldados franceses, ignorando o local sagrado, invadiram e chacinaram todos os que encontraram pela frente. O pai de Fontana foi morto em um desses massacres, mas Niccolò conseguiu sobreviver, embora gravemente ferido por golpes de sabre. Sua mãe salvou-o a tempo e, na ausência total de medicamentos que fossem eficazes para curar as feridas, lembrou-se de que um cão machucado sempre lambe suas próprias feridas. Fez isso com seu filho, que mais tarde atribuiu sua recuperação a esse tratamento. Um grave ferimento no palato deixou-o com um defeito na fala, razão pela qual ganhou o apelido de "o gago", ou Tartaglia. Desse incidente, carregou várias cicatrizes para o resto da vida, fato que motivou o crescimento de uma grande barba para escondê-las. "Se minha barba não escondesse minhas cicatrizes, eu pareceria um monstro", escreveu ele, anos depois, em um de seus livros.[7]

Tanto Cardano quanto Tartaglia ficaram conhecidos durante muito tempo como os verdadeiros autores de um método eficiente para resolver equações do terceiro grau, mas o mérito real por essa façanha deve-se a um personagem pouco reconhecido por sua história: Scipione Del Ferro (1465–1526), que foi professor na Universidade de Bolonha, uma das mais antigas universidades medievais e uma escola com forte tradição matemática. Não sabemos como nem quando essa descoberta foi realizada, mas temos indícios de que sua façanha foi revelada a um de seus estudantes, Antonio Maria Fior, considerado um matemático medíocre.[8] Como curiosidade, cabe-nos informar que César Polcino Milies cita um segundo discípulo ao qual Scipione havia mostrado seus resultados: "Antes de morrer, Del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, Annibale della Nave – seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha – e Antonio Maria Fior (ou *Floridus*, em latim)".[9]

A matemática europeia do século XVI era desenvolvida, em parte, pela tradição existente de realização de competições abertas, realizadas em praça pública, envolvendo a troca de listas de problemas matemáticos considerados de difícil resolução. Essa prática revelou talentosos matemáticos amadores, já que não existia a profissão de matemático. Em 1535, uma dessas disputas foi entre Fior e Tartaglia, na qual cada um propôs ao outro uma coleção de trinta problemas. Tartaglia apresentou questões variadas, mas Fior escolheu todos os problemas implicando na resolução de equações do tipo $x^3 + ax = b$. Na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir uma fórmula geral para resolver esse tipo específico de equação, vencendo Fior no duelo proposto. A derrota foi agravada pelo fato de ele não conseguir resolver nenhuma das questões propostas por Tartaglia, nem mesmo um problema que recaía na resolução de uma equação de terceiro grau. A aposta realizada entre eles foi que o vencedor pagaria ao perdedor e aos seus amigos um banquete, e a quantidade de amigos convidados para a celebração seria igual ao número de problemas resolvidos pelo ganhador. Porém, Tartaglia eximiu Fior de pagar o banquete. Na verdade, esse gesto de generosidade foi uma forma sutil de desprezar o adversário. O prazer do êxito e o prestígio adquirido pela vitória pareceram ser o bastante.[10]

Espantado com a repercussão causada pela descoberta desse novo método, Cardano convidou Tartaglia para visitá-lo, em Milão, com o pretexto de apresentá-lo a um militar de prestígio, Alfonso de Ávalos (1502–1546), uma vez que Tartaglia havia adquirido certa fama realizando alguns trabalhos para os engenheiros do famoso arsenal veneziano. Estes haviam perguntado, por exemplo, qual deveria ser o ângulo de inclinação de um canhão para que o alcance do projétil fosse máximo. A resposta de Tartaglia foi 45° e surpreendeu a todos, pois ninguém acreditava que deveriam levantar tanto a boca do canhão para obter a distância máxima. Porém, através de experiências realizadas, verificaram que Niccolò estava certo. Dessa maneira, Tartaglia poderia mostrar ao militar seus estudos e invenções no campo da artilharia. Na verdade, essa foi a terceira tentativa de Cardano para convencer Niccolò a encontrá-lo. Nessa época, estava escrevendo a obra *Pratica arithmeticae generalis*, que envolvia diversos aspectos de álgebra, aritmética e geometria, e não pretendia escrever nada a respeito das equações do terceiro grau, mas, sabendo da façanha de Tartaglia, buscou convencê-lo a ensiná-lo para que publicasse o resultado em seu livro. Após muita insistência e o juramento de Cardano de que jamais publicaria seus resultados, Tartaglia comunicou seu segredo por meio de versos. Embora estranha, essa forma de divulgação deve ser compreendida no contexto da época, já que não existia a simbologia algébrica que temos hoje para expressar fórmulas. Os versos de Tartaglia[11] são reproduzidos a seguir, com sua respectiva tradução:

Quando che'l cubo con le cose appreso	Quando o cubo com as coisas em apreço
Se aggaglia a qualque número discreto	Se igualar a qualquer número discreto
Trovati due altri differenti in esso	Achados dois outros diferentes nisso
Depoi terrain questo por consueto	Depois terás isto por costume
Che'l lor produtto sempre sia eguale	Que seu produto seja sempre igual
Al terzo cubo delle cose neto	Ao cubo exato do terço das coisas
El residuo poi suo generale	E, depois, seu resíduo geral
Delli lor lati cubi ben sostratti	Das suas raízes cúbicas bem subtraídas
Verra la tua cosa principale	Será a tua coisa principal
In el secondo de coiesti aiti	Na segunda dessas operações
Quando che'l buco restasse lui solo	Quando o cubo estiver sozinho
Tu osserverai quest'altri contratti	Observarás essas outras reduções
Del número farai due, tal part'a volo	Do número farás dois, de tal forma
Cha l'uno e l'altro si produca schietto	Que um e outro produzam exatamente
El terzo delle dose in stelo	A terça parte das medidas na base
Delle qual poi, per commun precetto	Da qual, depois, por um preceito comum
Torrai li lati cubi incieme gionti	Tomarás as raízes cúbicas juntas
Et cotal somma serà it tuo concetto	E tal soma será o teu conceito
El terzo poi de questi nostri conti	Depois, a terceira dessas nossas contas
Se solve con secondo, se ben guardi	Resolve-se como a segunda, se observas bem
Che ser natura son quasi congiontri	Que suas naturezas são quase idênticas
Questi trovai, et non con passi tardi	Isto eu achei, e não com passos tardos
Nel mille conquecento quatro et trinta	Em mil quinhentos e trinta e quatro
Nella città dal mare intorno centa	Na cidade cingida pelo mar

Cardano publicou o resultado na sua obra *Ars magna*, em 1545, quebrando seu juramento. Mesmo assim, coube-lhe atribuir a devida menção da autoria a Tartaglia, acrescentando que, independentemente e trinta anos antes, Scipione Del Ferro chegara aos mesmos resultados. Inconformado com o fato, Tartaglia iniciou um grande período de troca de insultos a Cardano, o que aumentou a rivalidade e alimentou o ódio entre ambos. Historicamente, como agora vimos, a fórmula para resolução de equações do terceiro grau é injustamente conhecida como Fórmula de Cardano, e a demonstração com notação moderna é feita no Apêndice I. Parece repetir-se uma história semelhante à de Bhaskara para a fórmula geral da solução da equação do segundo grau, pois o verdadeiro autor da fórmula geral para resolver equações quadráticas foi o matemático hindu Sridhara.

Nesse momento, entraria em cena um novo personagem, Ludovico Ferrari, que era secretário pessoal de Cardano. Embora jovem, Ferrari havia aprendido grego, latim e matemática, e pouco a pouco deixava de ser secretário para tornar-se colega e amigo de Cardano. No ápice das contendas entre Cardano e Tartaglia, Ferrari intercedeu por seu mestre, no dia 10 de fevereiro de 1547. Respondeu às queixas de Tartaglia por meio de um cartaz. Os cartazes eram uma espécie de cartas públicas, impressas e distribuídas a todos os que tinham algo a opinar sobre determinado assunto. Ferrari não enviou o primeiro cartaz somente a Tartaglia, mas a todos os matemáticos conhecidos da época. No cartaz, Ferrari não só defendia Cardano das acusações feitas por Niccolò, mas também o atacava frontalmente. Entre os ataques, podemos destacar a acusação de plágio de algumas obras de Cardano e do próprio Ferrari e um convite para um novo desafio público, agora sobre "Geometria, Aritmética e as disciplinas que delas dependem, como Astrologia, Música, Cosmografia, Perspectiva, Arquitetura e outras".[12]

Tartaglia deu sua resposta por intermédio de outro cartaz, publicado em 19 de fevereiro, insinuando que a acusação era feita por Cardano, mas apenas repassada por Ferrari. As mensagens públicas, na forma de cartazes, foram em um total de doze, seis de Ferrari e seis de Tartaglia, publicadas ao longo de um ano e meio. Finalmente, em 21 de abril de 1547, Tartaglia iniciou um novo duelo, enviando 31 problemas para seu desafiante. Em um cartaz de resposta, publicado em 24 de maio, Ferrari lhe enviou outros 31 problemas sobre assuntos diversos, não só matemáticos, como a questão 22, que pedia uma exposição sobre as ideias contidas em uma passagem do *Timeu* de Platão, causando posteriormente um protesto formal realizado por Tartaglia, que alegava que aquele problema não tinha caráter matemático.[13]

A sessão pública do duelo aconteceu perante uma grande multidão. Entre as pessoas presentes, muitas personalidades da cidade, incluindo o novo governador de Milão, Ferrante Gonzaga, o sucessor do Marquês de Vasto, que atuava como juiz. Diante de tantas personalidades, a ausência de uma delas foi notável: Cardano. As discussões sobre um problema de Ferrari que Tartaglia não havia resolvido estenderam os trabalhos até o dia seguinte. Para essa nova sessão de debates, Niccolò se ausentaria, fazendo com que Ferrari fosse declarado vencedor. Mais tarde, Tartaglia escreveria que sua ausência justificava-se pela influência que os presentes exerciam para uma vitória de Ferrari. Howard Eves, eminente historiador matemático, escreveu que Tartaglia teve sorte ao sair com vida de Milão.[14] Ferrari, aos 26 anos de idade, ganhou notoriedade e fez com que fosse considerado com um nível intelectual muito superior ao de seu adversário, mas a real grande vitória foi de seu amigo e mestre, Girolamo Cardano.

A obra de Cardano serviu de inspiração para muitos outros matemáticos interessados na solução de equações. Raphael Bombelli (1526-1573) era um dos grandes entusiastas pelo estudo da *Ars magna*, porém achava a obra um pouco obscura ou incompreensível em certas passagens. Decidiu, então, escrever seu próprio livro, sem novidades em termos de conhecimentos matemáticos, mas buscando uma linguagem mais clara e acessível. Publicou *L'algebra parte maggiore dell'arithmetica*, em três volumes, em 1572, um ano antes da morte de Cardano. No capítulo II dessa obra, ele estudou a resolução de equações do terceiro grau. A partir da página 294, ele buscou aplicar a fórmula de Cardano para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$. Na conclusão de sua resolução, obteve a raiz $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Como fez Cardano, ele também chamou essa raiz de sofística, mas, por outro lado, percebeu algo que seus antecessores não perceberam: $x = 4$ é uma solução da equação proposta. De fato, $4^3 = 15 \times 4 + 4$.

Esse fato histórico marcou a matemática por colocá-la em cheque. Ora, pela matemática que se fazia até então, a equação não tinha solução, porém verificava-se facilmente que isto seria contraditório, já que 4 seria uma solução. Bombelli buscou uma explicação para esse fato e concebeu a possibilidade de que existiria uma expressão da forma $a+\sqrt{-b}$ que pudesse ser considerada como raiz cúbica de $2+\sqrt{-121}$, ou seja, que verificasse a igualdade $\left(a+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$. Conforme ele mesmo revelou, seu método baseou-se no "pensamento rude", segundo o qual $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, respectivamente. Como sabia que 4 deveria ser raiz da equação, necessariamente $a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=4$. Como, nesse caso, basta aplicar a propriedade do oposto, na qual a soma de um número com seu oposto é igual a zero, não precisava preocupar-se com o "significado" de $\sqrt{-b}$, chegando à conclusão que $a=2$. Com tal resultado, deduziu que $b=1$, manipulando a equação $\left(a+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$. Dessa maneira, verificou que $x=4$ era uma solução da equação dada e percebeu claramente a importância de sua descoberta:

> *Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i. e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.*[15]

Ele utilizou a expressão *più di meno* para se referir ao que conhecemos hoje como $+i$, a unidade imaginária, e *meno di meno*, para $-i$. Como se não bastassem todas essas novas e revolucionárias contribuições, também enunciou regras operatórias criadas por ele. Abaixo reproduzimos a linguagem utilizada em sua obra com as respectivas representações atuais:[16]

Più via più di meno, fa più di meno	$+(+i) = +i$
Meno via più di meno, fa meno di meno	$-(+i) = -i$
Più via meno di meno, fa meno di meno	$+(-i) = -i$
Meno via meno di meno, fa più di meno	$-(-i) = +i$
Più di meno via più di meno, fa meno	$(+i)(+i) = -1$
Più di meno via meno di meno, fa più	$(+i)(-i) = +1$
Meno di meno via più di meno, fa più	$(-i)(+i) = +1$
Meno di meno via meno di meno, fa meno	$(-i)(-i) = -1$

Acrescente-se à descoberta dessas relações o fato de Bombelli não dispor das notações modernas que possuímos atualmente. Ele utilizava p (*plus*) para indicar a soma; m (*minus*) para a subtração; R (*radix*) para raiz quadrada e R^3 para a raiz cúbica. Também não dispunha de parênteses, pois nos seus manuscritos sublinhava expressões para indicar quais os termos fariam parte do radicando. Dessa maneira, a expressão $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ era escrita na forma $R^3\underline{\left|2pR\underline{\left|0-121\right|}\right|}$. Interessante perceber que não se escrevia diretamente um número negativo, pois ele escreveu -121 como $\underline{0-121}$, demonstrando que a aceitação dos números negativos também foi um grande marco histórico, porém não o contemplaremos neste ensaio. Portanto, a solução da equação que originou o estudo dos números complexos, na notação da época de Bombelli, seria $R^3\underline{\left|2pR\underline{\left|0-121\right|}\right|}\ p\ R^3\ \underline{\left|2mR\underline{\left|0-121\right|}\right|}$.

Podemos concluir que foi na obra de Cardano que primeiro surgiram os números que ficaram conhecidos como complexos, mas foi Bombelli quem teve a destreza de estabelecer regras para operar com esses números, contribuindo de forma determinante para o seu desenvolvimento.

Importante ressaltar que, embora parecesse natural que a primeira introdução dos números complexos pudesse ter ocorrido na equação do segundo grau, pois é aí que aparece pela primeira vez um caso de impossibilidade no conjunto dos reais, tal não se verificou. Como acabamos de constatar, eles foram criados para resolver um tipo particular de equação de terceiro grau.

Na segunda metade do século XVI e início do século XVII, a Europa ocidental já havia recuperado parte das principais obras matemáticas da Antiguidade. Os avanços no campo da álgebra eram visíveis, em parte devido à assimilação do trabalho realizado pelos árabes. A resolução de equações do terceiro grau era dominada graças às realizações de Scipione Del Ferro, Cardano e Tartaglia, embora considerando toda a polêmica envolvida nos episódios já relatados. A resolução geral de equações de quarto grau já era conhecida e foi publicada pelo próprio Cardano no *Ars magna*, porém essa glória foi devidamente reconhecida como um trabalho realizado por Ludovico Ferrari (1522–1560), discípulo e aluno de Cardano, o qual lhe conferiu a incumbência de resolver a equação $x^4+6x^2-60x+36=0$. Superando as expectativas de seu mestre, Ferrari não só encontrou as quatro raízes $(-3,-2,1,4)$, como obteve uma fórmula geral. Com tais resultados disponíveis, mais uma geração de grandes matemáticos contribuiu no período de transição entre o Renascimento e a Modernidade: dois desses homens, Galileu Galilei (1564–1642) e Boaventura Cavalieri (1598–1647), vieram da Itália; vários outros, como Henry Briggs (1561–1639), Thomas Harriot (1560–1621) e William Oughtred (1574–1660), eram ingleses; dois deles, Simon Stevin (1548–1620) e Albert Girard (1590–1633), eram flamengos; outros vieram de vários países – John Napier (1550–1617) da Escócia, Jobst Bürgi (1552–1632) da Suíça, e Johann Kepler (1571–1630) da Alemanha. A maior parte da Europa ocidental participava agora do desenvolvimento da matemática, mas a figura central e mais magnífica na transição foi um francês, François Viète (1540–1630) ou em latim *Franciscus Vieta*.[17]

Após esse período de transição, surgiu o trabalho que viria a reacender a chama acesa por Bombelli. Em uma tentativa de buscar uma legitimação dos números complexos, por uma interpretação geométrica dos mesmos, John Wallis (1616–1703) publicou um tratado intitulado *Algebra*. Contemporâneo de Newton e professor da Universidade de Oxford, Wallis discutiu, no capítulo LXVI de sua obra, a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e comparou essa questão com a da existência de quantidades negativas:

Essas quantidades imaginárias (como são frequentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando aparecem) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível. E assim é, de fato, no sentido escrito do que foi proposto. Pois não é possível que qualquer número (negativo ou afirmativo), multiplicado por si mesmo, possa produzir (por exemplo) – 4. Pois sinais iguais (tanto + quanto –) produzirão +; e portanto não – 4.

Mas também é impossível que qualquer quantidade (embora não um suposto quadrado) possa ser negativa. Pois não é possível que qualquer magnitude possa ser menos que nada, ou qualquer número menor que nada. Porém, não é esta suposição (das quantidades negativas) nem inútil nem absurda, quando corretamente compreendida. E, embora para a simples notação algébrica representa uma quantidade menor do que nada, quando se trata de uma aplicação física, denota uma quantidade tão real como se o sinal fosse +; mas interpretada no sentido contrário.[18]

Aprisionado à tentativa de uma explicação concreta para as raízes quadradas de números negativos, Wallis publicou uma interessante interpretação envolvendo áreas que, por motivos óbvios, não causou repercussão:

Suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo, a resposta é 10 acres, ou +10 (pois 30 – 20 = 10).

... Mas se num terceiro local perdemos mais 20 acres, a resposta deve ser –10 (pois 30 – 20 – 20 = –10)... Mas agora, supondo que esta planície negativa de – 1600 square perches [20 acres correspondem a 1600 square perches, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E, assim, qual será esse lado? Não podemos dizer que é 40, nem – 40.

... Mas sim que é $\sqrt{-1600}$ *(a suposta raiz de um quadrado negativo) ou* $10\sqrt{-16}$ *ou* $20\sqrt{-4}$ *ou* $40\sqrt{-1}$.[19]

Quase concomitante aos trabalhos feitos por Wallis, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) também produzia pesquisas eminentes no campo que se chamaria cálculo diferencial e integral. Dentre as contribuições consideradas secundárias de Leibniz, estão seus comentários sobre números complexos. Como exemplo, podemos citar a fatoração realizada por ele, da expressão $x^4 + a^4$ em $\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$, e a demonstração de uma decomposição imaginária de um número real positivo que surpreendeu a todos: $\sqrt{6} = \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$. No entanto, Leibniz não escreveu as raízes quadradas de números complexos na forma complexa padrão, nem conseguiu provar sua conjectura que $f\left(x+\sqrt{-1}y\right) + f\left(x-\sqrt{-1}y\right)$ é real se $f(z)$ é um polinômio real. Como Leibniz era teólogo, sua concepção de número complexo emergiu nesse caldeirão cultural e social no qual estava inserido. Em uma de suas observações acerca do assunto, Leibniz citou que os números imaginários eram uma espécie de anfíbio, a meio caminho entre existência e não-existência, assemelhando-se nisso ao Espírito Santo na teologia cristã.[20]

Já no século XVIII, dois grandes homens fizeram história e traçaram marcos fundamentais para o avanço nos estudos matemáticos: Leonhard Euler (1707–1783) e Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783). A coincidência no trabalho desses homens vai muito além do ano de suas mortes e da paixão pela matemática, pois eles contribuíram grandemente para o desenvolvimento do conceito de números complexos.

Euler foi um dos maiores matemáticos da história. Ao final de sua vida, já havia escrito cerca de 900 tratados, livros e estudos. Para que se tenha ideia do volume e da velocidade de sua produção, conta-se que, após a sua morte, o jornal da Academia de Ciências de São Petersburgo, onde ele trabalhou por mais de três décadas, ainda demorou 48 anos para publicar o que havia se acumulado de seus apontamentos. Entre muitos outros trabalhos, Euler foi o primeiro matemático a criar fundamentação sólida para a teoria dos números complexos.[21] Conhecido como o maior criador de simbologia matemática de todos os tempos, Euler utilizou o símbolo i para $\sqrt{-1}$, embora essa notação fosse utilizada por ele somente no final de sua vida, em 1777. Justifica-se a utilização tardia dessa notação que conhecemos até hoje, pelo fato de que em suas primeiras obras ele usara i para representar um "número infinito". Assim, Euler escrevia $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$ onde escrevemos, atualmente, $e^x = \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h$. Na verdade, embora Euler usasse i para $\sqrt{-1}$ num manuscrito datado de 1777, este só foi publicado em 1794. Os três símbolos: e, π, i, pelos quais Euler é em grande parte responsável, podem ser combinados com os dois inteiros mais importantes, 0 e 1, na célebre e maravilhosa igualdade $e^{\pi i} + 1 = 0$. O equivalente dessa igualdade, em forma generalizada, fora incluído por Euler, em 1748, em sua obra mais conhecida, intitulada *Introductio in analysin infinitorum*.[22]

D'Alembert foi o primeiro grande matemático francês da era que sucedeu eminentes gênios que contribuíram para o cálculo, como Newton e Leibniz. Filho ilegítimo da marquesa de Tencim com o general Destouches, ele foi abandonado recém-nascido na porta da igreja de *Saint Jean le Rond*, em Paris, na noite de 16 de novembro de 1717. Seu pai biológico deixou-lhe uma quantia suficiente para custear seus estudos, após sua morte em 1726. Esse investimento não poderia ser mais bem empregado, pois aos 12 anos D'Alembert entrou no Collège Mazarin, onde teve como mestre o famoso professor Pierre Varignon (1654–1722), conhecido por divulgar o novo cálculo que nascia e por tentar várias vezes, embora em vão, uma conciliação entre Newton e Leibniz, após as acirradas discussões sobre a paternidade desses novos e históricos resultados matemáticos.

Assim como Euler, D'Alembert tinha uma cultura vastíssima, pois estudava direito, medicina, matemática e ciência. Com muitos interesses em comum, D'Alembert e Euler trocaram correspondências sobre vários assuntos. Enunciados como $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$, equivalentes a $2\log(-1) = 2\log(+1)$ ou a $\log(-1) = \log(+1)$ tinham intrigado os melhores matemáticos do começo do século dezoito, mas em 1747 Euler escreve a D'Alembert explicando que os logaritmos dos números negativos não são reais, como D'Alembert acreditava, mas imaginários puros. A expressão "imaginário puro" já fazia sentido naquela época, pois os termos real e imaginário foram empregados pela primeira vez por René Descartes, em 1637, e o próprio D'Alembert, em 1747, publicou *Refléxions sur la cause générale des vents*, em que afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo é da forma $a + b\sqrt{-1}$.[23] D'Alembert permaneceu trabalhando ativamente em Paris, enquanto Euler se ocupava de pesquisa matemática em Berlim, até que, em 1757, controvérsias sobre o problema das cordas vibrantes ocasionaram um afastamento entre os dois, acabando com a troca de correspondência entre eles.[24]

A expressão $(a+bi)^{c+di}$ foi objeto de estudo tanto de Euler como de D'Alembert. O primeiro demonstrou que essa expressão pode ser escrita como um número complexo $p+qi$. Já o segundo, considerando a mesma expressão, diferenciou-a como uma função, antecipando parte dos estudos que formariam a teoria das variáveis complexas, desenvolvida no século XIX.

A existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida em 1748, quando Euler demonstrou que $(\cos\phi + i\ \mathrm{sen}\phi)^n = \cos(n\phi) + i\ \mathrm{sen}(n\phi)$, conhecida como fórmula de *De Moivre*, embora o próprio Abraham De Moivre (1667 –1754) tenha se limitado a casos particulares e nunca chegou a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral. Euler fez mais que demonstrar a conjectura de De Moivre para n inteiro, ele provou que a igualdade é válida para todo n real!

Porém, a aceitação dos números complexos veio com os trabalhos de um genial matemático alemão: Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), conhecido como o príncipe dos matemáticos. Muitos o consideram como o maior gênio da história da matemática. Gauss nasceu em Brunswick em 1777, filho de um trabalhador braçal que infelizmente não conseguiu compreender os anseios intelectuais do filho. Felizmente, sua mãe Dorothea, também mulher humilde e inculta, não poupou esforços para que o seu filho tivesse o desejado acesso aos estudos. É dela uma das histórias mais propagadas, porém jamais comprovada, sobre um episódio ocorrido em sua infância. Segundo tal história, o professor de Gauss, quando ele tinha dez anos, propôs que o discípulo somasse os números inteiros de 1 a 100. Gauss respondeu rapidamente que a resposta era 5050, mas sem escrever nenhum cálculo. Ele havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1+2+3+...+98+99+100$ observando que $100+1=101$, $99+2=101$, $98+3=101$ e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto $50\times101=5050$.[25]

Foi por Gauss (1777–1855) ter adotado o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$ em seu clássico *Disquisitiones arithmeticae*, em 1801, que seu lugar ficou assegurado entre as notações matemáticas. E, como complemento à fixação do i como notação para os números complexos, cabe assinalar que a obra desse gênio foi extremamente importante por associar os números complexos a pontos reais no plano. Na verdade, Caspar Wessel (1745–1818) e Jean Robert Argand (1768–1822) também tiveram importante atuação nesse assunto, embora não fossem matemáticos. Hoje, parece não haver dúvida de que a prioridade da ideia cabe a Wessel, com um artigo apresentado à Real Academia Dinamarquesa de Ciência, em 1797, e publicado nas Atas dessa Academia, em 1799. A contribuição de Argand figura num artigo publicado em 1806, e mais tarde (em 1814) apresentado nos *Annales de Mathématiques* de Gergonne. Mas o artigo de Wessel permaneceu incógnito por cerca de 98 anos depois de escrito. Só foi republicado 100 anos após a publicação original, quando sua importância foi reconhecida por toda a comunidade matemática. Esse fato explica por que o plano complexo ficou conhecido como Plano de Argand, ao invés de Plano de Wessel.[26]

Assim como o trabalho de Wessel, o próprio trabalho de Argand não teve grande repercussão na época. Os resultados de seus trabalhos só foram propagados e amplamente aceitos após a contribuição de Gauss encontrada numa memória apresentada à Sociedade Real de Göttingen, em 1831. Gauss fez questão de afirmar que aquela não era uma ideia nova, pois a mesma representação poderia ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799. Atualmente, muitos livros didáticos reproduzem essa representação com o nome de Plano de Argand-Gauss.

A utilização de uma representação geométrica para os números complexos parece torná-los, finalmente, aceitos e mais bem compreendidos. "Em outras palavras, parece que, para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de realidade que faltava aos objetos da aritmética".[27]

Encerrando este passeio histórico sobre a evolução do conceito de número complexo, citamos que a formalização desses números como pares ordenados de reais foi desenvolvida por William Rowan Hamilton (1805–1865) e seu Tratado comunicado à Academia Real Irlandesa em 1833. Dessa forma, Hamilton elimina de vez qualquer aura mística que poderia ainda envolver esse conceito, pois não há nada místico num par ordenado de números reais. Este foi um grande feito matemático de Hamilton.[28]

Ainda no século XIX, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) foi um grande representante do avanço na matemática moderna, por introduzir o rigor na análise matemática. A representação em duas dimensões para um número complexo não era suficiente para representar graficamente a relação de duas funções complexas, pois isso só seria possível através de quatro dimensões. Além disso, a teoria da variável complexa contém um grau de abstração e complexidade maior do que o estudo de funções de uma variável real. As definições e regras de derivação, por exemplo, não se transportam imediatamente do caso real para o complexo, e a derivada, neste caso, já não é representada como a inclinação da tangente a uma curva. Abandonar a representação gráfica e apoiar-se em conceitos rigorosos e bem definidos era uma necessidade para desenvolver a teoria do cálculo de funções complexas. Essa foi uma das maiores contribuições de Cauchy, outro grande responsável, juntamente com Hamilton, pela formalização dada aos números complexos.

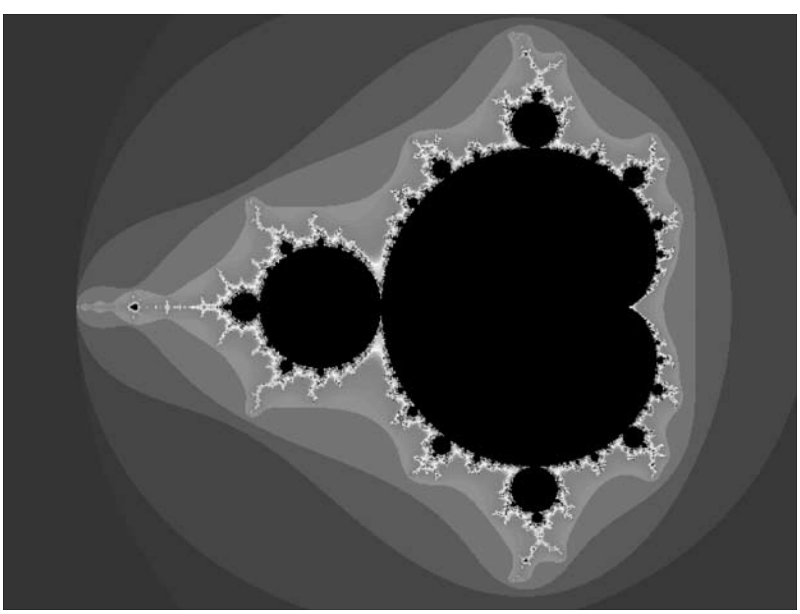
Da teoria à prática

Até este momento, vimos o nascimento e a evolução de um conceito matemático, porém sem buscar aplicações práticas, como parece ser uma necessidade marcante de nossa sociedade. No caso dos números complexos, parece-nos que a teoria tem como finalidade a prática, ou seja, não foi necessária uma motivação prática para que o conhecimento teórico fosse desenvolvido e impulsionado. A teoria é determinada, nesse caso, por uma prática da qual ainda não pode nutrir-se efetivamente.[29]

Atualmente, qualquer estudante de tecnologia convive diariamente com a teoria dos números complexos. Eles aparecem no estudo de circuitos, na corrente e na tensão elétrica, na potência, na impedância, na equação de onda que rege o movimento dos elétrons, na equação de normalização que tem um papel importante na mecânica quântica, entre outras aplicações.

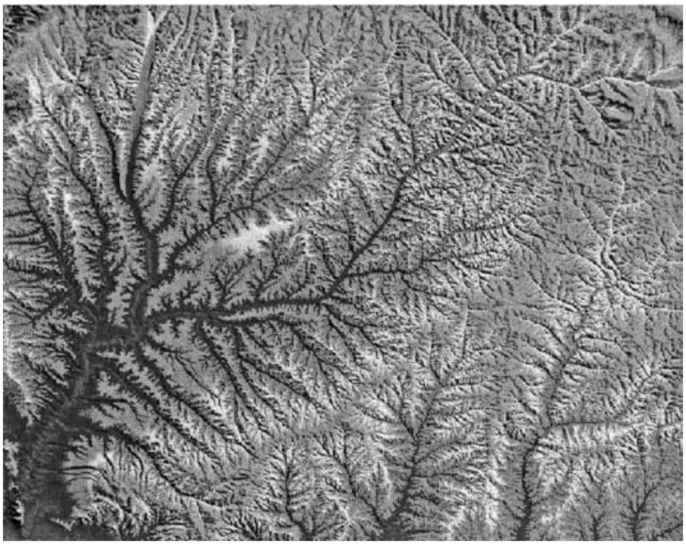
Mas uma das mais belas aplicações dos números complexos remonta à sua representação gráfica e não ao formalismo de equações rigorosas. Ao representarmos simples equações de números complexos, utilizando o princípio computacional da recorrência e a moderna Teoria dos Fractais, obtemos figuras belíssimas, que parecem reproduzir fenômenos e formas da natureza, com todas as combinações possíveis entre simetria e caos.

O estudo dos fractais gerou uma nova geometria não-euclidiana, a geometria fractal, originada das pesquisas de Benoît B. Mandelbrot, nascido em Varsóvia, Polônia, no dia 20 de novembro de 1924. Mandelbrot, sobrinho de um integrante do grupo Bourbaki, que buscava a reconstrução da matemática francesa, não suportou o predomínio da abstração imposta por aquela influência, indo estudar ciência aeroespacial nos Estados Unidos, tendo conseguido posteriormente um cargo na IBM.[30]



Fonte: http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/cnumerico/recursos/fractales.html

Uma das figuras mais conhecidas na geometria fractal ficou conhecida como Conjunto de Mandelbrot (figura ao lado) que é calculado da maneira recorrente, pela equação $z_n = z_{n-1}^2 + C$, onde C representa coordenadas no plano complexo. Na primeira iteração, z é inicializado com a origem $(0,0)$; a partir daí, C continua fixo e z recebe o valor da iteração anterior.



Fonte: http://w3.ualg.pt/~lnunes/Pessoal/Disciplinas/Modelacao-texto.htm

A partir da segunda metade do século XX, com a possibilidade de contarmos com recursos tecnológicos e com sua rápida evolução, foram criados geradores de fractais, muitos deles utilizando equações complexas para gerá-los. Essa aplicação revoluciona o olhar matemático e relaciona essa ciência com as artes, como um novo renascimento. A Figura ao lado é um exemplo da utilização desses geradores para a criação de redes hidrográficas. Ao mesmo tempo que parece caracterizar um mapa hidrográfico, podemos imaginar as raízes de uma planta cravadas no solo, ou as veias e artérias de algum órgão animal. É impressionante a variedade de formas e sua semelhança com o real, obtidas a partir dos números complexos.

É possível que este seja apenas o começo de uma série de descobertas de aplicações desse fascinante conceito que permeou o imaginário de muitos povos, demonstrando-se um obstáculo que durou séculos para ser transposto, até as belas e importantes aplicações e implicações em nossa era.

Considerações finais

Realizamos uma rica e maravilhosa viagem, desde as tábuas de argila dos sumérios, há cerca de 3.700 anos, culminando nos geradores de fractais e sua impressionante retratação da natureza.

Sem dúvida, o conceito de número complexo caracterizou um obstáculo epistemológico na história da matemática. Grandes matemáticos recearam aceitá-los, de maneira semelhante à forma como fizeram com os números negativos. Por isso, não nos causa surpresa o fato de tal conceito ser de difícil compreensão para alunos do Ensino Médio na Educação Básica. Talvez a dificuldade esteja no formalismo, pois, na direção contrária do formalismo, ao ver a figura artística gerada por um fractal, é impossível não contemplá-la nem se interessar por esse assunto.

Vimos que o problema histórico que originou os números complexos deu-se no estudo da equação de terceiro grau $x^3 = 15x + 4$, brilhantemente trabalhada por Bombelli. Porém, não podemos nos esquecer dos trabalhos magníficos de Scipione Del Ferro, Cardano e Tartaglia, e os grandes duelos do século XVI.

Euler, com toda a sua genialidade, colaborou para que o conceito fosse desenvolvido e reuniu duas belíssimas teorias em uma fórmula que não levou seu nome, $(\cos\phi + i \ \mathrm{sen}\phi)^n = \cos(n\phi) + i \ \mathrm{sen}(n\phi)$, e que uniu os números complexos à trigonometria. Não é à toa que alguns livros didáticos trazem essa importante relação e sabemos que é artificial estudar tais campos separadamente.

A preocupação com uma representação geométrica fez com que os estudos de Wessel, Argand e Gauss se tornassem referência e contribuíssem para uma definitiva aceitação dos números complexos no mundo matemático.

Finalmente, chegamos à formalização desse conceito, algo que ocorreu somente no século XIX, por Hamilton e Cauchy, separadamente.

As aplicações do conceito de número complexo parecem mostrar que a teoria chega hoje, após muitos séculos do início do seu desenvolvimento, ao momento de ser aplicada na tecnologia, nas ciências, mas também nas artes e em uma forma magnífica e nova de apreciação da natureza.

Notas e referências bibliográficas

Marcio Antonio da Silva é doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP e professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. E-mail: marcio.silva@ufms.br

1 EVES, Howard Whitley. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004, p. 207.

2 MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 24, p. 5-15, 1993, p. 6.

3 GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006, p. 25.

4 MILIES, op. cit., 1993, p. 7.

5 EVES, op. cit., 2004, p. 306.

6 MILIES, op. cit., 1993, p. 7.

7 GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007, p. 25.

8 BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1974, p. 194.

9 MILIES, César Polcino. A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 25, p. 15-22, 1994, p. 15.

10 CASALDERREY, Francisco Martin. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Madri: Nivola, 2000, p. 95.

11 TARTAGLIA, Niccolo. *Quesiti et inventioni* diverse, 1959 apud MILIES, op. cit., 1994, p. 18-19.

12 CASALDERREY, op. cit., 2000, p. 103.

13 CASALDERREY, op. cit., 2000, p. 105.

14 CASALDERREY, op. cit., 2000, p. 106.

15 BOMBELLI, Rafael. *L'Algebra*. Milão: Feltrinelli, 1966 apud MILIES, op. cit., 1993, p. 8-9.

16 BOMBELLI, op. cit., 1966 apud MILIES, op. cit., 1993, p. 9.

17 BOYER, op. cit., 1974, p. 207.

18 SMITH, David Eugene. *A source book in mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1929 apud MILIES, op. cit., 1993, p. 10.

19 SMITH, op. cit., 1929 apud MILIES, op. cit., 1993, p. 11.

20 BOYER, op. cit., 1974, p. 280.

21 GARBI, op. cit., 2006, p. 176-177.

22 BOYER, op. cit., 1974, p. 305.

23 MILIES, op. cit., 1993, p. 10-11.

24 BOYER, op. cit., 1974, p. 309.

25 EVES, op. cit., 2004, p. 519.

26 EVES, op. cit., 2004, p. 522.

27 MILIES, op. cit., 1993, p. 15.

28 EVES, op. cit., 2004, p. 549.

29 VÁZQUEZ, Adolfo Sánchez. *Filosofia da práxis*. Tradução de Luiz Fernando Cardoso. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1977 apud SILVA, Marcio Antonio. *A atual legislação educacional brasileira para formação de professores: origens, influências e implicações nos cursos de Licenciatura em Matemática*. São Paulo, 2004. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, p. 51.

30 BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p. 11. Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand

[Artigo recebido em 06/2010 | Aceito em 10/2010]