O *Curso de análise matemática* de Omar Catunda: uma forma peculiar de apropriação da análise matemática moderna

Omar Catunda’s *Mathematical analysis course*: a peculiar appropriation of modern mathematical analysis in Brazil

ELIENE BARBOSA LIMA
Universidade Estadual de Santa Cruz

ANDRÉ LUÍS MATTEDI DIAS
Universidade Estadual de Feira de Santana

RESUMO Fazemos uma análise comparativa do livro *Curso de análise matemática* de Omar Catunda com os livros *Elementos de cálculo diferencial e integral* de William Anthony Granville, *Curso de análise matemática* de Luigi Fantappiè e *Foundations of modern analysis* de Jean Dieudonné, com o objetivo de mostrar a sua forma peculiar de apropriação da análise matemática moderna, que o credencia como um importante agente do processo de institucionalização da matemática moderna no Brasil.

Palavras-chave história da matemática, análise matemática moderna no Brasil, Omar Catunda.

ABSTRACT *We did a comparative analysis of Omar Catunda’s Curso de Análise Matemática with William Anthony Granville’s Differential and Integral Calculus, Luigi Fantappiè’s Curso de Análise Matemática and Jean Dieudonné’s Foundations of Modern Analysis in order to show how he particularly appropriated modern mathematical analysis and configured himself as important agent of the institutionalization of modern mathematics in Brazil.*

Key words *history of mathematics, modern mathematics, mathematics analysis in the Brazil, Omar Catunda.*

Introdução

A matemática que ainda se pratica hoje majoritariamente em institutos de pesquisa e ensino em quase todo o mundo, que chamaremos matemática moderna, cujas principais áreas, temas, objetos, problemas, métodos e resultados foram sendo obtidos, consolidados e desenvolvidos ao longo do século XX, teve seu processo de formação iniciado no século XIX, quando uma série de transformações, mudanças e inovações afetaram de maneira geral todos os aspectos constitutivos da matemática, desde a sua organização profissional, até os seus fundamentos epistemológicos e metodológicos, passando pela estruturação das suas subáreas disciplinares, com notáveis repercussões nos resultados da produção do conhecimento matemático.[1]

De fato, a adoção generalizada de concepções absolutamente abstratas de número – dissociada da noção de quantidade – e de geometria – dissociada da percepção sensorial de espaço – e de métodos analíticos algébricos, em substituição aos métodos geométricos sintéticos, foram fundamentais para a unificação das diversas matemáticas – aritmética, geometria, álgebra, trigonometria e cálculo – sob a égide de um mesmo estatuto científico,[2] que foi proclamado no ambiente disciplinar altamente especializado e profissionalizado que se formou nas instituições de ensino superior que seguiram o modelo da Universidade de Berlim, na Alemanha, onde o discurso pela dedicação à pesquisa científica sem finalidades utilitárias ou quaisquer outras, que não o próprio desenvolvimento da ciência, acompanhava a utopia por uma razão científica absolutamente independente e suficiente.[3]

Segundo Christian Houzel,[4] foi no século XVIII que Leonhard Euler (1707-1783) deu início a uma completa transformação na organização do cálculo, quando publicou *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne, 1748), apresentando pela primeira vez a análise matemática baseada no conceito de função.[5] Até então, a geometria ocupava o primeiro lugar no cálculo, por causa da fundamentação geométrica da noção de infinitesimal, enquanto que a álgebra e os algoritmos ficavam em segundo lugar, como métodos auxiliares. Nesse livro, pelo contrário, Euler introduziu a álgebra no livro I e apresentou a geometria no livro II, como uma aplicação. Nas palavras de Jahnke e Otte:

> *During the 18th century, numbers, in their inseparable linkage to the quantities concept, represented the actual object field of mathematics, and algebra, and the symbolic calculi of mathematics were regarded merely as a language permitting en easy and suggestive manner of representing relationships between numbers or quantities. This status became precisely the reverse in the 19th century. Algebra was now to directly include the actual mathematical relationships, which constitute the subject matter under study, while arithmetics, for its part, became the language of algebra resp. of the entire mathematics, by means of which, and in which, all mathematical facts must ultimately be expressible. This process of arithmetization finally culminated, towards the close of the century, in the fact that the consistency of mathematics was reduced to the consistency of arithmetics, raising arithmetics to the position of foundational science proper of mathematics.*[6]

Tradicionalmente, atribui-se o início do processo de aritmetização da análise ao *Cours d'analyse* (1821) de Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que apresentou uma definição de limite predominantemente aritmética, com pretensões de independência em relação às intuições geométricas, e uma definição para os números reais que pretendia alcançar um novo padrão de rigor, que somente foi alcançado, no caso dos números, com os cortes de Richard Dedekind (1831-1916) e, no caso dos limites, com Karl Weierstrass (1815-1897), que introduziu a definição e notação dos *epslons* e *deltas* aceita contemporaneamente.[7]

Dessa forma, do cálculo baseado na noção de infinitesimal, como em Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)[8] e Isaac Newton (1642-1727)[9], formou-se a análise moderna clássica, com o deslocamento do centro da matemática do âmbito da geometria e dos métodos sintéticos para o âmbito da aritmética, da álgebra e dos métodos analíticos. Instituiu-se como base um conceito moderno de função – definida como uma relação entre variáveis e não necessariamente proveniente de expressões analíticas ou fórmulas – necessário para uma definição de derivada como limite, de acordo com novos padrões de rigor formal que passaram a ser aceitos como referência entre os matemáticos desde então. Conforme Margaret Baron:

> *O conceito de função do século XVIII não estava precisamente definido. Além dessa imprecisão, ele diferia do conceito moderno em outro sentido. As expressões analíticas de Euler não são funções no sentido moderno; são fórmulas ou partes de fórmulas; objetos com os quais se fazem cálculos analíticos. O conceito de função como uma fórmula implica uma restrição que não está incluída no moderno conceito de função. No sentido moderno, as funções não precisam necessariamente ter uma representação analítica, como uma fórmula. Há funções, no sentido moderno, que os matemáticos do século XVIII hesitariam em aceitar como tal.*[10]

A institucionalização dessas mudanças ocorreu paulatinamente nos diversos contextos nacionais, tendo como um dos indicadores mais significativos a sua incorporação nos livros didáticos utilizados nos cursos superiores, a exemplo do *Cours d'analyse mathematique* (1902) de Edouard Goursat *(1858-1936)*, do *Course of modern analysis* (1902) de E.T. Whittaker (1873-1956), das *Lezioni di analisi* (1933) de Francesco Severi (1879-1961), e do *Cálculo diferencial e integral* (1927) de Richard Courant *(1888-1972)*.[11]

No Brasil, essa institucionalização iniciou-se com a fundação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP) em 1934 e da Faculdade Nacional de Filosofia (FNFi) da Universidade do Brasil (UBr) em 1939, quando começaram a funcionar os primeiros cursos de matemática – independentes dos cursos de engenharia – com o objetivo de formar especialistas para o ensino e para a pesquisa na área.[12] Antes, a matemática que era praticada nas escolas de engenharia brasileiras seguia geralmente os padrões anteriores à modernização do século XIX, embora engenheiros como Otto de Alencar Silva (1874-1912), Manuel Amoroso Costa (1885-1928), Theodoro Augusto Ramos (1895-1935) e Luiz de Barros Freire (1896-1963), professores daquelas escolas, já possuíssem um conhecimento atualizado e defendessem a modernização dos seus currículos e atividades matemáticas.[13]

Até aquela época, a matemática que fazia parte da formação e do exercício profissional do engenheiro consistia basicamente na mecânica racional, na geometria analítica, descritiva e projetiva, no cálculo infinitesimal, além da aritmética, da álgebra, da trigonometria e da geometria euclidiana ensinadas no secundário. Era essa a formação necessária para a obtenção dos graus de bacharel e de doutor em matemática, atribuídos nas escolas de engenharias. Por exemplo, na Escola Politécnica de São Paulo, de 1904 a 1932, o professor catedrático Rodolfo Baptista de San Thiago (1870-1933) adotava o livro *Premiers èlements du calcul infinitesimal* de Hyppolite Sonnet e dedicava a maior parte do tempo do curso que ministrava ao estudo das regras de derivação e integração fundamentadas nas concepções infinitesimais de Newton e Leibniz.[14]

A contribuição de matemáticos estrangeiros, como o analista italiano Luigi Fantappiè (1901-1956), foi muito importante para implantar, de forma sistemática e efetiva nos currículos, a matemática moderna que já consistia na base da formação profissional nos principais centros matemáticos internacionais. Fantappiè assumiu a cátedra de análise matemática e a direção do departamento de matemática da FFCL em 1934 e teve como seu assistente o engenheiro Omar Catunda (1906-1986).[15] Naquele ano ministrou um curso de análise, cujas notas de aula foram redigidas por Catunda. Em 1939, quando Fantappié retornou para a Itália por causa da II Guerra Mundial, Catunda assumiu interinamente a cátedra de análise e a direção do departamento, que manteve até sua aposentadoria em 1962.

As notas de aulas do curso de análise lecionado por Fantappié, em 1934, foram ampliadas e reformuladas posteriormente por Omar Catunda. Isto lhe possibilitou publicar em seu próprio nome o livro *Curso de análise matemática*, um dos primeiros livros sobre o assunto publicados no Brasil,[16] que teve boa aceitação e foi largamente difundido no território nacional, principalmente durante os anos 50 e 60 do século XX.[17] Inicialmente foram utilizadas apostilas mimeografadas até 1952, quando foi publicada a primeira edição na forma de livro em sete volumes.[18] Em 1962, Catunda publicou uma nova e definitiva edição revista e alterada, em dois volumes,[19] na qual foram acrescentadas, por exemplo, as estruturas de ordem, algébricas e topológicas, conteúdos apropriados, principalmente, do livro *Foundations of modern analysis* de Jean Dieudonné, um dos matemáticos franceses do grupo Bourbaki[20] que trabalharam na FFCL-USP nas décadas de 1940 e 1950.

Neste trabalho, faremos uma análise comparativa do livro de Catunda com os *Elementos de cálculo diferencial e integral* de Granville, com o *Curso de análise matemática* de Fantappiè, e com o *Foundations of modern analysis* de Dieudonné, destacando algumas das principais diferenças e semelhanças existentes entre um e os outros, com o objetivo de mostrar como Catunda se apropriou da análise matemática moderna de raízes europeias, já que seu livro foi inegavelmente um dos seus principais vetores de difusão no Brasil a partir de 1940.[21]

A maioria das citações foi do primeiro volume da edição de 1962, mas utilizamos também as edições anteriores.[22] As obras de Fantappiè e Dieudonné foram escolhidas para a comparação porque têm uma abordagem moderna, sendo que a primeira foi a matriz do livro de Catunda e representa a tradição italiana, enquanto a segunda, além de tê-lo influenciado, como já foi dito acima, é uma das principais referências da escola Bourbaki.[23] Já o livro de Granville foi escolhido porque representava a tradição matemática anterior à modernização ocorrida no século XX e geralmente difundida nos cursos de cálculo ministrados nas escolas de engenharia brasileiras e mesmo nos cursos de matemática de muitas faculdades de filosofia, uma vez que engenheiros formados de acordo com aquela tradição eram na maioria das vezes professores de ambas as instituições e optavam naturalmente por continuar trabalhando com o conhecimento matemático que dominavam em vez de modernizar seus cursos, mesmo tendo acesso a informações e materiais para fazê-lo.[24]

Por exemplo, embora o programa oficial estabelecido pelo catedrático de análise da Faculdade de Filosofia da Bahia (FF), engenheiro Luiz de Moura Bastos, seguisse o programa padrão da FNFi, elaborado pelo seu catedrático, matemático José Abdelhay, formado na primeira turma da FFCL, portanto já sob a influência dos padrões modernos difundidos por Fantappié, na prática, as suas aulas de cálculo ministradas de 1942 até 1968 seguiam o programa do livro de Granville. Arlete Cerqueira Lima, formada pela FF em 1955, comparou o ensino da FF com o da FFCL: "Em 1957 estou na USP entrando pela primeira vez em contato com a chamada Matemática Moderna: da teoria dos conjuntos as estruturas algébricas e topológicas. Quanto ao Cálculo Diferencial e Integral, em um ano, em São Paulo, foi dado tudo o que vi em quatro anos na Bahia, com o agravante de que, lá o livro texto era o de Catunda e aqui, o de Granville."[25]

O livro de Granville tinha de fato uma abordagem diferente daquela adotada nos cursos da FFCL e difundida pelo livro de Catunda, embora tenha servido muito bem e por muito tempo às demandas das escolas de engenharia. Segundo Elon Lages Lima, o livro de Granville:

> *[...] era um livro de cálculo estudado já pelos meus antecessores, o pessoal da geração dos meus pais, que era um livro que teve um sucesso enorme e muito bem escrito, extraordinariamente bem feito sob o ponto de vista de clareza e organização e era um livro que ditou uma época porque ele marcava a supremacia, a hegemonia da manipulação com algumas aplicações, mas aplicações que se baseavam já em formas dadas. Ele não tinha modelagem. Então, essa foi uma tendência que predominou durante os anos da minha formação matemática.*[26]

Números e conjuntos numéricos

No livro de Catunda, a "teoria dos números reais" é precedida por uma "introdução elementar do conceito de número", na qual os números naturais são apresentados ora como "resultado da operação de contar os elementos de um conjunto", ora "quando se estudam as grandezas contínuas, como comprimento, área, peso, etc., obtém-se o número como razão de duas grandezas homogêneas, ou como medida de uma grandeza em relação à outra da mesma espécie, tomada como unidade"[27]. Contudo, ele usou os postulados de Peano mais adiante para apresentar a construção dos conjuntos numéricos, dos naturais aos reais:

I) 1 é um número.

II) Todo número tem um sucessor, que é um número.

III) 1 não é sucessor de nenhum número.

IV) Números distintos têm sucessores distintos.

V) Se um conjunto de números contém o número 1 e se, do fato dele conter um número n, se deduz que ele contém o sucessor de n, então esse conjunto contém todos os números.[28]

Esses dois aspectos do texto remetem-nos à modificação ocorrida na matemática no século XIX, quando uma concepção que associava os números sempre às noções de quantidade e grandeza foi substituída por outra puramente abstrata. Os processos de contagem de objetos e medida de grandezas, que Catunda chamou de formas de obtenção dos números na matemática elementar, correspondem à concepção de número vigente na matemática europeia até o século XIX, enquanto a construção lógico-axiomática abstrata dos conjuntos numéricos baseada nos axiomas de Peano é parte do processo de fundamentação aritmética da análise matemática segundo novos padrões de rigor ocorridos na Europa a partir do século XIX.[29]

Catunda estava aderindo às concepções modernas quando afirmava que a construção de um "edifício lógico" como a análise matemática dependia da revisão do conceito de número, que não poderia fazer apelos às noções exteriores de grandeza ou de quantidade.[30] Nesse sentido, acrescenta que as propriedades, "[...] conseqüências diretas dos postulados de Peano e das definições de soma, multiplicação e desigualdade, servem de fundamento a toda teoria dos números inteiros, como o estudo dos sistemas de numeração, a teoria da divisibilidade e a dos números primos".[31]

Mais adiante, ele define números racionais e números relativos recorrendo à definição de classes de equivalência apresentada um pouco antes. Argumenta também que o conjunto de todas as frações forma o campo racional absoluto, pois as frações cujo numerador é múltiplo do denominador comportam-se como números inteiros, isto é, são equivalentes a n/1. Com essa argumentação, concluiu que os números naturais são partes do campo racional absoluto, em outras palavras, o campo dos racionais absolutos é uma extensão dos números naturais.

Catunda ressalva, entretanto, que "os números racionais ainda não são suficientes, nem mesmo para a medida de grandezas [...]. Essa insuficiência corresponde à impossibilidade de certas operações, como a extração da raiz quadrada de 2",[32] o que lhe possibilita continuar a construção do campo dos números. Desse modo, define no campo dos racionais duas classes disjuntas, A de elementos *a* e A' de elementos *a*', denominadas respectivamente de minorante e majorante, satisfazendo as seguintes propriedades:

1) Todo número racional relativo, no máximo com uma exceção, está em uma e uma só das duas classes.

2) Todo número menor que um número da classe A pertence a esta classe; todo número maior que um número de A' pertence a esta.

3) A classe A não tem máximo e a classe A' não tem mínimo.[33]

A partir dessas seções no campo racional, Catunda diz que o par de classes, o qual designou a/a', "constitui o que chama *seção* ou *corte* do campo racional". Continua dizendo que:

> *Quando existe uma exceção na propriedade 1), isto é, quando existe um número racional r que não pertence a nenhuma das classes, diz-se que a secção é imprópria, ou racional; no caso contrário, diz-se que a secção é própria. [...] Podemos então identificar cada número racional com a secção imprópria que ele determina, as seções próprias serão chamadas números irracionais.*[34]

Com essas considerações, Catunda completa de forma dedutiva o seu processo de construção dos campos de números, dando a definição de números reais como toda secção própria ou imprópria.

O primeiro tópico do *Curso de análise matemática* de Fantappiè também é uma "teoria dos números reais", iniciada com uma exposição dos "números naturais e racionais" muito parecida na sua forma com as apresentações que encontramos hoje em dia em livros didáticos para o ensino fundamental e médio, embora muito mais rigorosa. Diferentemente de Catunda, os campos de números naturais, inteiros e racionais são supostos conhecidos, as operações aritméticas usuais são definidas e são verificadas as possibilidades de efetuá-las em cada um destes campos – propriedade algébrica do fechamento. As demais propriedades algébricas são também verificadas em cada caso. Em suma, partindo dos naturais, os conjuntos numéricos são descritos pela ampliação das respectivas estruturas algébricas em decorrência da necessidade de efetuar uma operação aritmética fundamental.

Todavia esse procedimento não é mantido para a abordagem dos números irracionais, que são apresentados a partir de uma referência histórica um tanto anacrônica: "A introdução dos números irracionais se impôs desde o tempo dos gregos, pelas necessidades da medida de grandezas em geometria."[35] Ele apresentou uma construção geométrica dos números irracionais atribuída a Euclides e baseada na existência de segmentos incomensuráveis, como a diagonal do quadrado construída sobre um segmento unitário. Segundo Fantappiè, a definição euclidiana de número irracional como "medida de grandeza incomensurável com a unidade" foi aceita até meados do século XIX "quando Dedekind e Cantor procuraram estabelecer as bases da aritmética de maneira completamente independente da geometria".[36] Em seguida, Fantappié apresenta sua definição de número irracional baseando-se na suposta definição de Euclides:

[...] os dois pares de grandezas considerados A,B e C,D têm em comum duas classes bem definidas de números racionais: a classe H das medidas por falta e a classe H' das medidas por excesso, da primeira grandeza em relação á segunda, em cada par. Esse par de classes de números racionais, chamamos numero [sic] irracional , que diremos definido pelas duas classes H e H'. Este numero irracional será a razão A:B ou C:D, ou a medida de A em relação a B ou de C em relação a D.[37]

Apesar de reconhecer as contribuições de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)[38] e Dedekind, inclusive utilizando posteriormente a definição dos irracionais feita por esse último, Fantappié manteve no seu *Curso* a definição geométrica de número irracional que ele atribuiu a Euclides, certamente porque considerou-as análogas e compatíveis, apesar da definição de Dedekind não fazer nenhuma menção às grandezas ou às suas medidas, muito pelo contrário. Para ele, não havia problema algum na utilização das duas definições, apesar de terem fundamentações diferentes, uma geométrica, outra analítica. Esse padrão foi mantido na apresentação de outros tópicos e seguia na verdade a abordagem geométrica tal como praticada naquela época pela tradição matemática italiana.

Existem, no livro de Catunda, muitas definições análogas às que foram dadas por Fantappiè. Contudo observamos que houve alterações na redação, embora fossem mantidas as mesmas bases teóricas. Por exemplo, Fantappiè apresenta o postulado da continuidade de Dedekind no tópico "Representação dos números reais sobre uma reta": "Separados todos os pontos da reta em duas classes não vazias K e K' tais que todo ponto de K preceda todo ponto de K´, isto é, efetuada uma partição dos pontos da reta, existe sempre um ponto P que, se pertence á classe K segue todos os outros pontos desta classe e precede todos os da outra, e se pertence a K', segue todos os pontos de K e precede todos os outros de K'."[39]

Por sua vez, Catunda enuncia esse mesmo postulado da seguinte forma: "toda partição efetuada entre os pontos de uma reta orientada determina um ponto A, que ou é último da primeira classe, ou é o primeiro da segunda".[40]

Granville não trata do conceito de número e dos conjuntos numéricos da mesma forma que Catunda e Fantappiè. Logo no primeiro capítulo do seu livro, intitulado "Formulário", são apresentadas, "para a comodidade do leitor", fórmulas elementares da álgebra, da geometria plana, da trigonometria, da geometria analítica plana e espacial. Nesse mesmo capítulo, é afirmado que uma equação do 2º grau pode ter duas raízes reais e diferentes, duas raízes reais e iguais, ou duas raízes imaginárias, a depender respectivamente do valor positivo, nulo ou negativo do discriminante. Aqui, o termo "real" não é empregado no mesmo sentido moderno em que foi empregado por Catunda e Fantappiè, referindo-se aos elementos abstratos do conjunto dos números reais, tal como definido no século XIX, mas no mesmo sentido geométrico de existir quantidades ou grandezas positivas, tal como era empregado até o século XVIII ou mesmo até meados do XIX, para se opor ao caráter fictício ou imaginário das quantidades negativas ou das suas raízes. Interpretamos assim, porque não há nenhuma menção aos números reais ou ao conjunto dos reais em nenhuma outra parte do livro.

Função, constantes, variáveis

Tampouco o conceito de função é apresentado da mesma forma por Granville e por Catunda. Enquanto o último utiliza-se da linguagem dos conjuntos introduzida na matemática ao final do século XIX por Georg Cantor, a base para a definição de função por Granville são as definições de variável e de constante que aparecem na introdução do segundo capítulo, "Variáveis, funções e limites", semelhantes àquelas utilizadas por Euler em 1748: "Quando numa investigação figura uma grandeza à qual se pode dar um número ilimitado de valores, diz-se que a grandeza é uma variável. Se figura uma grandeza com valor fixo, diz-se que ela é uma constante."[41]

1. Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.
Tels sont les nombres de toute espece, qui conservent constamment la valeur qu'ils ont une fois obtenue. [...] dans l'Analyse ordinaire qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premieres lettres de l'Alphabet, et celles qui ne le sont pas, par les dernieres; mais

c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie; on y envisage les quantités sous un autre aspect particulier, les unes étant considérées comme constantes, et les autres comme variables.

2. Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.
Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. [...] on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet [...].

3. Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puisqu'on peut lui substituer tous les nombre imaginables. [...] Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationels et transcendants; on ne doit pas même en exclure zero, ni les nombre imaginaires.[42]

E as mesmas utilizadas por Cauchy em 1821: "On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et on désigne ordinairement par une de premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée."[43]

Granville define função de forma muito semelhante a Euler: "Quando duas variáveis estão relacionadas de modo tal que o valor da primeira é conhecido quando se dá o valor da segunda diz que a primeira variável é uma função da segunda."[44]

4. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité et de nombre, ou de quantités constantes.
[...]

5. Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.
En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs determinées, la fonction recevra elle-même une infinité de valeurs, et il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires.[45]

E mais ainda semelhante à Cauchy, embora esse último apresente uma definição envolvendo diversas variáveis:

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable independante; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable.[46]

Diferentemente de Granville, Catunda apresenta uma definição moderna de função, embasada em leis de associação entre números pertencentes a conjuntos – portanto, utilizando a linguagem dos conjuntos – e não mais nas noções de variáveis ou de expressões analíticas, como em Cauchy ou em Euler: "Consideremos um conjunto linear C. Se a cada número x de C corresponde, de um modo bem determinado, um número y, dizemos que y é uma função de x, definida no campo C, e escreveremos (1) $y = f(x)$. O conjunto C chama-se campo de definição da função f."[47]

A definição de Catunda também difere em certo sentido da definição moderna dada por Fantappiè, que também usa a linguagem dos conjuntos:

Consideremos um conjunto C de números x, com mais de um elemento. Se a cada número x de C corresponde, de um modo bem determinado, um ou mais valores de uma outra quantidade y, dizemos que y é uma função de x definida no campo C, que se chama campo de definição, e indicamos essa correspondência com a notação

y = f(x)
ou por outro símbolo semelhante em que a letra f seja substituída por outra qualquer. Usa-se freqüentemente, por exemplo, a notação y = y(x).[48]

Observemos inicialmente que as definições de Euler, Cauchy e Granville relacionam números, funções, variáveis e constantes com grandezas e quantidades, ao passo que a definição de Catunda relaciona apenas números como elementos de um conjunto. Já a definição de função de Fantappiè associa de um modo bem determinado os números de um conjunto C, chamado de campo de definição, com "um ou mais valores de uma outra quantidade y"[49], isto é, há certa identificação da noção de número com a noção de quantidade, assim como há a possibilidade de uma associação plurívoca entre x e y – e não unívoca, como na definição de Catunda.

A definição moderna de função, tal como apresentada por Catunda, é a base para a definição de continuidade segundo os padrões "modernos" de rigor instituídos a partir do século XIX na matemática, diferentemente do que era entendido por continuidade no século XVIII pelos matemáticos em geral.

Por exemplo, Euler, após dar menos ênfase nas representações analíticas, buscou argumentar em torno da continuidade, estabelecendo uma representação geométrica de uma função qualquer a partir da descrição mecânica de várias linhas curvas gerais, particularmente linhas retas infinitas, pelo movimento contínuo de um ponto. Para isso, Euler definiu quantidade variável em uma linha reta infinita dizendo que:

1. Une quantité variable étant une grandeur considérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées; une droite indefinie, telle que RS, sera très – propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet, puisqu'on peut prendre sur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne présente à l'esprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer sur une ligne indéfinie R S un point A, qui será censé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en séparera; ainsi une portion déterminée AP représentera une valeur déterminée comprise dans la quantité variable.

2. Soit donc x une quantité variable, représentée par la droite indéfinie RS; il est clair que toutes les valeurs déterminées de x, pourvu qu'elles soient réelles, peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS.[50]

É então fazendo uso dessa concepção de quantidade variável que Euler trouxe a representação geométrica de uma função qualquer da seguinte forma: "4. [...]. Soit *y* cette fonction de *x*; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour *x* une valeur donnée. Ayant pris une droite indéfinie *R A S* pour représenter les valeurs de *x*, il faudra, pour chaque valeur déterminée *A P* de *x*, élever sur cette ligne une perpendiculaire *PM*, égale à la valeur correspondante de *y* [...]."[51] A partir dessa representação geométrica de uma função, Euler concluiu que:

6. [...]. Ainsi chaque fonction de x, raportée de cette manière à la gémetrie, donnera une ligne droite ou courbe, dont la nature dépendra de celle de la fonction y.

7. On connoît [sic] parfaitement, en suivant ce procédé, la ligne courbe qui résulte de la fonction y, puisque c'est cette function qui en détermine tous les points […]

8. […]. Ainsi une fonction quelconque de x donnera une certaine ligne droite ou courbe; d'où il suit que réciproquement on pourra rapporter aux fonctions les lignes courbes.[52]

Dentro desse contexto, Euler afirmou que da ideia de linhas curvas decorre a sua divisão em contínuas – uma única função definida sobre x – e, descontínuas ou mistas e irregulares – funções que não são exprimidas por apenas uma única lei constante, uma vez que são formadas por partes de diferentes curvas contínuas.[53]

Assim, baseando-nos nessas colocações do próprio Euler, parece-nos – mesmo considerando que se referia a uma definição de função diferente ao contexto que foi modernamente estabelecido, uma vez que tratava de um modo geral de funções analíticas – que ele considerou a continuidade como inerente às funções trabalhadas, já que supunha, tal como outros matemáticos de sua época, que as suas funções eram "bem comportadas", ou seja, sempre contínuas.

Em suma, definições modernas de função, limite e continuidade foram apresentadas de acordo com certo padrão de rigor institucionalizado pelos matemáticos apenas no final do século XIX, principalmente depois de Weierstrass.

Continuidade e limite

Catunda apresentou primeiro uma explicação "não-rigorosa" de continuidade: "pode-se dizer, de maneira pouco rigorosa, que uma função é contínua quando para pequenas variações da variável independente, ela também sofre pequenas variações"[54]. Comparemos essa explicação com aquela apresentada por Cauchy: "[...] la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même."[55] Note-se que Catunda não utiliza "infinitamente pequeno" como Cauchy, mas era essa na verdade a forma usual de definir continuidade antes da "aritmetização da análise", e foi por isso que ele qualificou-a de "pouco rigorosa". Todavia, mais adiante, ele define continuidade de acordo com os padrões modernos estabelecidos por Weierstrass na segunda metade do XIX, com o uso de ε e δ:

> *[...] diz-se que uma função f, definida num campo linear C, é contínua em um ponto de acumulação a de C, se tivermos*
>
> *(1)* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
>
> *[...] Mais explicitamente, notando que pela definição tanto a como f(a) devem ser finitos, podemos dizer que f(x) é contínua em a, se a cada número* $\varepsilon > 0$ *corresponde um* ε *[sic]* >0*, tal que a condição*
>
> *(2)* $|x - a| \leq \delta$
>
> *acarreta*
>
> *(3)* $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ [56]

Esta não foi a linguagem utilizada por Granville na sua abordagem de continuidade, que nem sequer explicou a noção conforme Cauchy. Numa nota de rodapé, ele comentou que as funções utilizadas no livro serão sempre contínuas para todos os valores de x, exceto certos valores isolados. Depois de apresentar um exemplo, ele generalizou a noção de continuidade: supondo a função f(x) definida num ponto a, se o seu limite quando x tende a "a" for igual ao valor da função para x =a, então essa função se diz contínua para x = a. Ou seja,

> *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*, então f(x) é contínua em* $x = a$ [57]

Vale salientar que essa definição não fazia parte do cálculo infinitesimal desenvolvido por Leibniz e Newton, embora, de um modo geral, Granville siga as ideias preconizadas por esses matemáticos e de outros do século XVIII, como Euler.

Até o século XIX, os matemáticos buscavam uma teoria de fundamentação para o cálculo em bases livres de conceitos metafísicos, tal como a concepção dos infinitesimais dada com argumentações diferentes e de forma independente por Leibniz e por Newton. De modo geral, Leibniz e Newton, sem demonstrar os seus princípios, supunham que quantidades que se diferem apenas por uma quantidade infinitamente pequena poderiam ser consideradas iguais[58] Dentre aqueles que buscaram uma nova fundamentação para o cálculo podemos citar Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Diferentemente e discordando de outros matemáticos, a exemplo de Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), que procurou dar uma resposta para essa questão através de um conceito de limite essencialmente geométrico,[59] Lagrange construiu o método de cálculo das funções derivadas com base nas séries de potências, demandando apenas operações algébricas. Nesse sentido, Lagrange faz a seguinte exposição:

Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x, on y met x + i, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra f(x + i), et par la théorie des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$,

dans laquelle les quantités p, q, r, etc., coefficients des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive x, et indépendantes de l'indéterminée i.[60]

O esforço de analistas do século XVIII, como d'Alembert e Lagrange, em fundamentar o cálculo sem contradições lógicas, abriram caminho para os matemáticos do século XIX, a exemplo de Cauchy, construírem uma definição de limite fazendo uso de números, variáveis, funções, sem apelo a intuição geométrica.

Desta forma, entendemos que o cálculo que Cauchy e tantos outros matemáticos do século XIX ajudaram a transformar não foi construído de um espaço vazio, muito pelo contrário. Nesse processo houve a apropriação de muitos conceitos trabalhados por Newton e Leibniz e seus seguidores. Isto, de certa forma, justifica termos percebido que Granville, no seu livro, se aproxima também das ideias apresentadas por Cauchy nas primeiras décadas do XIX, como acontece por exemplo com a definição de limite de uma variável:

Diz-se que a variável v tende a uma constante l, ou que o limite de v é l, se, dado um número positivo qualquer e, ainda que muito pequeno, os valores sucessivos de v se aproximam de l de modo tal que a diferença v – l seja, em valor absoluto, menor do que ε. Escreve-se lim v = l. Usa-se, também, por comodidade, a notação v →l, que se lê "v tende a l"(alguns autores usam a notação v ≈ l).[61]

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.[62]

Mas, apesar de definir inicialmente o limite de uma variável, Granville apresenta-nos também o limite de uma função:

Temos uma variável v e uma dada função z de v. A variável independente v toma valores tendendo a l e temos que examinar os valores da variável dependente z, em particular, determinar se z tende a um limite. Se existe uma constante a tal que lim z = a, então se escreve

lim z = a,

v→l

que se lê "limite de z, quando y tende a l, é igual a a".[63]

Catunda apresentou inicialmente uma história do conceito matemático de limite, trazendo referências às definições de Cauchy e de Bolzano,[64] ambas elaboradas no século XIX. Diferentemente de Fantappiè, que em seu Curso apresentou somente uma definição formal de limite, Catunda primeiramente definiu limite da seguinte forma: "[...] pode-se definir o limite de uma função y= f(x) qualquer, definida em um campo C com ponto de acumulação <u>a</u>, da seguinte maneira: dizemos que <u>f(x) tem limite b</u>, ou que f(x) <u>tende a b</u> (f(x) →b) para x tendendo a <u>a</u> (x→a) se, quando x varia aproximando-se de a, o valor de y torna-se cada vez mais próximo de b".[65]

Segundo Catunda, "a noção um pouco vaga de proximidade, ou de aproximação, pode-se tornar mais rigorosa e mais geral quando se usa a noção de vizinhança"[66]. Nessa sua escolha, buscava conciliar sempre que possível aquilo que entendia como "rigor" com aquilo que chamava de "intuição". Nesse sentido, Catunda acreditava que os alunos, ao conseguirem dar um significado às teorias da matemática, poderiam ampliar os seus conhecimentos sobre essa área, que se tornariam intuitivos na medida em que internalizavam novas teorias. Para tanto, considerava que tais teorias se tornariam intuitivas se elas fossem trabalhadas inicialmente recorrendo a exemplos do mundo sensorial ou de desenhos. Desse modo, segundo o próprio Catunda, quando introduzia o conceito de curvatura, chamava a atenção dos seus alunos para a ideia corrente de curva mais ou menos fechada, como no caso da trajetória de um automóvel;

ou mesmo quando fazia uso do teorema da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias, invocava as figuras, formadas pela limalha de ferro em um campo magnético, em que apareciam as linhas de força, tornando, para ele, tal teorema intuitivo.[67] Ratificando Catunda, Gilberto Loibel, que foi seu aluno em 1953 e 1954, disse que:

> *a- no curso de equações diferenciais parciais lembro que ele usava desenhos, por exemplo para descrever como seria possível obter as superfícies integrais como limite de superfícies poliédricas multifacetadas que representariam pedaços de planos tangentes. Usava também gestos com as mãos para descrever figuras espaciais. b- em uma conferência que assisti em meu tempo de estudante o prof. Catunda explanou sua visão sobre a intuição matemática. Ele afirmava algo assim: Na medida em que um matemático amplia seus conhecimentos ele incorpora em seu acervo novos conteúdos, conceitos, resultados que serão intuitivos para ele assim que ele os domina perfeitamente. Assim o que é teoria difícil para um iniciante torna-se material intuitivo para quem já avançou mais. Não existe algo intuitivo em si, mas algo intuitivo para uma determinada pessoa.*[68]

Essa proposta de Catunda contrasta com outras obras modernas, tal como *Foudations of modern analysis*, de Jean Dieudonné, integrante do grupo Bourbaki, que se propunha a construir toda a matemática com base nas estruturas, e.g. de ordem, algébricas, topológicas, privilegiando os métodos algébricos e analíticos. De fato, a análise moderna não é acompanhada de interpretações geométricas nesse livro.

Catunda, apesar de ter tido contato com Jean Dieudonné no período em que este trabalhou na USP e de ter efetivamente utilizado o *Foudations of modern analysis* na atualização do primeiro volume do seu livro publicado em 1962, afirmou que recorreu sempre que possível à "intuição geométrica" antes de apresentar um determinado assunto de forma "rigorosa". Assim, somente após apresentar limite de uma forma que ele chamou de intuitiva, definiu limite formalmente:

> *A função y=f(x) tem limite b para x tendendo a a, se a cada vizinhança β de b corresponde uma vizinhança α de a, tal que para todo ponto x≠a do campo C, pertence à vizinhança α, o valor de y está na vizinhança β.*

> *[...]*
>
> *No caso das funções definidas no campo real e com valôres reais, podemos considerar primeiramente o caso em que a e b são finitos, e limitar a consideração às vizinhanças simétricas dêsses pontos. Podemos dizer portanto – que y tende a b, para x [→] a, quando, dado o número ε > 0 arbitrário, se pode determinar em correspondência um número positivo δ, tal que para todo x de C satisfazendo à condição*
>
> $0 < |x - a| \leq \delta$
>
> *temos, para o valor do y = f(x) correspondente,*
>
> $|y - b| \leq \varepsilon$ [69]

Na sequência, Catunda demonstra uma série de teoremas sobre limites e funções contínuas. Justifica que os teoremas "servem de base para o cálculo de limites.[e que] Dêsses teoremas se deduzem as propriedades correspondentes das funções contínuas"[70]. De forma similar ao *Curso* de Fantappiè, enuncia, por exemplo, o "teorema 3", dizendo que:

> *Se duas funções y_1 e y_2 de x, definidas no mesmo campo de C, de que a é ponto de acumulação, têm limites finitos para x→a, então temos também,*
>
> (1) $\lim\limits_{x\to a} (y_1 + y_2) = \lim\limits_{x\to a} y_1 + \lim\limits_{x\to a} y_2$
>
> (2) $\lim\limits_{x\to a} y_1 y_2 = \lim\limits_{x\to a} y_1 \cdot \lim\limits_{x\to a} y_2$ [71]

Para provar a igualdade (1) Catunda, analogamente a Fantappiè, faz a seguinte demonstração:

Com efeito, sejam $\lim y_1 = b_1$ *e* $\lim y_2 = b_2$*. Dado então* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, podemos determinar uma vizinhança* α *de* a *onde se tenha ao mesmo tempo, para* $x \neq a$, $|y_1 - b_1| \leq \varepsilon/2$ *e* $|y_2 - b_2| \leq \varepsilon/2$*. Destas igualdades segue-se:*

$(y_1 + y_2) - (b_1 + b_2)| \leq \varepsilon,$

que demonstra a igualdade (1).[72]

Catunda não recorreu à noção de infinitésimos para provar esse e outros teoremas, tal como fez Granville, que definiu primeiro infinitésimo, demonstrou teoremas relativos aos infinitésimos, para depois utilizá-los nas provas dos teoremas sobre limites. Granville diz que infinitésimo ou infinitamente pequeno é uma variável *v* que tende a zero: $\lim v = 0$ ou $v \to 0$. Assim, segundo ele, decorre que: "Se $\lim v = l$, então $\lim (v - l) = 0$, isto é, a diferença entre a variável e o seu limite é um infinitésimo. Reciprocamente, se a diferença entre uma variável e uma constante é um infinitésimo, então a variável tende à constante."[73] Os teoremas relativos aos infinitesimais demonstrados na obra de Granville são:

I - Uma soma algébrica de n infinitésimos é um infinitésimo, sendo n um número fixo.

[...]

II - O produto de uma constante c por um infinitésimo é um infinitésimo;

[...]

III - O produto de n infinitésimos é um infinitésimo, sendo n um número fixo;

[...]

IV – Se $\lim v = l$ e l é diferente de zero, então o quociente de um infinitésimo i por v é também um infinitésimo.[74]

Baseado nesses teoremas, Granville demonstra três teoremas sobre limites:

(1) $\lim_{x \to a} (u + v - w) = A + B - C$

(2) $\lim_{x \to a} (u.v.w) = ABC$

(3) $\lim_{x \to a} u/v = A/B$*, se B não é zero*

onde, u,v e w são funções de uma variável x e que

$\lim_{x \to a} u = A; \lim_{x \to a} v = B; \lim_{x \to a} w = C$ [75]

Por exemplo, o teorema (1) é provado por Granville da seguinte forma:

Seja

(1) $u - A = i; v - B = j; w - C = k$

Então i, j, k são funções de x e cada uma delas tende a zero quando $x \to a$*, isto é, elas são infinitésimos [...]. Das equações (1) obtemos*

(2) $u + v - w - (A + B - C) = i + j - k$

O segundo membro é um infinitésimo pelo teorema I [...] [teorema relativos aos infinitésimos - Uma soma algébrica de n infinitésimos é um infinitésimo, sendo n um número fixo], logo, [...] [pela definição de infinitésimos]

(3) $\lim_{x \to a} (u + v - w) = A + B - C$ [76]

Analogamente são provados os outros dois teoremas sobre limites.

Derivadas e diferenciais: interpretações físicas e geométricas

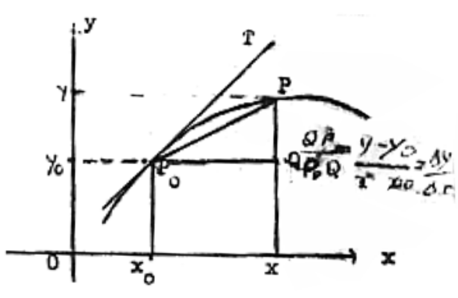
Além das diferenças teóricas, Granville privilegia o uso de regras ou mesmo de exemplos específicos para encaminhar a solução dos problemas do cálculo, enquanto Catunda recorria às suas demonstrações rigorosas, pois, em conformidade com o pensamento matemático moderno, as teorias matemáticas devem ser demonstradas e, portanto, somente com base nas demonstrações é que os problemas do cálculo ou da análise matemática deveriam ser resolvidos.

Por exemplo, no capítulo VI, "Derivadas e diferenciais", Catunda definiu formalmente derivada da seguinte forma:

> *Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo $a \longmapsto b$. Para estudar o comportamento dessa função nas vizinhanças no ponto x_o dêsse intervalo, vamos considerar o <u>acréscimo</u>, ou <u>incremento</u>*
>
> $$y = y - y_o = f(x) - f(x_o)$$
>
> *dessa função, correspondente ao acréscimo $\Delta x = x - x_o$, da variável independente, onde x é outro ponto qualquer de $a \longmapsto b$. Chama-se <u>razão incremental</u> de $f(x)$ no ponto x_o, o quociente*
>
> $$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{f(x) - f(x_o)}{(x - x_o)}$$
>
> *Esta razão é uma função de x, definida em todos os pontos de $a \longmapsto b$ com exceção de x_o. Quando esta razão tem, para $x \to x_o$, ou $\Delta x \to 0$, um limite finito, diz-se que a função $f(x)$ é <u>derivável</u> no ponto x_o; êsse limite se chama então <u>derivada</u> de $f(x)$ no ponto x_o e se designa com a notação $f'(x_o)$.*[77]

Catunda apresentou também uma interpretação geométrica de forma análoga da que foi exposta por Fantappiè na sua apostila:

> *Consideremos a curva de equação*



> $$(1) \; y = f(x)$$
>
> *cujo segundo membro é uma função definida num intervalo. Fixado nessa curva um ponto P_o, de coordenadas x_o e $y_o = f(x_o)$, a cada ponto $x \neq x_o$ do intervalo de definição, corresponde um ponto P da curva, e portanto, uma secante P_0P, cujo coeficiente angular é dado, em grandeza e sinal, como se vê pela figura, pela razão incremental*
>
> $$(2) \quad \frac{QP}{P_{oQ}} \quad \frac{y - y_o}{x - x_o} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ [78]

Prosseguindo a interpretação geométrica da derivada, da mesma forma que Fantappiè, Catunda afirma que, se x tender a x_0, o ponto P, que está sobre a curva, tenderá a P_0, e se a razão (2) tiver um limite finito, ou seja, $y' = f'(x_0)$, a reta P_0T, de coeficiente angular y', será a posição limite para a qual a secante variável P_0P deve tender. Assim, P_0T é dita tangente da curva $y = f(x)$ e a sua equação em coordenadas correntes X e Y é $(y - y_0) = y'(x - x_0)$.

Catunda enfatiza que, no caso de os eixos serem retangulares, a derivada y' será igual à tangente trigonométrica do ângulo α que a tangente à curva no ponto P_0 forma com o eixo Ox. Desse resultado, Catunda deduziu também que a equação da normal é $(x - x_0) + y'(y - y_0) = 0$.

Desse modo, Catunda faz a interpretação geométrica da derivada a partir do desenho da curva da equação $y=f(x)$, tentando, no nosso entendimento, ilustrar geometricamente a definição algébrica de derivada, diferentemente de Granville, que preferiu fazer essa interpretação, no seu livro, a partir de uma regra geral de derivação, subdividida em quatro passos, a saber:

Primeiro Passo. Substitui-se x por x + Δx e coloca-se o novo valor da função, y + Δx.

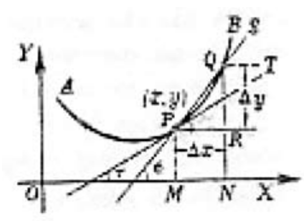
Segundo Passo. Subtrai-se o dado valor da função do novo valor, achando-se, assim, Δy (o acréscimo da função).

Terceiro Passo. Divide-se Δy (acréscimo da função) por Δx (acréscimo da variável independente).

Quarto Passo. Acha-se o limite do quociente quando Δx (acréscimo da variável independente) tende a zero. Este limite é a derivada.[79]

Em nossa leitura, Graville pareceu mais preocupado em apresentar diretrizes preestabelecidas para resolver uma série de problemas práticos do que com a questão da compreensão da definição de derivada. Fato, de certa forma, muito comum não só entre os autores de livros, mas também daqueles que gerenciavam o ensino da matemática nas instituições de nível superior dessa época, nas quais as teorias da matemática eram apenas uma ferramenta para viabilizar a prática da engenharia, sem existir uma preocupação prévia com a origem e com as limitações que as regras preestabelecidas poderiam ter dentro das teorias estudadas.

Após a interpretação geométrica do quarto passo da regra geral, Granville enuncia o seguinte teorema: "O valor da derivada na abscissa de um ponto de uma curva é igual ao coeficiente angular da tangente à curva nesse ponto."[80] Tal teorema é importante, segundo ele, nas aplicações do cálculo diferencial à geometria – razão pela qual ele considera necessário "[...] primeiro, recordar a definição de reta tangente a uma curva num ponto P da curva".[81] Ainda em suas próprias palavras:



Por P e por um outro ponto Q da curva (V. figura) tracemos uma reta PQ. Fazendo Q tender a P, movendo-se sobre a curva, a reta PQ girará em torno de P e a sua posição é a tangente em P.

Seja

(1) y=f(x)

a equação da curva AB. (V. figura).[82]

Assim, Granville derivou a equação y=f(x) pela regra geral de derivação já apresentada anteriormente.

Vale notar que, além da análise de Catunda ter buscado argumentos diferentes daqueles utilizados por Granville, ela ainda o excede quando discute que se a razão

$$(2)\quad \frac{QP}{P_{oQ}} \quad \frac{y-y_o}{x-x_o} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tem limite infinito para $x \rightarrow x_0$, isso corresponderia a uma tangente paralela ao eixo Oy, cuja equação seria $X = x_o$ e, se os eixos forem ortogonais, a normal seria paralela ao eixo Ox, de equação $Y = y_o$.

Desse modo, concluiu que: "[...] a condição necessária e suficiente para que uma curva de equação (1) [y=f(x)] tenha tangente em seu ponto $P_0(x_o, y_o)$ é que a razão incremental (2) tenha limite para $\Delta x \rightarrow 0$; para que exista tangente não paralela a Oy, é necessário e suficiente que êsse limite seja finito, isto é, que exista a derivada $f'(x_0)$."[83]

Catunda finalizou a sua interpretação geométrica da derivada de uma função fazendo uma discussão que não é vista no *Curso* de Fantappiè. Tal discussão é sobre os problemas da determinação da tangente, quando esta é dada em equações paramétricas. Argumenta que a equação assim definida põe o problema da determinação da tangente sob uma forma mais simétrica e elegante. Em outro momento, Catunda faz uma longa interpretação mecânica da primeira e da segunda derivada. Escreve, dentre outras coisas, que a noção de derivada não tem só aplicação na física e na mecânica, mas também em ciências como a biologia, a sociologia e a psicologia.

Ainda nesse capítulo, do mesmo modo como exposto no *Curso* de Fantappiè, Catunda demonstrou as regras de derivação. Contudo, afirmou que os teoremas sobre as regras de derivação são baseados nos teoremas sobre limites, válidos tanto para a derivada à esquerda como para a derivada à direita das funções consideradas. As igualdades demonstradas são:

a) $(y \pm z)' = y' \pm z'$;

b) $(ky)' = ky'$ *(k constante);*

c) $(yz)' = yz' + y'z$

d) $(y)'/z = (zy'–yz')/z^2$ *(supondo* $z \neq 0$ *no ponto x)*

Onde, segundo Catunda, y e z são "duas funções de x definidas num mesmo intervalo e deriváveis (e portanto contínuas) num ponto x do mesmo"[84]. Essas igualdades são demonstradas por Catunda sem fazer uso da regra geral ou "regra dos quatro passos" utilizada por Granville na demonstração das regras de derivação. Por exemplo, a derivada de uma soma é demonstrada por Granville como:

Seja $y = u + v – w$

Pela Regra Geral,

Primeiro Passo. $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v – w - \Delta w.$

Segundo Passo. $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$

Terceiro Passo. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$

Ora (§24) [neste momento Granville recorre à sua definição de derivada de uma função de uma variável: "Derivada de uma função é o limite da razão do acréscimo da função para o acréscimo da variável independente, quando este último tende a zero"[85]]

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$; $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$; $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx}$

Logo, por (1), § 16 [ou seja, $\lim (u + v – w) = A + B – C$*]*

Quarto Passo. $\frac{dy}{dx} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} – \frac{dw}{dx}$

$\therefore \frac{d}{dx}(u + v – w) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} – \frac{dw}{dx}.$

[Granville afirma ainda que]

A demonstração para a soma algébrica de um número finito qualquer de funções é análoga.[86]

Em Catunda, a derivada análoga é demonstrada a partir da consideração de que: "As regras [ou seja, referentes às regras de derivação] a) e b) exprimem que a operação de derivação de uma função é uma operação linear, isto é, distributiva em relação à soma e permutável com o produto por uma constante".[87]

Complementa informando que: "Para demonstrar, indiquemos em geral com Δf o incremento de uma função f, relativa ao incremento Δx da variável independente". E continua:

"[...] a) $\frac{\Delta(y \pm z)}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) \pm (z + \Delta z) – (y \pm z)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \pm \frac{\Delta z}{\Delta x}$

e passando ao limite para Δx→0 temos a primeira fórmula [igualdade a)] a qual se estende para o caso de um número finito qualquer de parcelas". [88]

Considerações finais

Depois dessa análise comparativa do livro *Curso de análise matemática* de Omar Catunda com os livros *Elementos de cálculo diferencial e integral* de Granville, *Curso de análise matemática* de Fantappiè e *Foundations of modern analysis* de J. Dieudonné, identificamos alguns elementos que indicam ao nosso juízo a sua forma peculiar de se apropriar da análise matemática moderna, característica da sua contribuição para a institucionalização da matemática moderna no Brasil, na medida em que esse livro foi largamente difundido e utilizado[89] nos cursos de matemática em várias regiões do país.

Como destacamos na introdução, as abordagens modernas do cálculo e da análise matemática, dentre as quais incluímos o livro de Catunda, caracterizam-se em geral pela utilização de conceitos modernos de número e de função, base para a abordagem dos limites, das derivadas e da continuidade na linguagem dos conjuntos, com as notações em épsilons e deltas, diferenciando-se das abordagens anteriores, como aquela adotada por Granville, nas quais estão ausentes esses conceitos, incluindo a abordagem das derivadas que é feita com base nos infinitésimos e das demonstrações e provas que não atendem aos mesmos padrões de rigor alcançados nos tratados modernos.

Dentro dessa perspectiva, na historiografia da matemática podem-se evidenciar alguns aspectos do processo de constituição da matemática moderna, tais como: profissionalização, disciplinarização, especialização, unificação e generalização do método científico, que é baseado, dentre outros, na algebrização e na axiomatização. Tal processo começou a ser constituído principalmente a partir do século XIX, portanto não era um padrão na matemática praticada antes desse período, que hoje chamamos de clássica. A prática da matemática no período prioritariamente anterior ao século XIX se confundia, por exemplo, com a física e os seus ramos como a mecânica e a astronomia, pois não se tinha estabelecido a matemática como um campo disciplinar autônomo de investigação. Ainda, o desenvolvimento da álgebra tornou-se outro ponto fundamental para a constituição da matemática moderna. A álgebra passou a ser imprescindível no estudo das relações matemáticas. Até o começo do século XIX, ela não era mais que a teoria das equações, que eram geralmente associadas a problemas particulares, cujas soluções eram quase sempre dadas abordando cada caso em separado, isto é, através do método sintético.[90] Assim, os matemáticos tomaram a aritmética como a linguagem da álgebra e instituíram uma nova caracterização para os números. Estes deixaram de ser associados à ideia empírica de quantidade para serem concebidos como símbolos abstratos, sem qualquer referência à realidade concreta.

Catunda segue esses padrões modernos no seu livro de análise matemática, mas não apenas na abordagem moderna clássica da análise, tendo em vista que se apropriou também das ampliações da análise nos campos algébricos e topológicos, seja por conta da influência de Fantappié no trabalho com os funcionais analíticos, seja por conta da influência da escola Bourbaki, seja por conta da influência americana decorrente do período em que passou nos Estados Unidos[91] e dos contatos posteriores. Todavia, Catunda tinha uma característica que era própria, expressão dessa sua formação eclética, resultante dessa diversidade de influências científicas recebidas: a proposta metodológica e didática de associar aquilo que chamava de "intuição", concretizada sempre pelos exemplos e referências geométricas, com aquilo que chamava de "rigor", na adesão aos padrões de linguagem, analíticos e lógicos, típicos da matemática moderna.

De fato, ao longo da sua trajetória profissional, Omar Catunda atualizava continuamente a sua cultura científica e os seus conhecimentos matemáticos. Isso contribuiu para que ele assimilasse no seu *Curso* todas as influências a que foi submetido, fossem da escola bourbakista, fossem os cursos de cálculo avançado de origem americana, sem se esquecer, é claro, da tradição italiana. É por isso que se destaca o tempo todo, tanto nas aulas ministradas, quanto nas páginas do livro, uma referência sistemática à geometria sempre acompanhada do tratamento algébrico-analítico dos assuntos e uma abordagem didática baseada na complementaridade entre o que chamava de "intuição" e os padrões vigentes de rigor. Catunda acreditava firmemente que essa abordagem ajudaria os alunos na aprendizagem dos assuntos ensinados.

Todavia, essa abordagem didática não foi determinante para o sucesso do livro de Catunda entre os estudantes e professores, segundo depoimentos de alguns dos seus ex-alunos, uma vez que suas aulas e seu livro eram reconhecidos como pouco acessíveis, complexos e de difícil compreensão. Na verdade, houve lugares em que esses foram motivos para que a análise matemática moderna fosse mal recebida e rechaçada.[92] Portanto, ao nosso juízo, combinaram-se dois fatores primordiais para que o *Curso de análise matemática* de Omar Catunda cumprisse o seu papel na institucionalização da matemática moderna no Brasil: para que a corporação científica e profissional de matemáticos que se formava no Brasil naquele período iniciasse seu processo de reconhecimento internacional era crucial a institucionalização de práticas e de conhecimentos matemáticos nos espaços de ensino e pesquisa segundo os padrões e as referências vigentes internacionalmente; consequentemente, a análise matemática, uma das áreas tradicionais de pesquisa matemática no âmbito internacional, abordada segundo esses padrões, ocuparia naturalmente um lugar fundamental na formação dos novos profissionais da área. Por outro lado, sendo a FFCL-USP um dos centros onde se iniciou a institucionalização da matemática moderna no Brasil,[93] Omar Catunda, seu primeiro catedrático de análise matemática, tinha naturalmente reservado um lugar de destaque nesse processo, que ocupou efetivamente, dentre outras formas, com a publicação do seu *Curso*.

Sem ter como objetivo estabelecer uma controvérsia acerca da prioridade, cabe destacar que o livro de Catunda, por ser uma das primeiras obras de análise matemática moderna publicada no país em língua vernácula, tornou-se efetivamente um instrumento privilegiado da difusão desse ramo da matemática moderna no Brasil, pois foi durante muito tempo a única ou principal referência para muitos estudantes e professores, que ainda hoje é considerado por muitos como um livro bem escrito, moderno e rigoroso.

Notas e referências bibliográficas

André Mattedi Dias é doutor em História Social, USP. Professor adjunto do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História da Ciência UEFS/UFBA. ***Eliene Barbosa*** é mestre em Ensino, Filosofia e História da Ciência UEFS/UFBA. Professora Assistente da UEFS. Agradecemos a Janice Cassia Lando (UESB), Inês Angélica Andrade Freire (UESB) e Mariana Moraes Lôbo Pinheiro – integrantes do Grupo em História das Ciências com ênfase na Bahia do PPGEFHC UFBA/UEFS – pelas suas críticas e sugestões a esse texto. E-mails: elienebarbosalima@gmail.com e mattedi@uefs.br

1 TRUIK, Dirk J. Mathematics in the early part of the nineteenth century. In: BOS, Henk J.M.; MEHRTENS, Herbert; SCHNEIDER, Ivo (Eds). *Social history of nineteenth-century mathematics*. Boston: Birkhäuser, 1981, p. 6-20.

2 JAHNKE, Hans Niels; OTTE, Michael. Origins of the program of "arithmetization of mathematics". In: BOS; MEHRTENS; SCHNEIDER, op. cit., p. 28-35.

3 SCHNEIDER, Ivo. The professionalization of mathematics and its educational context: introduction. In: BOS; MEHRTENS; SCHNEIDER, op. cit., p. 75-88; SCHUBRING, Gert. The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics. In: BOS; MEHRTENS; SCHNEIDER, op. cit., p. 111-134; BEN-DAVID, J.; ZLOCZOWER, A. The growth of institutionalized science in Germany. In: BARNES, Barry (Ed.). *Sociology of science*. Harmondsworth: Penguin Books, 1972.

4 HOUZEL, Christian. Notice. In: EULER, Léonard. *Introduction à l'analyse infinitesimale.* Paris: ACL, 1987. Disponível em: http://gallica.bnf.fr. Acesso em: 16 mar. 2007.

5 Atualmente, a análise é a parte da matemática que estuda as funções utilizando os métodos dos limites, sejam definidas no conjunto dos números reais ou dos complexos – análise clássica – ou em espaços de objetos quaisquer onde estejam definidos "vizinhança" – espaços topológicos – ou distância – espaços métricos. Por exemplo, a análise funcional estuda espaços de funções, como os de Banach ou de Hilbert. NIKOL'SKII, S. M. Mathematical analysis. In: HAZEWINKEL, Michiel (Ed.). *Encyclopaedia of mathematics.* Berlim: Springer-Verlag, 2002. Disponível em: http://eom.springer.de/M/m062610.htm. Acesso em: 15 jun. 2008.

6 Durante o século XVIII, os números, na inseparável conexão com o conceito de quantidade, representavam o objeto real do campo da matemática, e a álgebra e o cálculo simbólico da matemática eram considerados meramente como a linguagem que permitia representar de forma fácil e sugestiva as relações entre os números e as quantidades. Esse *status* tornou-se precisamente inverso no século XIX. A álgebra incluía diretamente agora as relações matemáticas reais, que se constituíam a matéria sob estudo, enquanto a aritmética, por sua parte, tornou-se a linguagem da álgebra em relação com toda a matemática, pelo meio da qual, e na qual, todos os fatos matemáticos deveriam ser expressos. Esse processo de aritmetização finalmente culminou, ao final do século, no fato de que a consistência da matemática ficou reduzida à consistência da aritmética, elevando a aritmética à posição de ciência fundamental da própria matemática. (tradução livre). JAHNKE; OTTE, op. cit., p. 28-29.

7 BOYER, Carl B. *The concepts of the calculus*: A critical and historical discussions of the derivative and the integral. New York: Hafner Publishing Company, 1949, p. 267-298. Veja também a nota 67 sobre os trabalhos precursores de Bernard Bolzano.

8 O alemão Leibniz, que desenvolveu também trabalhos nas ciências, literatura e na política, tinha um especial interesse pela lógica e pela filosofia e, na importância do método das provas da matemática para o estudo desses temas. Particularmente nas ciências, destacou-se a sua teorização sobre o cálculo diferencial, no qual desenvolveu também uma notação para a utilização das suas técnicas que ainda está presente nos dias de hoje. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Leibniz.html. Acesso em: 15 jun. 2008.

9 O inglês Isaac Newton, por volta de 1663, começou a produzir trabalhos de cunho científico na ótica, física, astronomia e na matemática. Um de seus trabalhos mais controversos é sobre o cálculo diferencial e integral, fundamentado no "método dos fluxões". Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Newton.htm. Acesso em: 18 jun. 2008; BOYER, op. cit., p. 187-223.

10 BARON, Margaret. *Curso de história matemática*: origens e desenvolvimento do cálculo. Unidade 4. Tradução de José Raimundo B. Coelho et al. Brasília: UnB, 1985, p. 36

11 Original em alemão: COURANT, Richard. *Vorlesungen über differential- und integralrechnung*. Berlin: Julius Springer, 1930-1931 [c1927].

12 DIAS, André Luís Mattedi. Matemática no Brasil: Um estudo da trajetória da historiografia. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Rio Claro, v. 2, n. 4, out. 2002a.

13 Veja: SILVA, Clóvis Pereira. Sobre Theodoro Augusto Ramos. *Revista Uniandrade*. Curitiba, v.4, 2003. Disponível em: http://www.uniandrade.br/publicacoes/revista/cientifica. Acesso em: 25 jun. 2004; DIAS, André L. Mattedi. *Engenheiros, mulheres, matemáticos*: interesses e disputas na profissionalização da matemática na Bahia (1896 – 1968). 320 f. Tese (Doutorado em História Social) – FFLCH - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002b.

14 OLIVEIRA, Antonio S. Vieira de. *O ensino do cálculo e integral na Escola Politécnica de São Paulo, ano de 1904:* uma análise documental*.* 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004, p. 31-50.

15 DIAS, André Luís Mattedi. Omar Catunda: alguns aspectos de sua trajetória e das suas concepções científicas e educacionais. *História Educação Matemática.* Rio Claro, v.1, n.1, p. 39-48, 2001.

16 Segundo Ubiratan D'Ambrosio, foi o primeiro livro de análise matemática moderna publicado por um brasileiro. D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo*, v. 2, n. 8, p. 7-37, jul.-dec. 1999. Disponível em: http://vello.sites.uol.com.br/historia.htm. Acesso em: 16 jun. 2004.

17 LIMA, Eliene Barbosa; DIAS, André Luís Mattedi. A análise matemática no ensino brasileiro: a contribuição de Omar Catunda. *Bolema*. Rio Claro, n. 36, 2010. (no prelo)

18 CATUNDA, Omar. *Curso de análise matemática*. São Paulo: Bandeirantes, v.7, 1952.

19 ___.___. São Paulo: EDUSP, v.1, 1962.

20 Os matemáticos André Weil (1906-1998), Charles Ehresmann (1905-1979), Claude Chevalley (1909-1984), Henri Cartan (1904), Jean Delsarte (1903-1968), Jean Dieudonné (1906-1992), René de Possel (1905-1974) e Szolem Mandelbrojt (1899-1983), além do físico Jean Coulomb (1904-1999), fundaram, em 1935, o grupo Nicolas Bourbaki com o objetivo de redigir um tratado de análise matemática melhor adaptado aos desenvolvimentos modernos do que o Curso de Édouard Goursat, referência corrente desde o início do século XX. Fizeram mais do que isso. Além da publicação de uma série de obras de grande repercussão científica internacional, mantêm até hoje o Seminário Bourbaki. André Weil trabalhou na USP em 1945, Jean Dieudonné em 1946, bem como posteriormente outros matemáticos ligados ao grupo. HOUZEL, Christian. Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle. *Gazette des mathématiciens*. Paris, n. 100, p. 53-63, 2004. Disponível em: http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2004/100/smf_gazette_100_52-63.pdf. Acesso em: 22 dez. 2006; PIRES, Rute da Cunha. *A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo*. 578f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2006.

21 GRANVILLE, William Anthony (1863-1943). *Elements of the differential and integral calculus.* Boston: Ginn and Co., 1904. Tradução de J. Abdelhay. Rio de Janeiro: Científica, 1961; utilizaremos a edição GRANVILLE, W.A. et al. *Elementos de cálculo diferencial e integral*. Tradução de J. Abdelhay. Rio de Janeiro: Âmbito Cultural Edições, 1992; FANTAPPIÈ, Luigi. *Curso de análise matemática*. [S.l.: s.n.], [19--] (Apostila disponível na biblioteca da IME-USP); DIEUDONNÉ, Jean. *Foundations of modern analysis.* New York: Academic Press, 1960.

22 CATUNDA. *Curso de análise matemática*, parte I. 3. ed. São Paulo: Bandeirantes, 1956; ___.___, parte II. 3. ed. rev. São Paulo: Bandeirantes, 1954; ___.___, parte III. 3. ed. São Paulo: Bandeirantes, 1954; ___.___, parte IV. São Paulo: Bandeirantes, 1954; ___.___, parte V. 3. ed. São Paulo: Bandeirantes, 1955; ___.___, parte I, 1. ed. São Paulo: Matemática Editora, 1958; ___.___, parte VII. São Paulo: Matemática Editora, 1959; ___.___, v. 1. São Paulo: EDUSP, 1962.

23 A escola italiana trabalhava, preferencialmente, as teorias da matemática fazendo uso do rigor centrado no método geométrico, diferentemente do Grupo Bourbaki, que estava interessado em abordar a matemática numa perspectiva ampla, privilegiando os métodos algébricos e abstratos. NACHBIN, Leopoldo. *Ciência e sociedade*. Curitiba: UFPR,1996, p. 40; LIMA, Eliene B. *Dos infinitésimos aos limites*: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da análise matemática no Brasil. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Instituto de Física, UFBA-UEFS, Salvador, 2006.

24 DIAS, op. cit., 2002b, p. 122, 149.

25 LIMA, Arlete Cerqueira. Depoimento. *Cadernos do IFUFBa*. Salvador, ano I, n. 3, p. 36-53, jul. 1985, p. 43.

26 Apud REIS, Frederico da S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise.* 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2001, p. 285-302. Entrevista concedida a Frederico da S. Reis. IMPA, Rio de Janeiro, 05 nov. 1999.

27 CATUNDA, *Curso de análise matemática*, op. cit., p. 1 (salvo menção em contrário, v. 1, edição 1962).

28 Ibid., p. 4-5.

29 SCHUBRING, Gert. Rupturas no estatuto matemático dos números negativos. *Boletim GEPEM*. Rio de Janeiro, n.37, p. 51-64, ago. 2000; n.38, p. 73-93, fev. 2001.

30 CATUNDA, op. cit., 1956, p. 2.

31 Ibid., p. 7.

32 Ibid., p. 12.

33 Ibid.

34 Ibid., p.12-13, grifo no original.

35 FANTAPPIÈ, op. cit., p. 2.

36 Ibid.

37 Ibid., grifo no original

38 Nota biográfica e bibliografia disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cantor.html. Acesso em: 16 fev. 2007.

39 FANTAPPIÈ, op. cit., p.23, grifo no original.

40 CATUNDA, op. cit., p. 23.

41 GRANVILLE, op. cit., p. 9.

42 1. Uma quantidade constante é uma quantidade determinada que sempre mantem o mesmo valor. Tais são os números de toda espécie, que conservam constantemente o valor que tenham uma vez obtido [...] Na análise ordinária, que têm por objeto as quantidades determinadas, designa-se as conhecidas pelas primeiras letras do alfabeto, enquanto as que não o são pelas últimas, mas esta é uma distinção que não recebe muita atenção na análise ou geometria superior; neste caso, as quantidades são enfocadas sob um outro aspecto particular, umas sendo consideradas como constantes, as outras como variáveis. 2.Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou, se se quiser, uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados. Um valor determinado qualquer podendo ser expresso em número, segue-se que uma quantidade variável compreende todos os números de qualquer natureza que sejam [...] pode-se concebê-la como abraçando todas as quantidades determinadas. De resto, tem-se o costume de representar quantidades variáveis pelas últimas letras do alfabeto [...]. 3. Uma quantidade variável torna-se determinada quando um valor determinado qualquer lhe é atribuído. Então, ela pode ser determinada de infinitas maneiras, pois que podem ser substituídas por todos os números imagináveis [...] pois a quantidade variável abrange em si praticamente todos os números, tanto afirmativos como negativos, tanto inteiros como fracionários, tanto racionais como irracionais e transcendentes, sem que o zero e os números imaginários sejam excluídos do significado da quantidade variável. EULER, Léonard.

Introduction a l'analyse infinitésimale. Tome premier. Tradução J. B. Labey. Paris: Barrois, 1796 p. 1-2. Disponível em: http://books.google.com.br/books. Acesso em: 26 mar. 2010.

43 Nomeamos quantidade variável àquela que se considera como devendo receber sucessivamente diversos valores diferentes uns dos outros. Designamos uma semelhante quantidade por uma letra tomada ordinariamente entre as últimas do alfabeto. Chamamos ao contrário quantidade constante, e designamo-la ordinariamente por uma das primeiras letras do alfabeto, toda quantidade que recebe um valor fixo e determinado (tradução livre). CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Imprimerie Royale, 1821, p. 4. Disponível em: http://books.google.com.br/books. Acesso em: 26 mar. 2010.

44 GRANVILLE, op. cit., p.10.

45 4. Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira que seja, desta mesma quantidade e de números, ou de quantidades constantes. [...] 5. Uma função de variável é então também uma quantidade variável. Com efeito, como pode-se por no lugar da variável todos os valores determinados, a própria função receberá uma infinidade de valores, e é impossível conceber alguma, que não seja suscetível, pois a variável compreende mesmo os valores imaginários. EULER, op. cit., p. 2-3.

46 Quando quantidades variáveis são ligadas entre si de tal modo que, o valor de uma sendo dado, pode-se concluir os valores de todas as outras, concebe-se de ordinário essas diversas quantidades expressas por meio de uma delas, que toma então o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas pelo meio da variável independente são chamadas de funções desta variável (tradução livre). CAUCHY, op. cit., p. 19.

47 CATUNDA, op. cit., p. 83.

48 FANTAPPIÈ, op. cit., p. 6.

49 FANTAPPIÈ, Luigi. Conjuntos lineares. Funções e limites no campo real. In: FANTAPPIÈ, op. cit., p. 6.

50 1. Uma quantidade variável é uma grandeza considerada em geral, contendo todos os valores determinados; uma reta infinita, tal como RS, será mais – apropriado representar, em geometria, uma quantidade dessa natureza. Com efeito, pode-se tomar sobre uma reta infinita, uma parte qualquer, que tem um valor determinado, essa reta apresenta o espírito da mesma ideia de grandeza, que a quantidade variável. Precisa-se então, sobretudo, fixar sobre uma reta infinita RS um ponto A, que será suposto a origem das grandezas determinadas, que se separará, assim uma porção determinada AP representará um valor determinado compreendido na quantidade variável. 2. Seja então x uma quantidade variável, representada pela reta infinita RS; é claro que todos os valores determinados de x, desde que eles sejam reais, podem ser exprimidos por porções tomadas sobre a reta RS (tradução livre). EULER, Leonard. *Introduction a l'anlasyse infinitésimale*. Tome second. Tradução J. B. Labey. Paris: Bachelier, 1797, p.1. Disponível em: http://books.google.com.br/books. Acesso em: 27 mar. 2010.

51 4. [...] Seja y essa função de x, a qual por conseguinte receberá um valor determinado, se substituí-se x por um valor dado. Tomando uma reta infinita RAS para representar os valores de x, será necessário, para cada valor determinado AP de x, estabelecer sobre essa reta uma perpendicular PM, igual ao valor correspondente de y [...] (tradução livre). Ibid., p. 2.

52 6. [...] Assim cada função de x, relacionada dessa forma à geometria, dará uma linha reta ou curva, cuja natureza dependerá dessa função y. 7. Conhece-se perfeitamente, seguindo esse procedimento, a linha curva que resulta da função y, pois é essa função que determina todos os pontos [...]. 8. [...]. Assim uma função qualquer de x dará certa linha reta ou curva; da qual segue que reciprocamente se poderá relacionar as funções de linhas curvas (tradução livre). Ibid., p. 3-4.

53 Ibid., p. 4.

54 CATUNDA, op. cit., p. 100.

55 [...] a função f(x) será continua em relação à x entre os limites dados, se, entre estes limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produz sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função (tradução livre). CAUCHY, op. cit., p. 34-35.

56 CATUNDA, op. cit., p. 100-101, grifo no original.

57 GRANVILLE, op. cit., p. 16.

58 Para detalhadas informações sobre esta discussão, veja: LAGRANGE, Joseph L. Introduction. In: *Théorie des fonctions analytiques*. 3rd. éd. rev. Paris: Bachelier, 1847; BOYER, op. cit.; STRUIK, Dirk J. O século XVII. In: *História concisa das matemáticas*. Tradução de João Cosme S. Guerreiro. 2 ed. Lisboa: Gradativa, 1992, p. 157-190.

59 D'Alembert, em seu artigo denominado "Limit" (1765) para a *Encyclopédie Methodique* (1751-1772), definiu limite afirmando que "[...] uma grandeza é o limite de outra grandez quando a segunda pode aproximar-se da priemeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandez nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima de modo que a diferença entre tal quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável" (p.28). Apud BARON, op. cit. Essa definição de d'Alembert, que é baseada na percepção geométrica, segundo Carl Boyer, foi interpretada pelos matemáticos desta época como tão metafísica quanto a concepção de infinitamente pequeno de Leibniz e Newton. BOYER, op. cit.

60 Consideremos dada uma função fx de uma variável qualquer x. Se para o lugar de x, pormos x + i, i será uma quantidade qualquer indeterminada, ela se tornará f(x + i), e pela teoria das séries, pode-se desenvolver em uma série desta forma: fx + pi + qi2 + ri3 + ..., na qual as quantidades p, q, r, etc., coeficientes das potências de i, serão de novas funções de x, derivadas das funções primitivas x, e independentes da indeterminada i (tradução livre). LAGRANGE, op. cit.

61 GRANVILLE, op. cit., p. 13.

62 Quando os valores atribuídos sucessivamente a uma mesma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de maneira a terminar por diferir deste tão pouco quanto se queira, este último é chamado limite de todos os outros (tradução livre). CAUCHY, op. cit., p. 4.

63 GRANVILLE, op. cit., p.14.

64 Bernard Bolzano (Praga, 1781-1848) dedicou-se, dentre outras coisas, aos fundamentos da matemática, publicando algumas obras e deixando muitos manuscritos inéditos. Um dos seus objetivos era apresentar conceitos de limite, convergência e derivada em bases puramente aritméticas, isentos de componentes geométricos, razão pela qual buscou também aperfeiçoar o conceito de número. Bolzano antecipou alguns desenvolvimentos importantes nessa área, posteriormente trabalhados por outros matemáticos de forma independente. Cf. RUSS. S. Bolzano's analytic programme. *The Mathematical intelligencer*, v. 14 , n. 3, p. 45-53, 1992; Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano.html. Acesso em: 16 fev. 2007.

65 CATUNDA, op. cit., p. 96, grifo no original.

66 Ibid.

67 CATUNDA, Omar. A introdução dos conceitos no ensino da matemática. *Ciência e Cultura*, v.IX, n.1, p. 31-35, 1957.

68 LOIBEL, G. F. [*Carta*]. 5-10 out. 2005, São Carlos-SP [para] LIMA, Eliene Barbosa. Conceição do Jacuípe-Ba, 3p. Respostas para um questionário sobre Omar Catunda e do seu Curso de Análise Matemática.

69 CATUNDA, *Curso de análise matemática*, op. cit., p. 96, grifo no original.

70 Ibid., p. 103.

71 Ibid., p. 104.

72 Ibid.

73 GRANVILLE, op. cit., p. 20.

74 Ibid., p. 20-21.

75 Ibid., p. 14.

76 Ibid., p. 21.

77 CATUNDA, *Curso de análise matemática*, op. cit., p. 179, grifo no original.

78 Ibid., p.181-182.

79 GRANVILLE, op. cit., p. 28.

80 Ibid., p. 32.

81 Ibid., p. 31.

82 Ibid., p. 31-32.

83 CATUNDA, *Curso de análise matemática*, op. cit., p.182.

84 Ibid., p. 188.

85 GRANVILLE, op. cit., p. 24.

86 Ibid., p. 36.

87 CATUNDA, *Curso de análise matemática*, op. cit., p.188

88 Ibid..

89 Veja: LIMA, Eliene B., op. cit.

90 DIAS, André L. Mattedi. *Uma crítica aos fundamentos do ensino autoritário e reprodutivo da matemática.* 79f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, UFBa, Salvador, 1994, p. 44-45; SCHUBRING, op. cit., p. 75.

91 Omar Catunda obteve uma bolsa da Fundação Rockefeller para ir aos Estados Unidos. Escolheu a Universidade de Princeton para aprofundar os seus conhecimentos sobre a nova matemática, dita moderna, permanecendo lá no período de 1947 a 1948, assistindo conferências, simpósios e cursos de matemáticos de grande prestígio internacional, como Emil Artin (1898-1962), Heinz Hopf (1894-1971), John von Neumann (1903-1957) e Solomon Lefschetz (1884-1972). CATUNDA, Omar. *Memória autobiográfica*, p. 41.

92 Veja: LIMA, Eliene B., op. cit.

93 Por exemplo, veja: TÁBOAS, Plínio. Z. *Luigi Fantappiè:* influências na matemática brasileira: um estudo de história como contribuição para a educação matemática. 212f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005; SILVA, Circe M. S. da. A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, 23, Caxambu. *Anais*... Caxambu: ANPEd, 2000. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/faculdade_filosofia.pdf. Acesso em: 25 jun. 2004; SILVA, Clóvis Pereira da. O desenvolvimento da matemática no Brasil , da década de 1930 à década de 1980. In: *A Matemática no Brasil*: uma história do seu desenvolvimento. Curitiba: UFPR,1992.

[Artigo reapresentado em 04/2010 | Aceito em 08/2010]