Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand[1]

A translation of the original proof of Bertrand's theorem

FILADELFO CARDOSO SANTOS
VITORVANI SOARES
ALEXANDRE CARLOS TORT
Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro | UFRJ

RESUMO Apresenta-se aqui uma tradução da demonstração original de um teorema que se deve a J. Bertrand e que diz respeito às leis de atração que admitem órbitas fechadas e limitadas para condições iniciais arbitrariamente escolhidas.

Palavras-chave mecânica clássica, forças centrais, órbitas.

ABSTRACT *A beautiful theorem due to J. L. F. Bertrand concerning the laws of attraction that admit bounded closed orbits for arbitrarily chosen initial conditions is translated from French into Portuguese.*

Key words *classical mechanics, central forces, orbits.*

Introdução

Em 1873, Joseph Bertrand publicou uma curta, porém importante, memória na qual demonstrava a existência de apenas dois campos centrais para os quais todas as órbitas radialmente limitadas eram fechadas, a saber: a lei newtoniana da gravitação universal, que Bertrand designava como a lei da natureza, e o oscilador harmônico isotrópico.[2]

Considerado uma criança prodígio, Joseph Louis François Bertrand nasceu em 11 de março de 1822 e foi admitido na École Polytechnique aos 17 anos de idade. Fez uma brilhante carreira acadêmica e tornou-se professor titular do Collège de France em 1822, sucedendo a Jean Baptiste Biot como professor de física e matemática. Além de se dedicar à astronomia, Bertrand também trabalhou em teoria dos números, geometria diferencial, teoria das probabilidades e termodinâmica. Ele escreveu vários livros sobre esses temas e, dentre eles, o livro *Les fondateurs de l'astronomie moderne: Copernic, Tycho Brahé, Kepler, Gallilée, Newton* foi recentemente traduzido para o português.[3]

O teorema de Bertrand relativo às leis de atração foi apresentado pela primeira vez nas *Comptes Rendus* das sessões da Academia de Ciências dedicadas às memórias e comunicações dos membros e correspondentes da academia. Em razão dessa degenerescência adicional, não é de estranhar que as propriedades essenciais desses dois campos centrais tivessem sido estudadas por Newton. Newton refere-se ao oscilador harmônico isotrópico na proposição X do Livro I, e a lei do inverso do quadrado na proposição XI.[4] Newton demonstra que ambos os campos dão origem a uma órbita elíptica com a diferença que, no primeiro caso, a força aponta para o centro geométrico da elipse e, no segundo, para um dos focos. O resultado de Bertrand, conhecido como teorema de Bertrand, continua a fascinar antigas e novas gerações de estudantes da mecânica newtoniana, e não deve ser surpresa saber que novos trabalhos sobre o tema continuam a aparecer na literatura. Como exemplo de demonstrações perturbativas, o leitor pode consultar Greenberg, 1966; Tikochinsky, 1988; Brown, 1978; Zarmi, 2002. Podemos também encontrar na literatura demonstrações semelhantes àquela do trabalho original de Bertrand, como Greenberg, 1966; Arnold, 1974; Goldstein & Poole & Safko, 2002.[5] A demonstração de Bertrand é ao mesmo tempo concisa, elegante e não-perturbativa, ao contrário do que poderíamos ser levados a crer em razão do número de demonstrações alternativas que apelam para técnicas perturbativas.

Recentemente, apresentamos um método para a determinação do ângulo apsidal a partir de um campo de força central arbitrário e mostramos sob quais condições esse ângulo independe da energia e do momento angular e leva a órbitas fechadas.[6] Como consequência, reobtivemos o teorema de Bertrand. Dado o interesse e a relevância desse teorema, os autores concluíram ser pertinente a sua tradução para a nossa língua, na firme crença de que é importante para a nossa evolução cultural e científica a disponibilidade de versões em língua portuguesa de trabalhos e livros que são patrimônio da humanidade como um todo.

A sessão em que Bertrand apresentou sua memória foi realizada na segunda-feira, 20 de outubro de 1873, sob a presidência do sr. de Quatrefages. Na presente tradução, mantivemos a numeração original das equações. O leitor atento observará que a maior parte das equações não está numerada e que, entre a equação (4) e a equação (6), há várias equações, nenhuma delas numerada. Procuramos manter também, na medida do possível, a notação original.

Mecânica analítica – Teorema relativo ao movimento de um ponto atraído para um centro fixo; pelo sr. J. Bertrand

As órbitas planetárias são curvas fechadas; esta é a causa principal da estabilidade do nosso sistema, e essa circunstância importante resulta da lei da atração que, quaisquer que sejam as circunstâncias iniciais, faz mover segundo uma circunferência de uma elipse cada corpo celeste que não é expulso de nosso sistema. Até agora não foi notado que a lei de atração newtoniana é a única que preenche essa condição.

Entre as leis de atração que supõem a ação nula a uma distância infinita, aquela da natureza é a única segundo a qual um móvel lançado arbitrariamente, com uma velocidade inferior a certo limite e atraído em direção a um centro fixo descreve necessariamente em torno desse centro uma curva fechada. Todas as leis de atração permitem órbitas fechadas, mas a lei da natureza é aquela que as impõe.

Demonstra-se esse teorema da seguinte maneira: seja φ (r) a atração exercida a uma distância r sobre a molécula[7] considerada e dirigida em direção ao centro da atração que tomaremos como origem das coordenadas. Denotando por r e θ as duas coordenadas polares do móvel, temos, em virtude de uma fórmula bem conhecida,

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right)$$

e, fazendo $\frac{1}{r} = z$,

$$r^2\varphi(r) = \psi(z), \quad (1)$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0\,,$$

Multipliquemos os dois membros por *2 dz* e integremos. Fazendo

$$2\int \psi(z)dz = \tilde{\omega}(z) \qquad (2)$$

teremos

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}\tilde{\omega}(z) - h = 0\,,$$

sendo h uma constante.

Disso deduz-se que

$$d\theta = \pm\frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\tilde{\omega}(z) - z^2}}\,.$$

Se a curva representada pela equação que relaciona z com θ é fechada, o valor de z terá máximos e mínimos

para os quais $dz/d\theta$ será nula, e os raios vetores correspondentes, normais à trajetória, serão para ela necessariamente eixos de simetria. Ora, quando uma curva admite dois eixos de simetria, a condição necessária e suficiente para que ela seja fechada é que o ângulo entre eles seja comensurável com π. Portanto, se α e β representam um mínimo de z e o máximo que o sucede, a condição exigida é expressa pela equação

$$m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}\tilde{\omega}(z) - z^2}}\,, \qquad (3)$$

onde m denota um número comensurável. Essa equação deve ser válida quaisquer que sejam h e k e, consequentemente, os limites α e β que deles dependem.

Tem-se

$$h + \frac{1}{k^2}\tilde{\omega}(\alpha) - \alpha^2 = 0,$$
$$h + \frac{1}{k^2}\tilde{\omega}(\beta) - \beta^2 = 0,$$

consequentemente

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\tilde{\omega}(\beta) - \tilde{\omega}(\alpha)},$$
$$h = \frac{\alpha^2\tilde{\omega}(\beta) - \beta^2\tilde{\omega}(\alpha)}{\tilde{\omega}(\beta) - \tilde{\omega}(\alpha)},$$

e a equação (3) torna-se

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\sqrt{\tilde{\omega}(\beta)-\tilde{\omega}(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2\tilde{\omega}(\beta)-\beta^2\tilde{\omega}(\alpha)+\left(\beta^2-\alpha^2\right)\tilde{\omega}(z)-z^3\left[\tilde{\omega}(\beta)-\tilde{\omega}(\alpha)\right]}}. \tag{4}$$

A função $\tilde{\omega}(z)$ deve ser tal que essa equação seja válida para todos os valores de α e β. Além disso, o número comensurável m deve ser constante, porque, se ele variar de uma órbita para outra, uma variação infinitamente pequena das condições iniciais implicaria uma variação finita do número e da disposição dos eixos de simetria da trajetória.

Suponhamos que α e β difiram infinitesimalmente, ou seja,

$$\beta = \alpha + u,$$

ficando z compreendido entre α e β, podemos fazer

$$z = \alpha + \gamma,$$

e γ será, como u, infinitesimalmente pequeno. Desprezando os infinitamente pequenos de segunda ordem, teremos

$$\sqrt{\tilde{\omega}(\beta)-\tilde{\omega}(\alpha)} = \sqrt{u\tilde{\omega}'(\alpha)}.$$

Na expressão colocada sob o radical no denominador da integral (4), os infinitamente pequenos de primeira ordem reduzem-se a zero, e o mesmo acontece com aqueles de segunda; são os de terceira que é preciso manter e, desprezando os infinitamente pequenos de quarta ordem, tem-se

$$\alpha^2\tilde{\omega}(\beta)-\beta^2\tilde{\omega}(\alpha)+\left(\beta^2-\alpha^2\right)\tilde{\omega}(z)-z^3\left[\tilde{\omega}(\beta)-\tilde{\omega}(\alpha)\right]=$$
$$\left[\tilde{\omega}'(\alpha)-\alpha\tilde{\omega}''(\alpha)\right]\left(u^2\gamma-u\gamma^2\right).$$

A equação (4) torna-se

$$m\pi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\gamma\sqrt{\tilde{\omega}'(\alpha)}}{\sqrt{\tilde{\omega}'(\alpha)-\alpha\tilde{\omega}''(\alpha)}\sqrt{u\gamma-\gamma^2}},$$

isto é, efetuando a integração e suprimindo os fatores comuns,

$$m = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}'(\alpha)}{\tilde{\omega}'(\alpha)-\alpha\tilde{\omega}''(\alpha)}},$$

ou

$$\left(1-m^2\right)\tilde{\omega}'(\alpha)+m^2\tilde{\omega}''(\alpha)=0.$$

Deduz-se

$$\tilde{\omega}'(\alpha) = \frac{A}{\alpha^{1/m^2-1}},$$
$$\tilde{\omega}(\alpha) = A\frac{\alpha^{2-1/m^2}}{2-\frac{1}{m^2}} + B,$$

A e B denotando constantes.

A partir das relações supostas entre as funções ω , ψ e φ resulta

$$\psi(z) = \frac{A}{2z^{1/m^2-1}},$$
$$\varphi(z) = \frac{A}{2}r^{1/m^2-3}.$$

Esta é a única lei de atração possível, m aqui denotando um número comensurável qualquer; mas disto não resulta que ela preencha, qualquer que seja $m,$ todas as condições do enunciado. De fato, deve-se ter para todos os valores de α e de β,[8]

$$m\pi = \int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{\frac{1}{\beta^{1/m^2-2}} - \frac{1}{\alpha^{1/m^2-2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^{1/m^2-2}} - \frac{\beta^2}{\alpha^{1/m^2-2}} + \left(\beta^2-\alpha^2\right)\frac{1}{z^{1/m^2-2}} - z^2\left[\frac{1}{\beta^{1/m^2-2}} - \frac{1}{\alpha^{1/m^2-2}}\right]}}. \tag{6}$$

Suponhamos inicialmente $1/m^2 - 2$ negativo; façamos $\alpha=0$, $\beta=1$, a equação torna-se

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{z^{1/m^2-2}} - z^2}} = \int_0^1 \frac{z^{1/(2m^2)-1}dz}{\sqrt{1-z^{1/m^2}}},$$

e a equação (6) fornece

$$m\pi = m^2\pi,$$
$$m=1.$$

A lei de atração correspondente é:

$$\varphi(r) = \frac{A}{r^2}.$$

Se supusermos $1/m^2 - 2$ positivo, a equação (6) para $\alpha=1$, $\beta=0$,

$$m\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Disto deduz-se que $m=1/2$, e a lei de atração correspondente é

$$\varphi\,(r)=Ar.$$

Portanto, somente duas leis preenchem as condições exigidas: a da natureza, pela qual a órbita fechada tem apenas um eixo de simetria passando pelo centro da ação; e a da atração proporcional à distancia, de acordo com a qual existem dois.

Nosso ilustre correspondente, sr. Chebychev, a quem comuniquei a demonstração anterior, judiciosamente me fez observar que o teorema, inútil hoje em dia para a teoria tão perfeita dos planetas, poderá ser invocada de modo útil para estender às estrelas duplas as leis da atração newtoniana.

Notas e referências bibliográficas

Filadelfo Cardoso Santos* e *Vitorvani Soares *são professores adjuntos do Instituto de Física da UFRJ, e* ***Alexandre Carlos Tort*** *é professor associado da mesma instituição.* *Os autores agradecem ao prof. dr. Carlos Farina pela leitura atenta do manuscrito, seguida de críticas e sugestões.*
E-mails: filadelf@if.ufrj.br, vsoares@if.ufrj.br, tort@if.ufrj.br.

1 Em nosso último acesso, em 08/09/2010, o trabalho original de Bertrand foi encontrado na biblioteca on-line Gallica no endereço: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3034n.image.F849.langFR.

2 BERTRAND, J. *C. R. Acad. Sci. Paris* 77, p. 849-853, 1873.

3 BERTRAND, J. *Les fondateurs de l'astronomie moderne*: Copernic, Tycho Brahé, Kepler, Gallilée, Newton. Paris: Hetzel, 1865; BERTRAND, J. *Os fundadores da astronomia moderna*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

4 NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Tradução inglesa de A. Motte revista por F. Cajori. Berkeley, CA: University of California Press, 1962 [Londres: Royal Society, 1687].

5 GREENBERG, D. F. *Am. J. Phys*. 34, p. 1101-1109, 1966; TIKOCHINSKY, Y. *Am. J. Phys*. 56, p. 1073-1075, 1988; BROWN, L. S. *Am. J. Phys*. 46, p. 930-931, 1978; ZARMI, Y. *Am. J. Phys.* 70, p. 446-449, 2002; ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of classical mechanics*. Berlim: Springer, 1974; GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 2002, cap. 3, sec. 3.6, p. 89-92.

6 SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A.C. *Physical Review* E 79, 036605, 2009.

7 No original francês, *molécule*. Bertrand refere-se a uma partícula.

8 Mantivemos a numeração do original, no qual a numeração das equações salta de (4) para (6).

[Artigo recebido em 07/2010 | Aceito em 01/2011]