W. R. Hamilton: fonder l'algèbre comme science dans l'intuition du temps pur*

W. R. Hamilton: founding of algebra as a science in intuition of pure time

DOMINIQUE FLAMENT

Equipe REHSEIS | CNRS

Je désire habituellement trouver ou faire en Algèbre un système de démonstrations reposant finalement sur des intuitions [...]
On peut faire reposer l'Algèbre sur [...] l'intuition de temps [...]
Il est impossible de traiter l'Algèbre comme Science (je ne dis pas comme Art ou comme Langue) sans plus ou moins évoquer l'aide de cette intuition.[1]

I. Introduction

Au début du 19e siècle, les tentatives de représentation géométrique des quantités *imaginaires* ou *impossibles* connaissaient enfin quelques réussites. Mais, singulièrement, elles n'ont pas l'effet attendu; les mathématiciens les plus reconnus, tels que C.F. Gauss (1777-1855), A.-L. Cauchy (1789-1857), W. R. Hamilton (1805-1865), … , restèrent insensibles à ces premiers succès. Depuis le 17e siècle s'était peu à peu imposée l'idée que de telles entités cesseraient de poser problème lorsque l'on réussirait enfin à les figurer géométriquement, faute de ne pouvoir s'en passer; cependant, ce ne fut pas le cas. De nombreuses difficultés demeuraient; cette *réalisation* géométrique de l'imaginaire était devenue entre-temps une bien plus modeste *représentation*

RÉSUMÉ *Hamilton prend le risque d'une proposition en apparence ouvertement métaphysique et en rupture avec celles de travaux réformateurs déjà en cours de développement depuis le début des années 1820. Il surprend quand, opposé par principe aux autres réformateurs qui prônent la nécessité d'une algèbre symbolique, il substitue l'"ordre en progression" à la grandeur, après avoir signalé l'évidence de la relation entre le temps et les progrès de l'algèbre. Il construit une science mathématique du temps pur: elle "existe", est naturellement comparable à l'algèbre (comme Science), elle coïncide avec elle et, pour finir, est l'algèbre elle-même. L'algèbre est ainsi tirée d'affaire en devenant une branche de la philosophie de l'esprit. La "découverte" du quaternion sera considérée, dès les "opposants" de l'École algébrique anglaise, comme l'ouverture sur la liberté de "créer" en mathématiques.*

Mots-clés *Histoire des mathématiques, Algèbre, Nombres complexes, Justification, Philosophie des sciences.*

ABSTRACT *Hamilton has been recognized for the risk of his proposal, apparently very metaphysical, but also clearly against the reforms developed since 1820. His principles led him in the opposite sense of the reformists who advocated the need of a Symbolical Algebra. Therefore, he surprises when he substitutes "order in progression" for "magnitude", having pointed out the evidence of the relation between the time and the progress of algebra. He builds a mathematical Science of Pure Time. This science exists, it is naturally comparable to algebra (as a Science), it coincides with it, and, finally, it is Algebra itself. The algebra then is left out of problems and becomes a branch of the Philosophy of the Mind. The discovery of the quaternion will be considered, from the very first "opponents" of the English Algebraic School, like an overture to the liberty of "creation" in mathematics.*

Key Words *Mathematics History. Algebra. Complex numbers. Justification. Philosophy of Science.*

géométrique. La géométrie euclidienne malmenée perdait son exclusive «perfection», son rôle de *modèle* et de critère de vérité ou d' «existence» pour l'objet algébrique. À cela venait s'ajouter une réaction à l'encontre de la «généralité de l'algèbre», cause de débordements trop nombreux qui susciteront de nouvelles exigences, dont celle d' «existence algébrique», que l'on retiendra par un abus de langage tel un «retour à la rigueur»[2].

Le climat en ce début de 19e siècle était donc propice à de nouvelles propositions: les revers de l'*application de l'algèbre à la géométrie*, sa remise en cause suscitée par d'excessives complications lors de l'utilisation des coordonnées pour la résolution de problèmes géométriques autrement simples, pousseront une partie des mathématiciens à en «revenir» à une géométrie *pure* ou *synthétique*; l'apparition de nombreux *calculs*, outre ceux qui résulteront de la réinterprétation des représentations géométriques évoquées, inviteront également les mathématiciens à revoir cette algèbre qui ne faisait pas de place à ces conceptions mathématiques nouvelles.

Depuis la fin des années 1810 jusqu'au début des années 1840, l'étude des fondements de l'algèbre devint, à quelques rares exceptions notables près[3], une affaire exclusivement britannique; elle sera principalement menée par G. Peacock (1791-1858), A. De Morgan (1806-1871), D. F. Gregory (1813-1844), J. T. Graves[4] et W. R. Hamilton.

On n'insistera pas assez sur le fait que Hamilton est déjà très célèbre et reconnu comme un scientifique éminent tant à l'intérieur qu'à l'extérieur des frontières de son Irlande natale, lorsqu'il prend le risque, certes mesuré, d'une proposition en apparence ouvertement métaphysique et en rupture avec celles de travaux réformateurs déjà en cours de développement depuis le début des années 1820 (Peacock *et alii*). Mais, dès la fin du 18e siècle, on dénoncera non sans excès l'état précaire de l'algèbre; de nombreux faits et déclarations sont là pour rappeler cet état d'inquiétude scientifique.

Pour mémoire, et ne retenir que des efforts qui portèrent sur les quantités ou nombres négatifs, les quantités impossibles et imaginaires et les nombres complexes, ainsi que sur leur statut, et ne pas en retourner à la croisade de Francis Maseres (1731-1824), William Frend (1757-1841), et de bien d'autres, dont Lazare Carnot (1753-1823) et Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), on relèvera que l'algèbre ne peut mériter le nom de *science* que si en sont bannis les «mystères ridicules qui résultent de la supposition des quantités négatives, ou quantités moindres que rien»[5]. Elles ne sont que «simple jargon inintelligible», ou «non-sens», et jettent de l'obscurité là où il n'y a qu'évidence et simplicité: «il aurait été souhaitable en conséquence que les racines négatives n'aient été jamais permises en l'algèbre ou qu'elles en aient été retirées.»[6] Les algébristes parlent de «nombres moindres que rien» qui, multipliés l'un par l'autre, produisent des nombres positifs; ils parlent aussi de «nombres imaginaires»: «ils peuvent découvrir des nombres impossibles qui multipliés ensemble produisent l'unité» et parler de deux racines en chaque équation du deuxième degré ou d'équations qui exigent des «racines impossibles» pour pouvoir être résolues:

Tout cela n'est que jargon, devant lequel recule le sens commun; mais une fois adopté, comme beaucoup d'autres fictions, il trouve les défenseurs les plus acharnés parmi ceux qui aiment se fier aux choses et détestent la couleur d'une pensée sérieuse. [7]

Le manquement de Newton aux principes du raisonnement ne peut pas établir la notion fallacieuse que toute équation a autant de racines qu'elle a de dimensions. […]

Beaucoup de temps est perdu avec un jargon qui a l'apparence de la science, et la vraie connaissance est retardée. Ces volumes sur volumes ont été écrits sur les rêves stupides d'Athanase, et sur les racines impossibles d'une équation de n dimensions.[8]

La remarque suivante, plus tardive, que nous devons à De Morgan, est aussi plus surprenante:

L'expression imaginaire $\sqrt{-a}$ *et l'expression négative* $-b$ *ont cette ressemblance, que l'une ou l'autre se présentant comme solution d'un problème indique quelque contradiction ou absurdité. En ce qui concerne la signification réelle, toutes les deux sont imaginaires, puisque* $0-a$ *est aussi inconcevable que* $\sqrt{-a}$ *.*[9]

L'alternative à laquelle on était parvenu, exacerbée par cet intense afflux de critiques, imposait soit de faire sien le rejet de ces entités; soit de reconsidérer les fondements de l'algèbre. La première option était difficilement envisageable, à moins de renoncer à de trop nombreux acquis essentiels; la seconde est celle qui nous occupe ici.

La réforme de Hamilton pour sortir de l'impasse est de même inspiration que celle de Peacock (et plus largement celle de l'*Ecole algébrique anglaise*[10] et de Martin Ohm), mais elle s'en distingue volontairement et de façon presque caricaturale dans un style qui rappelle à tout moment celui d'un orateur. Pour lui, l'algèbre ne saurait être une seule affaire de symboles et de leurs règles de combinaison; les choses signifiées ne pouvaient être négligées, écartées de toute contemplation. La position de Peacock est aujourd'hui bien mieux connue; on s'en tiendra ici au propos suivant de Hamilton qui illustre comment il entendait se situer part rapport à l'approche algébrique de l'école de Peacock qui, bien que reposant sur une «vraie base scientifique", n'en sera pas moins la cause de sa révolte dès la parution du *Treatise on Algebra* (1830):

Il m'a semblé […] que l'auteur avait eu pour dessein de ramener l'algèbre à un simple système de symboles, et à rien d'autre*; à une affaire de gribouillis, de coups de crayon noirs sur du papier blanc, qui doivent être faits selon un ensemble fixe mais arbitraire de règles: et j'ai refusé, suivant ma propre conviction, de donner le nom élevé de* Science *aux résultats d'un tel système …* [11]

Certes, pour Hamilton, les mathématiques sont, comme pour Peacock, une affaire de relations[12]; mais pas seulement:

Dans toute Science Mathématique, nous considérons et comparons des relations. En algèbre, les relations que nous considérons et comparons d'abord sont des relations entre les états successifs d'une pensée ou d'une chose changeante. Et les nombres sont les noms ou les substantifs de l'algèbre; les marques ou signes grâce auxquels on peut se rappeler de l'un de ces états successifs et le distinguer d'un autre […]. Les relations entre les pensées successives ainsi considérées comme les états successifs d'une pensée plus générale et changeante, sont les relations premières de l'algèbre. […]

… avec le temps et l'espace nous relions tout changement continu, et par les symboles de temps et d'espace nous déduisons et réalisons la progression. Nos marques d'emplacement temporel et local, nos alors *et* là*, sont immédiatement les signes et les instruments de cette transformation par laquelle les pensées deviennent des choses, et l'esprit prend corps, et l'acte et la passion de l'esprit semblent vêtus d'une existence extérieure, et nous nous voyons de loin. Et il y a une telle transformation quand, en Algèbre, nous contemplons le changement de nos propres pensées comme s'il était la progression d'une chose étrangère, et introduisons les Nombres comme les marques ou les signes pour indiquer la place dans cette progression.*[13]

Il reprendra publiquement ces considérations, avec quelques modifications et plus d'emphase, dans la première de ses leçons d'astronomie au *Trinity College* de Dublin (le 8 novembre 1832)[14].

L'algèbre est pour lui plus raffinée et plus générale que la géométrie; son fondement est plus intimement ancré dans la nature même de l'homme que ne l'est celui de la géométrie, les idées d'ordre et de succession apparaissant moins étrangères, moins séparables de nous, que celles de figure et d'étendue. Ce «raffinement» et cette «généralité» expliqueraient que l'algèbre ait été trop souvent ramenée à un simple «exercice de mémoire», à une «application de règles» ou à un simple «tour de passe-passe de symboles»; ils vaudront à l'algèbre d'être considérée comme peu appropriée à l'enseignement des débutants[15].

Hamilton reconnaît avoir profité du *Meeting* de la *British Association for the Advancement of Sciences* de 1834 (à Edinburgh) pour présenter sa théorie[16]; les réactions des mathématiciens furent bienveillantes et son intervention fut publiée[17]. Mais, contrairement à ce qu'avaient laissé croire ses propos, les idées «métaphysiques» ne furent pas abordées à cette occasion. La publication qui se trouve dans les *Reports* de cette rencontre ne renferme aucune allusion à la métaphysique, aucune référence au temps comme intuition fondamentale de l'algèbre: seuls sont développés quelques aspects très limités de sa théorie des couples algébriques (que l'on sait déjà pratiquement achevée dès 1826), sans aucun recours philosophique.

Praticien, Philologue ou théoricien en algèbre? Le choix de Hamilton.

Dans une algèbre proposée comme "exacte contrepartie de la géométrie», Hamilton distingue trois écoles: *Pratique*, *Philologique* et *Théorique*[18], suivant que l'on conçoit l'algèbre comme un *Art*, une *Langue* ou une *Science*; un "instrument", une «langue» ou une «contemplation». Passant sur la première, il fait naturellement figurer dans la seconde l'*École algébrique anglaise*, R. Woodhouse (1773-1827), M. Ohm et J.-L. Lagrange (1736-1813); dans la dernière, il rejoint J.-B. J. Fourier (1768-1830) et A.-L. Cauchy.

Peu de temps auparavant, Hamilton reconnaissait se différencier de ses proches contemporains (sa «brother-band», écrit-il) à la fois dans l'esprit et dans la façon de concevoir l'étude de la *Science*, sur des choses essentielles et permanentes[19]. Mais ici, il tenait surtout à mettre l'accent sur l'orientation de sa propre activité par rapport à celles de ces contemporains: il n'était pas question d'appliquer des règles existantes à un problème donné (*Practical School*), ni de trouver de nouvelles notations ou formulations qui remplaceraient celles déjà existantes (*Philological School*). Il se proposait de «construire» la *Science* qui donnerait vie à la «belle statue morte»[20] qu'était à ses yeux toujours l'algèbre.

Cependant, en procédant ainsi, il ne prétendait nullement vouloir dire qu'un algébriste devait être exclusivement d'une seule école; "Langue et Pensée réagissent, Théorie et Pratique s'entraident". Bien que n'ayant jamais cessé de revendiquer son appartenance à l'école théorique et d'insister sur le fait que son but principal était d' «imprégner d'Intuition toute l'Algèbre», il ne désirait pas moins en cultiver l'aspect philologique[21]. Il rappelait que depuis des années il voulait contempler l'Algèbre comme une branche, presque un type, de philosophie de l'esprit en général[22]; il finira par convenir que tout travail algébrique devait pouvoir, pour l'essentiel, s'en remettre toujours à une et une seule de ces trois écoles.

À son tour, Hamilton reviendra sur les difficultés déjà évoquées qui justifiaient le rejet de la théorie des quantités négatives et imaginaires. Il reprendra presque mot à mot les précédents propos de Maseres et de Frend, mais sans les outrances, pour confirmer qu'en l'état présent de l'algèbre nul n'a besoin d'être particulièrement sceptique pour douter: qu'il doit être dur de «fonder une SCIENCE sur de telles bases»[23]. Vouloir rompre avec ces obscurités, c'était aussi remettre en question la dépendance du concept de *nombre* de celui de *grandeur* (*magnitude*): tout le problème logique posé par l'extension aux imaginaires des règles conçues pour les nombres réels et tous les exemples que rappelle Hamilton devaient leur absurdité à l'association du nombre avec la mesure et la quantité. La théorie existante des quantités négatives et imaginaires devait être définitivement écartée: seule une *Science* encore à «construire» pourra la remplacer et mettre fin à l'obscurité. S. T. Coleridge (1772-1834) est pour beaucoup dans la définition de la *Science* de Hamilton[24].

Seule, la voie «théorique» rendrait ce but accessible: on pourrait toujours, conservant les principes décriés, faire de l'actuelle théorie un système parfaitement rigoureux aux développements logiques irréprochables. Mais, un tel système n'écarterait pas les résultats qui heurtaient les épris de rigueur. Hamilton se fera encore plus insistant en regrettant que la destinée de l'algèbre puisse être celle-ci, alors qu'elle compte de plus en plus d'adeptes et a presque remplacé l'étude de la science géométrique[25]; qu'elle ne soit qu'un simple gain d'*adresse* ou d'*élégance* au détriment de la *Contemplation* et de l'*Intuition*. C'est donc du côté des fondements de l'algèbre, toujours "science du calcul des grandeurs considérées généralement"[26], qu'il fallait se tourner.[27]

Hamilton est parfaitement conscient du caractère discordant de son approche: elle marie volontairement mathématiques et métaphysique pour la recherche du premier principe d'une *Science*, une "science précisément dite; stricte, pure et indépendante, déduite de ses propres principes intuitifs par des raisonnements valides"[28]. Elle ferait de l'algèbre bien plus qu'un système de règles ou d'expressions: un "système de Vérités"[29]. L' "Intuition du TEMPS" est pour lui le premier *rudiment*.

Le temps et l'algèbre

Les plus grandes découvertes en algèbre ont, selon Hamilton, un rapport étroit avec le concept de "temps". Parmi les exemples donnés par Hamilton, on retiendra celui d'Isaac Newton (1643-1727), dont la révolution dans les sphères les plus élevées de l'algèbre pure et appliquée fut réalisée grâce à une théorie "fluxionnaire"[30]. Or, dit Hamilton, la notion de fluxion "renferme la notion de temps"[31]. Celui de John Napier (1550-1617)[32] et sa découverte du Logarithme sans faire appel aux éléments de l'arithmétique mais à "la contemplation d'une *Progression Continue*; Napier la décrira en parlant expressément de *Fluxions*, de *Vitesses* et de *Temps*."[32] Le troisième exemple, plus étonnant, concerne J.-L. Lagrange, qui, toujours selon Hamilton, prônait une démarche "purement algébrique" pour "réduire la Théorie des Fluxions à un système d'opérations sur des symboles, analogue aux opérations symboliques de l'algèbre, et professait le rejet de la notion de temps comme étrangère à un tel système"[33]. Mais, dit Hamilton, si l'algèbre souhaitée par Lagrange est celle d'une "Science des fonctions"[34], c'est là introduire à nouveau une notion de temps qu'on avait cherché à faire disparaître: en effet, "il n'est pas facile de concevoir une idée plus claire ou plus juste d'une fonction dans cette Science, qu'en considérant son essence comme consistant en une *Loi reliant Changement à Changement*". Et alors de conclure: "là où sont le *Changement* et la *Progression*, il y a le TEMPS."

L'ambition déclarée de Hamilton est de mettre le temps sous la forme d'une théorie et de la rapprocher, puis de la faire coïncider, avec l'Algèbre. Cette façon de procéder n'a plus rien à voir avec les "illustrations" temporelles de prédécesseurs ou contemporains; pour lui, de telles illustrations ne peuvent convenir, du moins pas tant que "la *grandeur* au lieu de la PROGRESSION est prise pour être à la base de la doctrine."

À cette mise en valeur du lien privilégié entre "Temps" et "Algèbre", et avant l'exposé de sa propre théorie, il reste encore à Hamilton à expliquer pourquoi une nouvelle théorie est nécessaire alors qu'il en existe déjà une, en plein essor.

La *Science* du "Temps pur"; entre Kant et Hamilton

Dans la philosophie kantienne, la géométrie en tant que "Science" est fondée sur la "pure intuition de l'Espace"[35]. L'Algèbre[36], considérée comme la science du "non-géométrique" (telle que la propose Hamilton), est fondée sur la "pure intuition du Temps". Une telle "pure intuition" ou "forme mentale première"[37] est intimement et directement reliée, voire parfois même coïncide, avec la notion de "progression continue". La "Science du Temps Pur" doit être distinguée "de toute chronologie extérieure réelle, ou collections d'événements enregistrés, de marques et mesures phénoménales", d'une part, et de l'autre, "de toute science dynamique, ou raisonnements et résultats [se rapportant] à la notion de cause et effets".

Non seulement l'Algèbre repose sur l' "Intuition du Temps", mais:

> *Il est complètement impossible de traiter l'Algèbre comme une* Science *(je ne dis pas comme un Art ou une Langue), sans plus ou moins invoquer l'aide de cette Intuition. Le Temps pur - l'avant et l'après; antériorité, postériorité et simultanéité; progression illimitée continue du passé au futur par le présent - cette pensée, ou intuition, ou forme de l'esprit humain, me semble s'imposer à moi toutes les fois que je cherche à* analyser *ce que moi et d'autres nous* désignons *comme objet* raisonné [reasoned upon] *dans la Science Algébrique: bien que j'admette volontiers que le* Temps *ainsi considéré est Pur (exactement comme est Pur l'Espace des géomètres), [...]*[38]

Contrairement à ce qui a souvent été dit et écrit, l'approche de Hamilton n'est pas entièrement redevable, ni même réductible, à l'influence qu'exercera sur lui la *Critique de la raison pure* de Kant: plusieurs de ses manuscrits témoignent que ses idées sur la relation entre temps et l'algèbre sont déjà très avancées, bien avant qu'il ne puisse enfin commencer à lire directement en allemand cet ouvrage à partir du mois d'octobre 1831. Cependant, suite à la perte du livre lors d'un voyage, il ne reprendra sa lecture qu'au cours de l'année 1834. Dans des lettres adressées à ses amis Adare, William Wordsworth et Aubrey De Vere on relève, outre la confirmation de ce qui vient d'être dit, que Hamilton "reconnaît" ses propres idées plus qu'il ne les "découvre" chez Kant, son "Oracle"[39]. Tout en dénonçant chez Kant l'obscurité de plusieurs de ses explications, il voit cependant en lui un bien meilleur mathématicien que ne le fut Coleridge; la *Kritik der reinen Vernunft* lui apportera non seulement la confirmation et le bien-fondé de ses propres idées, mais aussi d'utiles clarifications et, surtout, il trouvera là ce qui lui manquait d'assurance et de courage pour oser enfin braver l'opposition de ses "amis mathématiciens" qui depuis le début cherchèrent à le dissuader de poursuivre dans cette voie!

Enfin, dans une lettre adressée à Francis Edgeworth, il écrit:

Il est remarquable que Kant ait perçu que le Temps, comme l'Espace, doit être le fondement d'une Science a priori*; pourtant il n'a pas réussi à percevoir que l'algèbre peut être précisément regardée comme une telle Science.*[40]

À l'occasion de la rencontre annuelle de la *British Association* dont il fut l'un des organisateurs (la *Splendide Semaine*[41] du 10 au 15 août 1835, à Dublin), Hamilton présentera enfin la version complète de sa théorie; un premier acompte de cette longue maturation de l' "union des mathématiques et de la Métaphysique"[42].

II. "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time."[43]

Les trois textes, *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples* (lue le 4 novembre 1833), *Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time* (lu le 1er juin 1835) et *General Introductory Remarks* rédigées peu après le précédent texte, constituent une remarquable synthèse des précédents efforts de Hamilton. Ils seront réunis dans l'ordre exactement inverse et publiés en 1835. Cette disposition préférée par Hamilton[44], privilégiait non seulement l'ordre que l'on choisirait pour faciliter l'enseignement de la théorie proposée, mais elle éclairait tout en les "justifiant" chaque étape du raisonnement. Cela correspondait à l'idéal scientifique de Hamilton: exposer pas à pas l'édification d'une "théorie des couples" [*Theory of Couples*], dont la "construction" par extension était calquée sur celle d'une "théorie des simples" [*Theory of Singles*], elle-même rigoureusement constituée à partir de principes fondés dans l'intuition du "temps pur".

Pour avoir une idée de cette manière de faire, qui s'oppose à celle qui d'emblée s'en remettrait à des "définitions" imposées sans plus d'explications et qu'il nous faudrait admettre (c'est le cas par exemple avec les "couples algébriques", tels qu'ils seront exposés en 1834), et pour saisir en même temps les limitations de cette construction, on peut simplement relever dans son dernier texte les quelques observations suivantes: Hamilton reconnaît volontiers que ses définitions semblent être les plus naturelles, mais qu'on aurait pu en choisir d'autres et ainsi parvenir à d'autres résultats. Cependant, en général, "les définitions de la science mathématique ne sont pas tout à fait arbitraires, … une certaine discrétion est permise dans leur choix"[45]. Plus loin, dans le chapitre *On the Addition, Subtraction, Multiplication, and Division, of Number-Couples, as combined with each other*, il insiste sur le bien-fondé et la nécessité de *ses* définitions, si l'on veut préserver de la façon la plus simple l'analogie de la théorie des "couples" avec la théorie des "simples". Il ajoute que d'autres définitions, bien que "totalement arbitraires", ne se contrediraient pas l'une l'autre, ni ne contrediraient pas les principes de l'algèbre; qu'il serait possible, à partir de telles prémisses ainsi supposées arbitrairement, de tirer par un raisonnement mathématique rigoureux des conclusions légitimes. Mais, de fait, tout lecteur attentif de son précédent *Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time* doit observer que les définitions proposées par Hamilton ne sont pas *arbitrairement choisies*: d'autres définitions auraient pu être tout aussi légitimement supposées, mais elles n'auraient pas été également appropriées[46].

Ce dernier article, ainsi présenté[47], est beaucoup plus qu'une simple contribution mathématique originale ou paradoxale: il sera reconnu, et le restera à côté de la théorie voisine de Cauchy, comme la première des *justifications* algébriques conséquentes de l'existence des nombres complexes.

Dans l'*Essai*, où l'*instant*[48] est à l'Algèbre ce que le *point* est à la Géométrie, Hamilton poursuit une construction plus ou moins bien réussie du corps des réels.

Insistons encore une fois sur ce besoin qu'il avait de marquer constamment sa différence:

J'avoue ne pas avoir été moi-même capable de former une conception de nombre *distincte [de celle de Peacock, ou de Ohm] sans* une certaine *référence à la pensée de* temps, *bien que cette référence puisse être d'un genre plutôt abstrait et transcendant. Je ne peux m'imaginer en train de* compter *un quelconque ensemble de choses, sans d'abord les* ordonner *et les traiter comme* successives: *pour aussi* arbitraire *et* mentale *(ou* subjective*) que puisse être cette succession supposée. Et en consentant de* commencer *par la notion abstraite (ou intuition pure) de TEMPS, comme* base *de l'exposition de ces axiomes et inférences qui doivent être exprimés par les symboles de l'algèbre, […] il me semble encore qu'un avantage serait gagné: parce que le besoin d'une simple extension symbolique de formules serait au moins ainsi considéré comme* remis à plus tard.[49]

Revenons également sur les conceptions fondamentales qui sous-tendent son travail.

- La notion de temps est liée à l'Algèbre existante[50].
- La notion, ou "Intuition" de temps peut être développée en une *science pure* et *indépendante*:

La notion ou intuition d'ORDRE DANS LE TEMPS n'est pas moins mais plus profondément enracinée dans l'esprit humain que la notion ou intuition d'ORDRE DANS L'ESPACE; […] une science mathématique peut être fondée sur la première, aussi pure et aussi démonstrative que la science fondée sur la seconde.

Il y a quelque chose de mystérieux et de transcendant impliqué dans l'idée de Temps, mais il y a également quelque chose de défini et de clair; et alors que les Métaphysiciens méditent sur l'un, les Mathématiciens peuvent raisonner à partir de l'autre.[51]

- Enfin, cette *Science mathématique du Temps* est "co-extensive" et "identique" à l'*Algèbre*, pour autant que l'Algèbre elle-même est une *Science*. C'est une conclusion que tirait Hamilton de tous ses essais d'*analyser* ce qu'il y avait de "scientifique" en Algèbre (telle qu'il la proposait bien sûr) et de *construire* une Science du Temps Pur. Il s'engagera à revenir dans un prochain article sur ce dernier point trop peu développé qui, bien que mettant un terme ici aux précédentes obscurités dénoncées, ne le satisfait pas complètement; mais il n'en fera rien.

L'*Essai*, une esquisse[52].

Les nouvelles théories auront raison des difficultés des anciennes; il ne s'agira plus de "quantités négatives" et "imaginaires", mais de "contra-positifs" et de "couples". Les principes usuels propres aux quantités imaginaires seront clarifiés. Ainsi, Hamilton pouvait enfin montrer aux détracteurs de J. T. Graves[53] que, loin de s'en tenir simplement à la démonstration de la "nécessité symbolique" des formules utilisées, il était maintenant possible de les "interpréter" et de révéler leur "sens caché" (*hidden meaning*): des expressions qui selon l'avis général étaient simplement symboliques, et tout à fait incapable d'interprétation, pouvaient en passant dans le monde des idées acquérir réalité et signification, si l'Algèbre était vue comme la Science du Temps Pur. La nouvelle algèbre proposait à la doctrine des quantités imaginaires et négatives une "illustration", ou "élucidation", plus complète que le seul jeu d'opérations algébriques et les propriétés d'une langue symbolique.

1. Hamilton débute son *Essai* par la considération de la pensée d'un *instant* quelconque, une prise en compte naturellement à la portée de tous les esprits ainsi que le supposait et l'imposait son approche. On peut ensuite reproduire à volonté cette pensée, ou concevoir celle d'un instant *différent*. Les instants sont désignés par les lettres capitales de notre alphabet, $A, B, C, \ldots$; elles sont les *dates*, ou les réponses à la question "*Quand?*". Deux dates quelconques, A et B, peuvent être *équivalentes* ou *non-équivalentes* (selon que les instants correspondants sont *identiques* ou *différents*). Hamilton représente respectivement ces deux relations par les expressions symboliques (ou *équations*):

$B = A$ (l'*identité*) et $B \neq A$ (la *diversité*).

Dans le dernier cas, la relation se divise en deux autres:

$B > A$ (*postériorité*) et $B < A$ (*antériorité*),

suivant que l'instant B est *plus tard* ou *plus tôt* que l'instant A. Ces relations entre instants sont interprétées sans le secours d'une référence première à la *quantité*; elles ne sont pas les résultats de comparaisons entre durées. Ainsi, dans la relation $B = A$, c'est l'idée de *simultanéité* ou *synchronisme* qui est avancée: cette relation symbolique représente la pensée du *présent* et de toutes les réponses à la question "*Quand?*", elle est celle qui correspond à *Maintenant*; quant aux relations $B > A$ et $B < A$, elles répondent respectivement aux pensées de *futur* et de *passé*, sans que soit encore introduite l'idée de mesure (i.e., de savoir *combien plus tôt* ou *combien plus tard* un instant l'est de l'autre).

Hamilton déclare "évidentes" les propositions suivantes: si $B = A$, alors $A = B$; si $B \neq A$, alors $A \neq B$; si $B > A$, alors $A < B$; si $B < A$, alors $A > B$.

2. Suivent la *comparaison de paires d'instants* et la première signification de la marque –. Soient deux autres *dates*, C et D: elles peuvent et doivent, dit-il, désigner une *même* paire d'instants représentée par la première paire de dates, A et B, ou une paire *différente*, pour autant que les deux conditions $C = A$ et $D = B$ sont ou non satisfaites ensemble. Mais, même si les *paires* sont *différentes*, les *relations* entre les instants peuvent être les mêmes: les instants C et D, bien que ne coïncidant pas respectivement avec les instants A et B, peuvent encore être reliés entre eux exactement comme le sont ces instants; D est à C, comme B est à A. Hamilton parle alors d'*analogie* (entre paires coïncidentes ou différentes), exprimée par les équations $D - C = B – A$ ou $A = D - C$; la marque $=$ utilisée précédemment pour représenter une *identité entre instants*, désigne maintenant une *identité entre relations*. Les conditions de cette *exacte* identité entre la relation de l'instant D à C et celle de B à A est exprimée par Hamilton de la façon suivante: si l'instant B est identique à A alors D doit être identique à C; si B est *plus tard* (ou *plus tôt*) que A, alors D doit être *plus tard* (ou *plus tôt*) que C et "exactement autant plus tard" (ou plus tôt)[54]. Hamilton admet comme "évident" le fait que "quels que soient les instants A, B, C, il existe toujours un instant lié D, et un seul, qui se rapporte donc à C, *exactement* comme B se rapporte à A."[55]

Une analogie entre deux paires d'instants, AB et CD, admet une "inversion" (si $D - C = B - A$ alors $C - D = A - B$) et une "alternance" (si $D - C = B - A$ alors $D - B = C - A$); "inversions" et "alternances" pouvant ensuite se *combiner*. Plus généralement, écrit Hamilton, "on peut exécuter un nombre de *transformations* et de *combinaisons* comme les précédentes, pouvant dans un tel contexte admettre toutes une *interprétation* et une *justification*, mais qui s'*accordaient* à tous égards aux *règles* générales de l'algèbre."[56]

À la *non-équivalence* des instants correspond une *non-analogie* des paires d'instants (par exemple dans le cas où une analogie $D - C = B - A$ ne peut avoir lieu; D étant *trop tard* ou *trop tôt* relativement à C, que B de A). Le signe "$\neq$" est repris pour représenter cette non-analogie. Une *non-analogie*, ici $D - C \neq B - A$, se subdivise en deux autres relations: l'une d'*antériorité* ($D - C > B - A$); l'autre de *postériorité* ($D - C < B - A$). À leur tour, ces expressions peuvent être l'objet d'"alternances" et d' "inversions". Dans une analogie ou une non-analogie entre deux paires d'instants, $A\,B$ et $C\,D$, A et B sont appelés les *extrêmes*, B et C les *moyens*; A et C sont les *antécédents*, B et D les *conséquents*. Enfin, deux analogies, ou non-analogies, peuvent être combinées entre elles.

3. Une nouvelle étape essentielle est franchie lorsque Hamilton introduit les "analogies continuées", ou "séries équidistantes d'instants". D'après ce qui précède, il est clair que dans une analogie comme $B' - A' = B - A$, les deux conséquents ne peuvent coïncider sans que les antécédents coïncident aussi, et réciproquement. Par conséquent, la seule façon que deux des quatre instants $ABA'B'$ d'une analogie coïncident, sans que les deux autres ne coïncident aussi, c'est-à-dire, précise-t-il, la seule façon de construire une analogie avec trois instants distincts, est soit que les extrêmes coïncident, soit que les moyens coïncident (deux cas qui se réduisent à un seul par inversion). Hamilton retient $B' - B = B - A$ comme "type suffisant" d'analogie pouvant être construite avec trois instants distincts: une extrémité B' est reliée à un instant moyen B, comme l'est cet instant moyen B à un autre instant extrême A; ces trois instants composent une *analogie continuée* [*continued analogy*]. Il est manifeste, écrit Hamilton, que ces trois instants composent aussi une *suite équidistante*: "B' étant exactement aussi tard ou aussi tôt de B, que B l'est de A".[57] Dans ce cas, il est "évident" que l'instant B est exactement intermédiaire entre les deux autres instants A et B', et peut être appelé l'*instant milieu* de l'intervalle de temps entre eux (Hamilton parle de *bissecteur*). Hamilton admet sans plus d'explication les résultats suivants:

Quels que soient deux instants distincts A *et* B', *il existe toujours un et un seul instant bissecteur* B; *et, ainsi, … une analogie continuée entre trois instants peut toujours être construite d'une manière et d'une seule, en insérant un [instant] moyen, quand sont donnés les extrêmes. Et, il est plus évident encore, d'après ce qui a été vu avant, que l'instant milieu* B *avec l'un ou l'autre des extrêmes détermine l'autre extrême, de sorte qu'il soit toujours possible de compléter l'analogie d'une manière et d'une seule, quand sont donnés un extrême et le milieu.*[58]

Il observe également que l'on peut, à partir d'une analogie continuée $B' - B = B - A$, avoir une analogie continuée entre B, B' et un quatrième instant B''; dans ce cas, les quatre instants A, B, B' et B'' peuvent aussi être eux-mêmes considérés comme formant une autre analogie continuée, et une suite équidistante, dont les relations sont

$\mathrm{B}'' - \mathrm{B}' = \mathrm{B}' - \mathrm{B} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$.

Finalement, Hamilton parvient à concevoir une suite illimitée d'instants,

$\ldots \mathrm{E}''\mathrm{E}'\mathrm{E}\mathrm{A}\mathrm{B}\mathrm{B}'\mathrm{B}'''\mathrm{B}^{\mathrm{IV}}\mathrm{B}^{\mathrm{V}} \ldots,$

construite pour satisfaire les conditions,

$\ldots \mathrm{B}^{\mathrm{V}} - \mathrm{B}^{\mathrm{IV}} = \mathrm{B}^{\mathrm{IV}} - \mathrm{B}''' = \mathrm{B}''' - \mathrm{B}'' = \mathrm{B}'' - \mathrm{B}'$

$= \mathrm{B}' - \mathrm{B} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = \mathrm{A} - \mathrm{E} = \mathrm{E} - \mathrm{E}' = \mathrm{E}' - \mathrm{E}'' \ldots$

En construisant ainsi et en continuant une suite équidistante, dont deux instants quelconques sont donnés, on peut arriver à d'autres moments, aussi éloignés de ces deux instants, et aussi près de chacun d'eux, que l'on veut.[59]

Concernant l'identification, ou la distinction, d'un instant cherché à un instant connu, il écrit:

Même dans les cas où nous n'avons pas encore réussi à découvrir une preuve rigoureuse..., la conception des analogies continuées offre toujours une méthode de recherche, et de nomenclature, pour étudier et exprimer, ou au moins, concevoir comme étudiée et exprimée, avec un quelconque degré proposé d'approximation, sinon avec une parfaite exactitude, la situation du pas cherché dans la progression générale du temps, par sa relation à une série équidistante connue de pas suffisamment proche.[60]

Il achève ce chapitre par quelques observations sur des notions qui ont naturellement leur place dans un traité complet sur la *Science du Temps Pur*, mais qui ne seront pas développées dans son plus modeste *Essai*: ainsi, il suppose déjà connus et familiers ces "noms parlés et écrits des nombres entiers ordinaux et cardinaux" et les lois élémentaires de leurs combinaisons;

il est encore plus admissible du point de vue de la méthode de supposer cette connaissance précédente des propriétés principales des nombres entiers, comme exposée dans l'arithmétique élémentaire; parce que ces propriétés, bien qu'appartenant à la Science du Temps Pur, comme impliquant la conception la succession, peuvent toutes être déduites du déploiement de cette seule conception de succession … *sans exiger une quelconque notion d'*intervalles mesurables, *égaux ou inégaux, entre les pas successifs de temps …[U]ne partie si simple et si familière peut être supposée avoir été précédemment et séparément étudiée, dans une certaine mesure, par celui qui s'engage dans l'Algèbre.*[61]

4. Les cinq chapitres suivants, consacrés aux *pas* (*steps*), dans la *progression du temps*, seront également l'occasion pour Hamilton de revenir à plusieurs reprises sur les notions déjà abordées, de les compléter, de leur donner d'autres significations ou interprétations, mais aussi de les clarifier et d'en simplifier les expressions symboliques.

Cette conception d'*analogie continuée*, ou de *suite équidistante d'instants*, renferme et dépend de la conception de la "transmission répétée" d'une relation ordinale commune, ou l'application *continuée* (*continued*) d'un "pas mental commun, par lequel on peut passer, en pensée, d'un instant quelconque d'une telle suite à l'instant immédiatement suivant."(p. 17) Cette conception justifie selon Hamilton le premier de ces chapitres dans lequel il introduit les *pas*, puis aborde leur *application* aux instants pour en *engendrer* d'autres; enfin, il considère la combinaison de ces *pas* avec d'autres, quelconques, (par *composition* ou *décomposition*).

Ce n'est que parvenu à ce chapitre que Hamilton "rappellera" enfin explicitement la signification attendue de la marque "–" présente dans les expressions de la forme $B - A$ (où A et B sont deux instants quelconques): cette "différence" entre les deux instants A et B est la "*relation ordinale* de l'instant A à l'instant B."[62]

La notion fondamentale de "*pas* dans la progression du temps"[63] va permettre l'introduction d'une nouvelle définition symbolique[64] où intervient cette fois la marque "+"; soit: $B = (B - A) + A$; ou, posant $B - A = \mathrm{a}$, $B = \mathrm{a} + A$. Cette écriture symbolique correspond à la conception d'un certain "*acte mental* ou *acte de transition*", déterminé en direction et en degré par la relation ordinale $B - A$ (ou a), appelé le *pas* $B - A$ (ou *pas a*). Elle représente un instant B qui peut être "atteint" ou "mentalement *engendré*" (le *résultat*) à partir de l'instant A (l'*objet*) et du pas a (l'*acte*).

Ce jeu, "objet-acte-résultat", ramassé en la simple expression "$\mathrm{B} = \mathrm{a} + \mathrm{A}$", peut être à son tour être pris comme l'objet qui, soumis à un nouvel acte b, conduit à un instant C; et ainsi de suite[65]: si $B - A = \mathrm{a}$ et $C - B = \mathrm{b}$, alors $C = \mathrm{b} + (\mathrm{a} + A)$; …

Il est évident, que le changement total *ou* pas total, *effectif ou nul, du premier instant* A *au dernier instant* C, *dans cette transition successive de* A *à* B *et de* B *à* C, *peut être considéré comme* composé *des deux pas successifs ou* partiels *a et b, à savoir le pas a de* A *à* B *et le pas b de* B *à* C; *et que la relation ordinale finale de C à A peut de même être* *considérée comme composée des deux … relations ordinales* intermédiaires *b et a, à savoir la relation b de* C *à* B *et la relation a de* B *à* A*; une composition de pas ou de relations qui peut apportunément être désignée par l'interposition, comme marque de combinaison entre les signes des pas composants ou des relations ordinales composantes, de la même marque +, […]66*

Hamilton établira plusieurs relations pour ses *pas*; certaines sont fondamentales: à ce stade de l'*Essai*, on peut observer que la *combinaison* des *pas* dans la progression du temps (par *composition* et *décomposition*) vérifie les axiomes d'une structure de "groupe commutatif" et ceux d'une relation d'équivalence, à une réserve près cependant, outre celles que Hamilton ne parle pas nommément de la plupart de ces axiomes ou "règles" et ne fait pas une allusion expresse au concept fondamental de "loi de composition" (bien qu'il précise cependant que la composition quelconque de *pas* est un *pas*) dans l' "ensemble"[67] des *pas*.

Dans le chapitre suivant, Hamilton en vient aux *multiples* d'une base donnée (*unit-step*); puis il développe l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication* et la *Division algébriques* des "Nombres Entiers" qui les déterminent (dits *determining or multipling Whole Numbers*) Ici, la théorie générale de *pas* successifs et composés à partir d'un instant à tous les autres (ou de relations ordinales composées, et composantes, entre les instants d'un ensemble quelconque), est appliquée à la suite d'instants équidistants abordée précédemment.

Hamilton aborde ce qu'il entend par *sous-multiples* et *fractions* d'un pas quelconque dans la "progression du temps", puis il explicite les opérations "algébriques" d'addition, de soustraction, de multiplication et de division de "nombres fractionnels" et "réciproques", positifs et contra-positifs. La relation d'un produit algébrique à son multiplicande est généralement appelée *rapport*, ou *rapport algébrique*. Mais, dans chaque cas particulier,

le nombre *qui spécifie l'*acte *de multiplication sert par conséquent aussi à spécifier le* rapport *résultant, et tout nombre peut être vu soit comme la* marque de rapport, *soit comme une* marque d'une multiplication, *suivant que nous nous concevions en train d'*examiner analytiquement *un produit déjà formé, ou d'*engendrer synthétiquement *ce produit.*[68]

La comparaison de deux pas quelconques (non nuls) imposera l'introduction d'une conception plus générale du *rapport algébrique* que la précédente, et l'engendrement par la *multiplication* d'un tel pas quelconque à partir d'un autre; enfin, fidèle à sa façon de procéder jusqu'à présent, il explicite les opérations d'addition, soustraction, multiplication et division dans le cas de *nombres algébriques généraux*, ainsi considérés comme *rapports* ou comme *multiplicateurs de pas*.

En 1853, Hamilton résumera cette situation plus générale en quelques lignes:

Les quatres "opérations *premières*", pour combiner entre eux les *rapports*, *nombres* ou facteurs quelconques, a et b, sont définies à partir d'opérations effectivement "choisies" parmi les formules usuelles de l'algèbre, mais elles sont utilisées avec de "nouvelles interprétations":

$$(b + a) \times a = (b \times a) + (a \times a),\ (b - a) \times a = (b \times a) - (a \times a),$$

$$(b \times a) \times a = b \times (a \times a),\ (b \div a) = (b \times a) \div (a \times a), \qquad (12)$$

Les opérations sur les *nombres algébriques* (positifs ou contra-positifs) sont rendues dépendantes ("par la pensée") des opérations de mêmes noms sur les *pas*; opérations encore conçues comme renfermant, en dernière analyse, une référence à la comparaison des *instants* (ainsi que le montrent, par exemples, les formules (7) à (9)). Ces conceptions conduisent à des résultats "en accord avec ceux usuellement reçus en algèbre"[69].

5. Hamilton n'ajoute rien de plus dans sa préface de 1853 à propos des chapitres restants de son *Essai*, ceux qui seront les plus particulièrement étudiés par de nombreux auteurs jusqu'à nos jours[70]. Ils concernent l'insertion d'une

moyenne proportionnelle entre deux pas, les racines carrées de *rapports* ("impossibles", "ambigus" et "incommensurables"), une "preuve plus formelle de l'existence générale d'une racine carrée positive déterminée, commensurable ou incommensurable, pour tout rapport positif déterminé" (p. 60-67), les "analogies continuées", ou suites de *pas* proportionnels, les puissances, les racines et les logarithmes de *rapports* (p. 67-84).

L'étude de ces chapitres est particulièrement passionnante et enrichissante. Outre les difficultés de démonstrations, les inexactitudes et les "erreurs" difficiles à percevoir à l'époque, plusieurs questions instructives permettraient de mieux mesurer l'importance de la contribution de Hamilton dans l'arithmétisation de l'analyse[71]: comment il est parvenu à partir de l'idée d'ordre rattachée aux nombres rationnels et de l'hypothèse de la continuité du temps ("ordre en progression", "progression continue", etc.) à une construction de la théorie des irrationnels; comment il montre que tous les nombres ne sont pas rationnels, qu'il en est qui ne sont pas la racine carrée d'un nombre rationnel ("incommensurables"[72]); comment, sous ses précédentes hypothèses, il conclut que tout rapport positif doit avoir une racine carrée et que celle-ci peut toujours être "approchée par des fractions"[73] aussi près qu'on le désire; savoir s'il est pertinent ou non de comparer l'approche de Hamilton à celle de Dedekind et d'évoquer l'idée de "coupures" dans cette première conception des réels. Cependant, bien que cette étude détaillée demeure toujours aujourd'hui une nécessité et une priorité, tous ces développements et interrogations ne constituent pas l'objet du présent travail.

C'est donc dire que la présente esquisse ne rend pas justice au remarquable *Essai* de Hamilton, loin s'en faut; la seule ambition manifestée ici a été d'en relever quelques aspects caractéristiques, de voir au cours de ce survol la marche d'un style fécond.

La fin des premiers *imaginaires*

Le développement de la théorie des *couples* est exactement calqué sur celui de la théorie des *simples*; c'est sans aucun doute là le progrès le plus décisif accompli par Hamilton: en dépit du fait que cela sera un autre événement révolutionnaire pour le développement des mathématiques futures, la découverte des quaternions ne fait figure que de second rôle dans cette approche constructive. Une fois conçue l'idée d'un *instant* A_1, qu'il appelle *instant primaire*, on peut en imaginer un autre, A_2, appelé *instant secondaire* sans chercher dans l'immédiat à savoir s'il suit, précède ou coïncide avec A_1. On conçoit ces deux instants comme formant un couple désigné par $(A_1\text{-}A_2)$ (A_1, A_2) (nommé *couple-instant*); un choix de notation qui symbolise l' "indifférence relationnelle" actuelle de ces instants. Il ne reste plus alors qu'à reprendre pour ces couples la marche suivie par les *simples*. Bien sûr, il est des difficultés plus spécifiques, non rencontrées précédemment. Ainsi, par exemple, une notable difficulté de cette théorie des couples est constituée par la multiplication et la division générales d'un *couple-pas* par un *couple-nombre* (a_1,a_2); ce qui précèdait ne pouvait suffire à la réduire. Pour avoir raison d'elle, Hamilton devra en appeller à des critères, pour nous contestables, de *simplicité* et d'*esthétique*; cependant, notons que le *résultat* bien connu auquel il parvient, n'est pas la *définition* dont nous parlons aujourd'hui (un choix pédagogique plus malheureux):

$$(a_1, a_2)(a_1, a_2) = (a_1 a_1 - a_2 a_2, a_2 a_1 + a_1 a_2).$$

Pour les *couples-nombres*, on a en général les définitions suivantes:

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2)\,;$$
$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)\,;$$
$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + a_2 b_1)\,;$$
$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left(\frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right).$$

Après avoir considéré les puissances d'un *couple-nombre* (par un nombre entier, un *nombre simple*, et enfin par un *couple-nombre* quelconque), Hamilton en viendra enfin à l'identification attendue $\sqrt{-1} = (0,1)$:

Dans la THÉORIE DES NOMBRES SIMPLES, le symbole $\sqrt{-1}$ *est* absurde, *et représente une EXTRACTION IMPOSSIBLE, ou simplement un NOMBRE IMAGINAIRE, mais dans la THÉORIE DES COUPLES, le même symbole est* significatif, *et il représente une EXTRACTION POSSIBLE, ou un COUPLE RÉEL, à savoir […] la* racine carrée principale *du couple (0,1).*[74]

On peut, dès lors, fort de cette *justification algébrique* de l'existence de , retourner aux expressions plus familières de l'époque, encore usitées de nos jours, en observant que l'équivalence fondamentale suivante est parfaitement légitim:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a(1, 0) + b\sqrt{(-1, 0)} = a + b\sqrt{-1}.$$

III. Au delà de l'*Essai*, des *triplets* aux *quaternions*.

Le passage aux triplets, une fois conçue une théorie des *couples* algébriques qui généralise les nombres *simples*, est pour Hamilton et ses contemporains une extension naturelle. Pour Hamilton, il était évident que, sans abandonner sa conception de l'algèbre comme science du temps pur, rien ne l'obligeait à en rester aux couples; de plus, les triplets se révélaient être l'expression s'accordant le mieux avec son goût marqué pour tout arrangement triadique, tant en mathématiques qu'en philosophie[75].

On le sait, Hamilton ne pouvait parvenir à élaborer une R - algèbre de triplets, un résultat qui selon lui aurait suffi à légitimer sa "métaphysique" de l'algèbre.

Il développe sa théorie des triplets en la calquant exactement sur celle des couples algébriques: il introduit donc successivement les notions de relation ordinale entre triplets d'*instants*,

$$(B_1, B_2, B_3) - (A_1, A_2, A_3),$$

de relation entre triplets de *pas*,

$$(B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3) = (a_1, a_2, a_3),$$

et, enfin, celle de triplets de *nombres* définis comme rapports de triplets de *pas*,

$$(b_1, b_2, b_3) \div (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3).$$

À l'instar des couples algébriques, le problème principal est celui de la détermination du produit de deux triplets de nombres quelconques sous la forme d'un troisième triplet de nombres; soit:

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (x, y, z).$$

où x, y, z sont des polynômes linéaires en a_1, a_2, a_3 et en b_1, b_2, b_3 qui, de plus, doivent impérativement vérifier la "loi des modules":

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;$$

soit encore, pour simplifier l'écriture, vérifier l'égalité:

$$\text{(I)}\quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = x^2 + y^2 + z^2\ .$$

Il cherchera longtemps à vérifier cette identité. Après avoir essayé sans succès plusieurs systèmes de triplets et s'être convaincu que tous présentaient des difficultés incontournables, il se tournera du côté de la géométrie.

Le recours à la géométrie n'apportera pas bien sûr de solution au problème et ne fera pas disparaître toutes les complications. Cependant, en géométrisant ainsi ses recherches algébriques, Hamilton rompait avec ses premières idées sur le partage des mathématiques entre "Algèbre" et «Géométrie». Il prenait ses distances avec ses anciennes conceptions de l' "algèbre" comme «La Science du Temps Pur» et remettait en question le rapport ainsi établi entre Temps et Espace.

L'association *calcul* et *géométrie*, essentielle pour lui, devait permettre de découvrir une extension à l'espace usuel de la méthode de «construction», ou de "représentation", que Warren avait utilisé avec succès dans le plan; une méthode qui, toujours selon lui, avait donné une espèce d'*interprétation géométrique* au symbole imaginaire classique de l'algèbre. Les unités i, j, du triplet $a+bi+cj$, désignèrent des rotations de 90° autour de certains des axes qui repèrent l'espace; cette dernière conception était proche de celle proposée par Wessel.

À partir du produit de deux triplets, on parvenait à la relation

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 + (bz - cy)^2,$$

où apparaissaient dans le second membre quatre carrés au lieu des trois souhaités. Les influences conjuguées de cette égalité, de l'apport géométrique évoqué et des échecs répétés mettront enfin Hamilton sur la voie consacrée[76]: les quatre carrés suggéraient l'idée d'un «quadruplet» en lieu et place d'un «triplet»; la géométrie assurait cette hypothèse en donnant un sens à la nouvelle unité k proposée pour le produit ij et telle que $k^2 = -1$.

Le système des quaternions satisfait à toutes les propriétés vérifiées par les *nombres*, à l'exception de la *commutativité* de la multiplication où, pour deux quaternions quelconques Q et Q', on a en général: $Q\,Q' \neq Q'\,Q$; la structure est donc celle d'un corps non commutatif. Un quaternion quelconque Q est représenté par Hamilton au moyen de $\omega+ix+jy+kz$, où les symboles, les *unités imaginaires*, i, j, k forment le «système de trois quantités imaginaires distinctes» suivant:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ \ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

Un autre mode de présentation aura un succès plus durable et suscitera la création de nouvelles voies mathématiques, mais sa première conséquence sera aussi celle de réduire l'importance du quaternion en le privant de ce rôle essentiel qu'aurait voulu lui voir jouer Hamilton et ses émules: dès 1843, Hamilton présentait un quaternion quelconque $Q = v \;= ix + jy + kz$ comme une combinaison "scalaire plus vecteur" (un premier usage isolé du mot "vecteur" avec son sens moderne):

$$Q = v \; + r \; = SQ + VQ,$$

«où le scalaire v , ou $\mathbf{SQ}$, est un *nombre* positif or négatif, alors que le vecteur r , ou $\mathbf{VQ}$,, est d'habitude construit par moi comme une *ligne droite dirigée* dans un espace tridimensionnel …» [77]

Hamilton attendait beaucoup des quaternions; ils furent proposés comme une alternative à la méthode cartésienne défaillante; ils devaient non seulement «libérer» l'objet de l'«artifice» extérieur que constituaient les axes de coordonnées, mais ce faisant ouvrir la voie à de nombreux progrès en physique. Cependant, leur découverte surprendra tous ceux occupés à rechercher un calcul de triplets; les réactions de J. Graves ou de A. De Morgan sont révélatrices: le premier, tout en s'interrogeant sur la liberté que l'on a de "créer arbitrairement des imaginaires" et de les doter de "propriétés surnaturelles"[78], déclare que "Hamilton *fait* ses quantités imaginaires"; pour le second, les "imaginaires" constitutifs d'un quaternion "ne sont pas des déductions, mais des inventions: *leurs lois d'action l'un sur l'autre sont assignées …*"[79].

C'est dans le non-respect du principe de permanence des formes et dans l'idée que le mathématicien peut créer à volonté ses propres règles symboliques que la découverte des quaternions revêt tout son caractère révolutionnaire.

IV. Pour conclure

La rupture avec sa métaphysique de l'algèbre était consommée, du moins exigeait-elle de sérieux aménagements à la suite de la découverte des quaternions: l'objet créé n'était pas du seul ressort du "temps pur", n'était pas une entité "purement arithmétique", pas un "nombre" dans le seul sens que lui avait réservé Hamilton.

L'impuissance de Hamilton à trouver une "signification géométrique" pertinente l'obligera à insister sur le caractère "symbolique" du quaternion, à voir en lui un "opérateur" (sa découverte des biquaternions en 1844 avait déjà une première fois favorisé cette tendance symbolique qui s'affirmait). C'est aussi une partielle capitulation qui s'opérait ainsi: après avoir longtemps et publiquement insisté sur la différence de son approche en algèbre, fait valoir son appartenance à l' "École théorique", il devra admettre que sa "Science du Temps Pur" ne sera plus tant "co-extensive" et "identique" à l'Algèbre que plus modeste *Suggesting Science*, voire une *Suggestive Science*. Hamilton se rapprochera du point de vue plus exclusivement symbolique de ses opposants.

Mais, contrairement à ce que l'on aurait pu croire, et que beaucoup ont cru, la curieuse progéniture née "d'un quaternion de parents, la géométrie, l'algèbre, la métaphysique, et la poésie", ne règle pas définitivement le sort de cette approche algébrique qui prétendait *unir* métaphysique et mathématiques; Hamilton n'est pas disposé à délaisser cette voie à laquelle il doit ses couples et ses quaternions. Déjà, en 1841, il admettait volontiers les maladresses et lourdeurs de style de son *Essai*, voire l'excès d'obscurité. Mais, malgré les difficultés rencontrées dans sa recherche des triplets, il maintiendra que l'*Algèbre*, comme *Science*, peut se suffire et se suffit de la "progression continue" pour son fondement; que l'élément essentiel de cette conception est bien le *temps pur*[80]. Plus tard, en 1846, il écrira ressentir "une sympathie accrue" pour l'*École Philologique* et mieux la comprendre[81]; mais, il continuera d'affirmer que l'*ordre* et la *progression* sont toujours pour lui les objets que l'on "contemple dans l'algèbre scientifique" quand, par-delà les *signes*, on considère les "choses signifiées".

Ma propre orientation pour étendre la théorie des imaginaires semble être totalement différente de la ligne suivie par de profonds écrivains du Cambridge Journal*, et nécessitera un examen plus approfondi pour décider si les opinions peuvent être réconciliées. Dans l'ensemble, ma tendance est de ne pas me satisfaire des seuls signes, et de toujours m'occuper des choses signifiées.*[82]

Hamilton ne renonçait toujours pas à sa différence, mais il s'était déjà très éloigné de son premier "point de vue". Même si en 1853 il croit encore possible de pouvoir montrer que ses anciennes conceptions, modifiées, ne sont pas "fondamentalement et irréconciliablement opposées" à celles de Peacock et Ohm, il ne conçoit plus l'algèbre comme "La" *Science du Temps Pur*. Il sait, outre les difficultés directement liées à cette référence au temps, qu'une telle exigence d'unicité condamnait bien des "calculs", "algèbres" ou "systèmes hypercomplexes" déjà existants. Elle devrait notamment imposer le rejet des "octonions" ou "Octaves" de J. T. Graves (dits aussi "nombres de Cayley"), "construits" moins de deux mois après la création des quaternions: ils ne pouvaient figurer dans son Algèbre car ils ne vérifiaient pas la propriété d' "associativité" inhérente à cette approche[83]. Il en viendra à accepter, au pire, que la "science du Temps pur" ne soit plus qu'une "illustration" et non le "vrai sol" de l'algèbre, au mieux, qu'elle soit une "utile *préparation*" pour l'étudiant qui voudrait entendre ses "spéculations géométriques" plus tardives, celles issues de sa *géométrie symbolique* et de sa "géométrisation" des quaternions, ou "nouvelle géométrie algébrique"[84].

Je revendique parfois vouloir être considéré non en tant qu'innovateur des*tructif, mais comme innovateur* cons*tructif [...]* [85]

V. Références

Argand, J.-R.

1814 "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques" (1086), *Annales de Mathématiques*, IV, 1813-1814, pp. 133-147 (Rééd. avec préface de J. Houël et introduction de J. Itard; A. Blanchard, Paris, 1971).

1815 "Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse", *Annales de Mathématiques*, V, 1814-1815, pp. 197-209.

Bekemeier, B.

1985 "Pädagogisch motivierte Überlegungen einer Neubegründung der Mathematik im frühen 19. Jahrhundert - Martin Ohms, Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik´ von 1822."*Mathematikgeschichte - Bildungsgeschichte - Wissenschafts-geschichte*. Hrsg. von H.G.Steiner und H. Winter (Untersuchungen zum Mathematikunterricht, hrsg. vom IDM, Bd.12) Köln 1985

1987 *Martin Ohm (1792–1872): Universitäts- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform*, Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen, *Studien zur Wissenschafts, Sozial-und Bildungsgeschichte der Mathematik*, 4, 1987.

Bell, E. T.

1950 *Les grands mathématiciens*. Paris, Ed. Payot, *Bibliothèque scientifique* (1939); rééd.1950.

Cantor, G.

1932 *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, ([1887-1888] *4. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* (p. 378-439]) E. Zermelo éd., Berlin, Springer; rééd., Hildesheim, G. Olms, 1966).

Cartan, É.

1908 *Nombres complexes*. *Exposé d'après l'article allemand de E. Study*, "Encyclopédie des sciences mathématiques", I. 5 (1908), Paris, pp. 329-468.

1952 *Œuvres complètes*, 6 vol., Gauthiers-Villars, Paris, 1952 (Rééd. Éditions du CNRS, 1984).

Cauchy, A.-L.

1821 *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique: Analyse algébrique*. Deburs, Paris, 1821.

Cayley, A.

1898 *Collected Mathematical Papers*, 13 vol., New-York: Cambridge Univ. Press, 1889-98.

1883 "Presidential Address to the British Association" (September 1883), *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1883, 3-37 (Voir aussi, [Cayley, 1898, art. 784, p. 429-459] et "Discours devant les membres de l'Association Britannique", (trad. M. Raffy); *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e sér. t. VIII, (1884); 30-48 et 54-80.)

1897 *The Collected Mathematical Papers*, 13 vol., Cambridge University Press, New York, 1889-1898; en particulier, voir le vol. XII, 1897, *On multiple algebra*, pp. 459-489.

Clock, D.

1964 *A New Concept of Algebra: 1825-1850*, Ph. D. dissertation. Univ. Wisconsin, 1964.

Coleridge, S. T.

1901 *Aids to Reflection, and the Confessions of an Inquiring Spirit*. London: George Bell & Sons, 1901.

Dedekind, R.

1978 *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* Paris, Ornicar, 1978.

De Morgan, A.

1841a On the foundation of Algebra, n° 1, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,* VII, part. II: 173-188.

1841b On the foundation of Algebra, n° 2, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,* II, part. III: 267-300.

1844 On the foundation of Algebra, n° 3, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,* VIII, part. I: 139-143.

1847a On the foundation of Algebra, n° 4, On the triple Algebra, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,* VIII, part. III: 241-254.

1847b *Formal Logic*. London, 1847.

1849 *Trigonometry and double Algebra*. London.

Dieudonné, J. (s.d.)

1978 *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, 2 vol., Paris: Hermann.

Durand-Richard, M.-J.

1992 "Charles Babbage (1791-1871): de l'Ecole algébrique anglaise à la 'machine analytique'", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 1992, 30e année, n° 118, 5-31.

1996 "L'Ecole Algébrique Anglaise: les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance", *L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités* (Éds. C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter). Paris, Editions de la Maison des sciences de l'homme.

1999 *Le réseau des algébristes anglais et la symbolisation de l'opératoire* (1812-54)

Flament, D.

2003 *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*. Paris: CNRS-Éditions.

Français, J. F.

1814 "Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires", *Annales de Mathématiques* (Gergonne), IV (1813-1814): 61-71 (voir aussi [Argand, 1971; 63-74]).

Frend, W.

1796 *The Principles of Algebra*. London, 1796 (Cambridge 1803)

1799 *The true Theory of Equations established on Mathematical demonstration*. London, 1799.

Gauss, C. F.

1832 "Theoria residuorum biquadraticorum, Commentation secunda", Societati Regiae Tradita, 15 avril 1831, *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiones,* vol. VII, Gottingae, MDCCCXXXII (1832)] ([Gauss, *Werke*, II, 169-178]).

Graves, R. P.

1879 "Sir W. Rowan Hamilton on the Elementary Conceptions of Mathematics", *Hermathena* (Dublin) 3, 1879, 469-489.

1975 *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vol., Dublin University Press, Hodges, Figgis, 1882-1889. Reprint Edition by Arno Press, 3 vol., New York, 1975.

Gregory, D. F.

1838 "On the real nature of Symbolical Algebra"(lu le 7 mai 1838), *Edinburgh Philosophical Transactions*, vol XIV, Part 1.

Hamilton, W. R.

1835 "On Conjugate Functions, or Algebraic Couples, as tending to illustrate generally the Doctrine of Imaginary Quantities, and as confirming the Results of Mr Graves respecting the Existence of Two independent Integers in the complete expression of an Imaginary Logarithm" *Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Edinburgh in 1834* (John Murray, London, 1835), pp. 519-523.

1837 "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time" (1835), *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 17, 1837, pp. 293-422.

1844 "On a new species of Imaginary quantities connected with the theory of quaternions" (1843), *Proc. Roy. Irish Acad.*, II, 1844, pp. 424-434.

1847 "On quaternions, or a new system of imaginaries in algebra; with some geometrical illustrations" (Communicated 11 November 1844), *Proc. Roy. Irish Acad*., III, 1847, pp. 1-16.

1848 "Researches Respecting Quaternions. First Series", *Trans. R. Irish Acad.*, 21, 1848, pp. 199-296.

1849 "On Symbolical Geometry", *Cambridge and Dublin Mathematical Journal,* 1846-1849.

1853 *Lectures on Quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method*. Dublin, Hodges and Smith, 1853.

1866 *Elements of Quaternions*, London.

1879 "On the Elementary Conceptions of Mathematics". (Seven Letters to Viscount Adare (March and April, 1835): *Hermathena*, Vol. 6., pp. 469-489. Dublin, 1879.

1967 *The Mathematical Papers* (of), Cambridge, at the University Press, 3 vol., 1931-1967; vol. III, by H. Holberstam and R. E. Ingram, 1967.

Hankel, H.

1867a *Theorie der complexen Zahlensysteme*, *insbesondere der geneinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst hirer geometrischen Darstellung*. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

1867b *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*. Leipzig,1867.

Hankins Th. L.,

1976 "Algebra as pure time: William Rowan Hamilton and the fondations of algebra", *Motion, and Time, Space and Matter* (P. K. Machamer & R. G. Turnbull, Eds), chapitre 12, p. 327-357.

1977 "Triplets and Triads. Sir W.R. Hamilton on the Metaphysics of Mathematics", *Isis*, vol. 68, n° 242 (juin 1977), pp. 175-193.

1980 *Sir William Rowan Hamilton.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1980.

Hawkes, H. E.

1901 "Note on Hamilton's definition of irrational numbers", *Bull. Amer. Math. Soc.* 7(1901), 306-307.

Houël, J. T.

1874 *Théorie élémentaire des quantités complexes*, Paris.

Israël, G.

1981 'Rigor' and 'Axiomatics' in Modern Mathematics, *Fundamenta Scientia*, 2: 205-219.

Jahnke, H. N.

1987 "Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts – Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm", *Archive for History of Exact Sciences* 37: 101–182.

Koppelman, E.

1972 "The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra", *Archive for History of Exact Sciences*, 8 (1971/72) 135-242.

MacDuffee, C. C.

1945 "Algebra's debt to Hamilton", *Collected Papers in Memory of William Rowan Hamilton*, 25-35. New York, 1945.

Manheim, J. H.

1964 *The Genesis of Point Set Topology* . Elmsford, NY: Pergamon Press, 1964.

Maseres, F.

1758 *A dissertation on the use of the negative sign in algebra*. London, 1758.

1780 "Conjecture concerning the Method by Which Cardan's Rules for Resolving the Cubic Equation", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* Vol. 70 (1780), 221-238.

Mathews, J.

1978 "W. R. Hamilton's paper of 1837 on the Arithmetization of Analysis". *Arch. Hist. of Exact. Sci.*, 19, n° 2, 1978.

Mittag-Leffler, G.

1907 "Niels Henrik Abel", *La Revue du Mois*, n^os 19-20, 10 juillet, 10 août 1907, t. IV, pp. 5-25, 207-229 http://www.gutenberg.org/dirs/etext05/8abel10.txt

Möbius, A. F.

1887 *Gesammelte Werke*, 4 vol., Leipzig, 1885-1887.

Mourey, C. V.

1828 *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Dédiée aux amis de l'évidence*. Paris, 1828 (2e éd., Paris: Bachelier, 1861).

Novy, L.

1968 "L'École algébrique anglaise", *Rev. de synthèse: IIIe s*. 49-52 (Janv-Déc. 1968): 211-221.

1973 *Origins of Modern Algebra*, Leyden: Noordhoff International Publishing.

Ohm, M.

1822 *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* , pt. 1*: Arithmetik und Algebra enthaltend,* pt. 2*: Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend*, Berlin: Reimer; Jonas: Berlin (1822) 1828/1829.

Ohrstrom P.,

1985 "W. R. Hamilton's View of Algebra as the Science of Pure Time and His Revision of This View", *Historia Mathematica*, 12, 1985, 45-55.

Peacock, G.

1830 *A Treatise on Algebra*, J. & J.J. Deighton: Cambridge/G.F. & J. Rivington: London.

1834 "Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis," *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science held at Cambridge in 1833*, John Murray: London, 185-352.

1842 *A Treatise on Algebra*, volume I: *Arithmetical Algebra*. Cambridge, 1842 (Réimp., N.Y., 1940).

1845 *A Treatise on Algebra*, volume II: *On symbolical Algebra and its applications to the geometry of Position*. Cambridge, 1845 (Réimp., N.Y., 1940)

Sinègre, L.

1994 *Au delà du Temps Pur: aspects géométriques, constructions et pratiques dans l'œuvre algébrique de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)*. Thèse, Université Denis Diderot- Paris VII, 1994.

Van der Waerden, B. L.

1931 *Modern Algebra*, 2 vol. Berlin - Springer, 1930-31.

Warren, J.

1828 *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*.Cambridge, 1828.

Wessel, C.

1799 *Om Direktionens analytiske betegning, et forsög anvendt formemmelig til plane og sphaeriske polygoners oplösning. Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, Femte Del Kjobenhavn*, 1799 (Trad. française de Zeuthen, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, préfaces de H. Valentiner et T. N. Thiele, Copenhagen, 1897).

Winterbourne A.,

1982 "Algebra and Pure Time: Hamilton's Affinity with Kant"*, Historia Mathematica*, 9, 1982, 195-200.

Woodhouse, R.

1803 *The Principles of Analytical Calculation*. Cambridge, 1803.

Notas e referências bibliográficas

* Cet article a été réalisé en tant que boursier PVE/ Capes (UnB)

Dominique Flament *(PVE/Capes). Endereço para correspondência: Universidade de Brasília - Cátedra Charles Morazé/GRE - Campus Universitário Darcy Ribeiro - Prédio da Biblioteca Central, sala 312 - Asa Norte Brasília DF CEP 70910-900. E-mail flament@unb.br*

1 "I habitually desire to find or to make in Algebra a system of demonstrations resting at last on intuitions […] Algebra may be made to rest on the … Intuition of time [...] It is impossible to treat Algebra as a Science at all (I say not as an Art or as a Language) without invoking more or less the aid of this Intuition." (Lettre du 11 juillet 1835 de William R. Hamilton à John T. Graves; [Graves R. P., 1975. II, 143]).

2 À cet égard, et parmi beaucoup d'autres, les déclarations de Cauchy ([Cauchy, A.L., 1821, *Introduction*]) et de N. H. Abel ((1802-1829), Lettre à C. Hansteen, 29 mars 1826; … [Mittag-Leffler, G., 1907]) sont particuliè-rement édifiantes.

3 Hamilton reconnaîtra par exemple toute l'importance du *Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik* (1822-1852) de Martin Ohm (1792-1872), dont on retrouve quelques passages de l'édition de 1828 traduits par lui dans un de ses manuscrits (TCD Note Book n° 28) ; en plusieurs occasions il se reportera à cet *Essai* afin de s'en démarquer. Voir [Jahnke, H. N., 1987] et [Bekemeier, 1984, 1985 et 1987].

4 À propos de l'*E*cole Algébrique Anglaise, voir [Novy, 1968], [Clock, 1964], [Koppelman, 1972]) (En particulier, § 5: "The Idea of Abstract Algebra in Great Britain", 217-), [Durand-Richard, M.-J., 1985, 1992, 1996, 1999 et 2002].

5 [Maseres, F., 1780, 221].

6 Fr. Maseres, "A Dissertation on the Use of Negative Sign in Algebra, London, 1758. ([Maseres, Fr.])

7 "This is all jargon, at which common sense recoils; but from its having been once adopted, like many other figments, it finds the most strenuous supporters among those who love to take things upon trust and hate the colour of a serious thought." ([Frend, W, 1796 *Preface*])

8 "Newton's dereliction of the principles of reasoning cannot, establish the fallacious notion, that every equation has as many roots as it has dimensions" […] "This notion of Newton and others is founded on precipitation.[…] unintelligible terms are used; […] much time is wasted on a jargon which has the appearance of science, and real knowledge is retarded. These volumes

upon volumes have been written on the stupid dreams of Athanasius, and on the impossible roots of an equation of *n* dimensions." ([Frend, W, 1799, *Preface*])

9 "The imaginary expression $\sqrt{-a}$ and the negative expression *-b*, have this resemblance, that either of them occurring as the solution of a problem indicates some inconsistency or absurdity. As far as real meaning is concerned, both are imaginary, since 0-*a* is as inconceivable as $\sqrt{-a}$." *First meeting of the British Association for the Advancement of Science* (York, 1831), d'après [Koppelman, E., 1972, 225].

10 Pour reprendre ici l'expression de L. Novy.

11 "[…] it seemed to me […] that the author designed to reduce algebra to a mere system of symbols, and nothing more; an affair of pothooks and hangers, of black strokes upon white paper, to be made according to a fixed but arbitrary set of rules: and I refused, in my own mind, to give the high name of Science to the results of such a system; …" (Lettre à Peacock, 13 octobre 1846, [Graves, R. P., 1975, II, 528]).

12 Cauchy et Gauss font à plusieurs reprises allusion aux relations en mathé-matiques. En particulier, ce dernier écrit ([Gauss, 1832, 176]):"Le mathématicien fait complètement abstraction de la nature des objets et de la signification de leurs relations: il n'a qu'à énumérer les relations et les comparer."

13 "In all Mathematical Science we consider and compare relations. In algebra the relations which we first consider and compare, are relations between successive states of some changing thing or thought. And numbers are the names or nouns of algebra; marks or signs, by which one of these successive states may be remembered and distinguished from another (…) Relations between successives thoughts thus viewed as successives states of one more general and changing thought, are the primary relations of algebra. […] with Time and Space we connect all continuous change, and by symbols of Time and Space we reason on and realise progression. Our marks of temporal and local site, our then and there, are at once signs and instruments of that transformation by which thoughts become things, and spirit puts on body, and the act and passion of mind seem clothed with an outward existence, and we behold ourselves from afar. And such a transformation there is, when in Algebra, we contemplate the change of our own thoughts as if it were the progression of some foreign thing, and introduce Numbers as the marks or signs to denote place in that progression." (TCD Notebook n°. 24.5, "Metaphysical Remarks on Algebra" (février 1831), fol. 49).

14 Ainsi que Hankins le résume fort justement ([Hankins, Th. L,1980, 104]): "Hamilton a insisté sur le fait qu'une *science*, en tant que ce terme est correctement employé, est une pure création de l'intellect fondée dans la raison seule."

15 Hamilton, loin d'être assuré de la valeur de ses arguments ainsi formulés, était encore moins prêt à en découdre: à sa demande, la leçon inaugurale d'astronomie sera publiée ("Introductory Lecture on Astronomy, Delivered in Trinity College, Dublin, November 8th 1832", *The Dublin University Review and Quarterly Magazine*, Vol. I, 1833, 72-85), mais elle sera suivie d'une critique anonyme dans laquelle l'Astronome Royal est considéré, bien que jeune, comme irrécupérable pour les grandes choses. Un jour peut-être, compte tenu des capacités qu'on lui prête actuellement, sera-t-il en mesure de publier dans une revue de météorologie! Ce canular sera assez vite éventé par ses amis auxquels il avait envoyé pour avis une si incroyable critique réalisée par lui-même !

16 Ce qu'il avait déjà fait en une autre occasion devant la *Royal Irish Academy*, le 4 novembre 1833.

17 [Hamilton, W . R., 1835].

18 Précisons à propos de cette dernière que Hamilton utilise l'expression "*Theoretical School*". Ici, à ce niveau des explications de Hamilton, le mot "théorique" est plus justifié que celui de "théorétique" pour qualifier cette école.

19 Lettre à Aubrey De Vere, 9 février 1831 ([Graves, R. P., 1975, I, 519]).

20 Lettre à Aubrey De Vere, 13 mai 1835 ([Graves, R. P.,1975, II, 142]).

21 Lettre au Vicomte Lord Adare (Edwin Wyndham-Quin (1812-1871), 3e Comte de Dunraven), 13 mars 1835 ([Hamilton, W. R., 1879]). Cette précision à deux autres intérêts: elle va à l'encontre de l'opinion encore trop répandue qui fait dire à Hamilton que l'approche logico-formelle des «Cambrigemen» était la complète antithèse de sa propre approche métaphysique; elle rend moins "dramatique" le ralliement de Hamilton au point de vue de Peacock et consorts.

22 Lettre à Aubrey De Vere, 13 mai 1835 ([Graves, R. P., 1975, II, 1975, 140]).

23 [Hamilton, W. R., 1837, 4]. À propos de son style, on peut noter dans cette citation, dans celles qui précèdent ou à venir, l'utilisation faite par Hamilton des majuscules et des italiques pour appeler l'attention du lecteur sur les idées maîtresses de sa théorie réformatrice.

24 [Coleridge, S. T. 1901, 224]. Il figure à côté de G. Berkeley (1685-1753) et E. Kant (1724-1804) parmi ceux qui influenceront le plus ses idées philosophiques de Hamilton.

25 [Hamilton, W. R., 1837, 3].

26 *Encyclopédie méthodique*. *Mathématiques*, tome I (1784), article "Algèbre", p. 32-. C'est ainsi qu'on l'appelait encore par opposition à la géométrie traditionnelle conçue comme la "science de l'extension". À cet égard, dans la lettre (I) à Adare, datée du 4 mars 1835 ([Hamilton, W. R., 1879]), Hamilton développe les différences entre *Arithmétique* (le Nombre est considéré comme la réponse à la question "How many?"; "Science of *Multitude*" fondée sur la relation "*more and fewer*, or ultimately of the *many*, and the *one*"; "compter"), *Metrology* (le Nombre est considéré comme la réponse à la question "How much?"; "a more complex Science of *Magnitude* and *Measure*"; où la relation fondamentale est "*greater and less*, or of *whole and part*"; "mesurer") et *Algèbre* (le Nombre est, pour Hamilton seul, la réponse à la question "How placed in a succession?"; "the guiding relation being that of *before and after* (or of positive, negative, and zero)"; "Science of *Order and Progression*, or as it might be called concisely of PURE TIME"; "ordonner").

27 [Hamilton, W. R., 1837, 2].

28 [Hamilton, W. R., 1837, 5]. Notons que Hamilton paraît, en employant l'expression "intuitive principles", marquer un recul certain par rapport à la vision plus moderne de Peacock, par exemple, qui parle d'"hypothèses" de construction.

29 [Hamilton, W. R., 1837, 3].

30 Voir ce que Newton écrit dans son *Introductio ad Quadraturam Curvarum* (Ce texte a été rédigé pour servir d'introduction à son *Tractatus De Quadratura Curvarum* publié dans son *Opticks* (ou *Treatise on the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*, London, 1704)), p. 1.

31 [Hamilton, W. R., 1837, "Introductory Remarks", 4].

32 Voir Neper, J. (Sir John Napier of Merchiston), *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edimbourgh, 1614; en particulier la définition 6.

33 [Hamilton, W. R., 1837, 4].

34 *Leçons sur le calcul des Fonctions*, Leçon Première. Sur l'objet du Calcul des Fonctions, et sur les Fonctions en général. Paris 1806, p. 4.

35 Lettre de Hamilton à J. T. Graves, datée du 11 juillet 1835 ([Graves, R. P., 1975, II, 143). On trouve déjà trace des réflexions de Hamilton sur l'Espace et le Temps et leurs rapports avec la Géométrie et l'Algèbre, dans son "Account of a Theory of Systems of Rays" (présenté le 23 avril 1827 devant l'Académie Royale d'Irlande), et dans des manuscrits datés respectivement du 15 novembre 1827 et du 9 juin 1830 (voir [TCD MS. 1492, *Miscellaneous Papers*, Box VI]).

36 Qui rassemble les trois disciplines décrites précédemment (voir ici note 26).

37 [Graves, R. P., 1975, II, 138].

38 "it is impossible to treat Algebra as a *Science* at all (I say not as an Art or a Language), without invoking more or less the aid of this Intuition. Pure time - the before and after; precedence, subsequence, and simultaneity; continuous indefinite progression from the past through the present to the futur - this thought, or intuition, or form of the human mind, appears to me to force itself upon me whenever I seek to *analyse* what I and others *mean*, as the object *reasoned upon*, in Algebraic Science: though I willingly admit that the *Time* thus considered is Pure (just as the Space of the geometers is Pure), [...]" (Lettre à J. T. Graves du 11 juillet 1835, [Graves, R. P., 1975, II, 143]).

39 Voir les lettres du 19 juillet 1834 à Adare, ([Graves, R. P., 1975, II, 96-97]), du 20 juillet 1834 à Wordsworth ([Graves, R. P., 1975, II, 97-98]) et du 13 mai 1835 à De Vere, ([Graves, R. P., 1975, II, 141-142]).

40 "it is remarkable that Kant perceived that Time, like Space, must be the foundation of a Science *a priori* ; yet failed to perceived that Algebra may be viewed as precisely such a Science" (Lettre du 2 juin 1835, [Graves, R. P., 1975, II, 145]). Hamilton ne semble pas avoir eu connaissance des *Prolegomena* de Kant, où l'on pouvait lire par exemple: "La géométrie est fondée sur l'intuition pure de l'espace. L'arithmétique produit son concept de nombre par l'addition successive des unités dans le temps... [*Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaftwird auftreten können*. Riga, bey Johann Friedrich Hartknoch, 1783. § 10.] Coleridge aussi avait écrit plus tôt que l'"Arithmétique produit son concept de nombre par l'addition successive d'unitiés de temps" (cit. [Hankins, 1980, chap. 19, Note 6, 436]).

41 [Graves, R. P, 1975, II, 150].

42 Lettre à Aubrey De Vere, 4 octobre 1835 ([Graves, R. P., 1975, II, 164]).

43 Publié dans les *Transactions of the Royal Irish Academy* (vol. XVII, part 1 (1837), 293-422).

44 Dans la Préface à ses *Lectures on Quaternions* ([Hamilton, W. R., 1853, note (14)]) il affirme que ce premier écrit "On Conjugate Functions or Algebraic Couples" fut, à cette occasion, "considérablement modifié".

45 [Hamilton, W. R., 1837, 80, art. 32].

46 [Hamilton, W. R., 1837, 95, art. 6].

47 Il sera largement critiqué par ses contemporains et jusqu'à nos jours pour des raisons pas toujours claires et souvent opposées. Le choix du titre dissuadera plus d'un lecteur. Mais, plus encore, il sera à l'origine des critiques de nombreux mathématiciens qui ne n'auront pas pris la peine de le lire!

48 Il parle aussi de "point indivisible de temps" ([Hamilton, W. R., 1837, art. 34, 84]).

49 "[...] I confess that I do not find myself able to frame a distinct *conception of number*, without *some* reference to the thought of *time*, although this reference may be a somewhat abstract and transcendental kind. I cannot fancy myself as *counting* any set of things, without first *ordering* them, and treating them as *successive*: however *arbitrary* and *mental* (or *subjective*) this assumed succession may be. And by consenting to *begin* with the abstract notion (or pure intuition) of TIME, as the *basis* of the exposition of those axioms and inferences which are to be expressed by the symbols of algebra, … is still appears to me that an advantage would be gained: because the necessity for any merely *symbolical extension* of formulæ would be at least considered *postponed* thereby." Il faisait encore cette déclaration en 1853, bien après la découverte des quaternions ([Hamilton, W. R., 1853], note *, (15)).

50 Les pages précédentes témoignent qu'il a cherché à nous en convaincre; il n'est pas nécessaire d'insister ici plus avant sur ce "point de vue" qui n'est pas partagé par ses plus proches contemporains, notamment par De Morgan ou A. Cayley (1821-1895). Le premier, plutôt amical, observait que des "conventions très recevables" rendraient "vraie" l'étroite relation avancée par Hamilton entre le temps, la succession et le nombre. Cayley, en revanche, ne peut admettre que l'on puisse affirmer que l'idée de nombre découle de celle de temps: "il est évident pour moi qu'elle est dérivée de celle de la succession dans le temps ou dans l'espace, indifféremment." (Cité par [Koppelman, E., 1972, 225-226]). Plus tard, il sera encore moins conciliant: "Je ne puis concéder que l'Algèbre soit en relation avec l'idée de temps. J'accorde que la notion de continuité s'impose et qu'elle a une grande importance, mais je ne puis absolument voir en elle l'idée mère de la Science. Et je partage encore moins les vues de Hamilton, quand il prétend rattacher à la notion du temps son couple algébrique ou symbole imaginaire a + bi." ([Cayley, A., 1883, 443-4])

51 "the notion or intuition of ORDER IN TIME is not less but more deep-seated in the human mind, than the notion or intuition of ORDER IN SPACE ; and a mathematical science may be founded on the former, as pure and as demonstrative as the science founded on the latter. There is something mysterious and transcendent involved in the idea of Time; but there is also something definite and clear ; and while Metaphysicians medidate on the one, Mathematicians may reason from the other." [Hamilton, W.R. 1837, 5].

52 On peut également se reporter à notre résumé ([Flament, D., 2003, chap. IV, 2, p352-385]) et aux explications très limitées et beaucoup plus tardives données par Hamilton ([Hamilton, 1853, *Preface*]).

53 Dès le mois d'octobre 1828, il avait sollicité l'aide de Hamilton pour défendre les résultats de son *Essay on Logarithms*. Hamilton avait déjà abordé ces problèmes dans [Hamilton, W. R., 1835] et proposé la formule $\mathrm{Log}_{(e,0)}(1,0)=\frac{(0,2kp)}{(1,2ip)}$ pour remplacer celle de Graves. Dans l'article de 1837, il proposera l'expression plus générale de l'*unité première* (1,0) selon la *base* (*e*,0) sous la forme $\overset{w'}{\underset{w}{\log}}{}_{(e,0)}\cdot(1,0)=\frac{(0,2w'p)}{(1,2wp)}$, où ω et ω' sont deux nombres entiers arbitraires.

54 Il est bien sûr entendu à ce niveau de l'exposé de Hamilton que la notion de durée était déjà introduite. On relève dans ses explications de 1853: "The *full* meaning of the symbol $B-A$, in any particular application, being (on this plan) not known, until we know *how long after*, or *how long before*, if at all, *B* is than *A*. But it is evident that the notion of a certain *quality* (or *kind*) of this diversity, or interval, enters into this conception of a *difference* between moments, at least as fully and as soon as the notion of *quantity*, amount, or duration. The contrast between the Future and the Past appears to be even earlier and more fundamental, in human thought, than that between the Great and the Little." ([Hamilton, W. R., 1853, *Preface*, (4)]).

55 Ibid., p. 10. Dans sa *Préface* de 1853, il écrit encore que l'expression symbolique $D - C = B - A$, était une formule qui devait être interprétée "as denoting an *equality between two intervals in time*; or to express that the moment *D* is *related* to the moment *C*, *exactly as B is to A*, with respect to identity or diversity: the *quantity and quality* of such diversity (when it exists) being here *both* taken into account." ((5))

56 [Hamilton, W. R., 1853, (5)].

57 *Ibid*, p. 14.

58 "[…] whatever two distinct moments *A* and *B*' may be, there is always one and only one such bisector moment *B*; and that thus […] a continued analogy between three moments can always be constructed in one but in only one way, by inserting a mean, when the extremes are given. And it is still more evident, from what was shewn before, that the middle moment *B*, along with either of the extremes, determines the other extreme, so that it is always possible to complete the analogy in one but in only one way, when an extreme and the middle are given."

59 "By thus constructing and continuing an equidistant series, of which any two moments are given, we can arrive at other moments, as far from those two, and as near to each other, as we desire." (*Ibid.*, p. 15).

60 "And even in those cases in which we have not yet succeeded in discovering a rigorous proof of this sort, identifying a sought moment with a known one, or distinguishing the former from the latter, the conception of continued analogies offers always a method of research, and of nomenclature, for investigating and expressing, or, at least, conceiving as investigated and expressed, with any proposed degree of approximation if not with perfect accuracy, the situation of the sought moment in the general progression of time, by its relation to a known equidistant series of moments suffciently close." (p. 16)

61 "It is the more admissible in point of method to suppose this previous acquaintance with the chief properties of integer numbers, as set forth in elementary arithmetic, because these properties, although belonging to the Science of Pure Time, as involving the conception of succession, may all be deduced from the unfolding of that mere conception of *succession*, (among things or thoughts as *counted*,) without requiring any notion of *measurable intervals*, equal or unequal, between successive moments of time. Arithmetic, or the *science of counting*, is, therefore, a part, indeed, of the *Science of Pure Time*, but a part so simple and familiar that it may be presumed to have been previously and separately studied, to some extent, by any one who is entering on Algebra." (p. 16)

62 Voir la note 55 précédente.

63 *Ibid*., p. 20. Pour simplifier la traduction du mot "step" et éviter de possibles confusions, nous avons préféré ici le mot "pas" au mot "transition". Cependant, dans sa *Préface* ([Hamilton, W. R., 1853, (5)]), Hamilton utilise indistinctement les mots anglais "Step" et 'Transition".

64 Il parle aussi de "nouvelle manière conventionnelle d'écrire".

65 *Ibid*., p. 21.

66 "It is evident that the *total change* or *total step*, effective or null, from the first moment *A* to the last moment *C*, in this successive transition from *A* to *B* and from *B* to *C*, may be considered as *compounded* of the two successive or *partial* a and b, namely the step a from *A* to *B*, and the step b from *B* to *C*; and that the *ultimate ordinal relation* of *C* to *A* may likewise be considered as *compounded* of the two *intermediate* (or suggesting) ordinal relations b and a, namely the relation b of *C* to *B*, and the relation a of *B* to *A*; a composition of steps or of relations which may conveniently be denoted, by interposing, as a mark of combination, between the signs of the component steps or of the component ordinal relations, the same mark $+$, [...]." (p. 21-22)

67 Il parle de "group" (*Ibid*., p. 29).

68 "the *number* which specifies the *act* of multiplication, serves therefore also to specify the resulting *ratio*, and every number may be viewed either as the *mark of a ratio*, or as a *mark of a multiplication*, according as we conceive ourselves to be *analytically examining* a product already formed, or *synthetically generating* that product." (p. 38)

69 [Hamilton, W. R., 1853, (7)].

70 Voir par exemple [Hawkes, H. E., 1901], [MacDuffee, C. C., 1945], [Manheim, J. H., 1964], [Clock, D., 1964], [Koppelman, E., 1972], [Mathews, J., 1978], [Hankins, T. L, 1980], [Ohrstrom, P., 1985], [Flament, D., 2003].

71 Voir à ce propos l'article de Mathews ([Mathews, J., 1978]). Signalons également que les critiques ultérieures de Cantor ([Cantor, G., 1932, 381, note 1]) et de Cayley ([Cayley, A., 1883]) sont de pur principe et non fondées sur une analyse du contenu de l'*Essai*.

72 *Ibid*., p. 53.

73 *Ibid.*, p. 59.

74 "In the THEORY OF SINGLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is *absurd*, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is *significant*, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely [...] the *principal square-root of the couple* (-1*;* 0)." (p. 107)

75 [Graves, R. P., 1975, II, 363-380].

76 Le 16 octobre 1843; voir [Graves, R.P., II, 434-435.].

77 [Graves, R. P., 1975, III, 480].

78 Lettre du 26 octobre 1843 à Sir W. R. Hamilton ([Graves, R. P., 1975, II, 443]).

79 [Graves, R. P., 1975, II, 472-473].

80 Lettre du 12 mai 1841 à A. De Morgan ([Graves, R. P., 1975, III, 245-248]).

81 Lettre du 30 avril à R. P. Graves ([Graves, R. P., 1975, II, 520-522]).

82 "My own direction of extension of the theory of imaginaries appears to be quite different from the line taken by some acute writers in the Cambridge Journal, ... On the whole my habit is to be disatisfied with mere signs, and to look out always for things signified." (Lettre 19 juin 1847 au Professeur Young, ([Graves, R. P., 1975, II, 578-579]).

83 [Graves, R. P., 1975, II, 455-456]. Dans sa lettre du 9 décembre 1844 adressée à De Morgan ([Graves, R. P., 1975, III, 254-255]), Hamilton impose en général à ses "systèmes" de "polyplets", les trois conditions suivantes: 1. La "*simplicité algébrique*" (soit, l'analogie avec l'algèbre ordinaire et les règles de l'addition et de la multiplication; exceptée la propriété commutative dans le cas des quaternions)); 2. la "*simplicité géométrique*" (soit, la facilité de la construction,... et,"surtout, la *symétrie de l'espace*, aucune direction privilégiée") et 3. La *division* doit être *déterminée*, "un quotient n'étant jamais indéterminé ou impossible, à moins que les constituants du diviseur ne s'annulent tous"). Enfin, dans sa Préface de 1853, il écrit que la multiplication doit être associative: "à ce principe associatif, ou propriété de la multiplication, j'attache beaucoup d'importance ... L'absence du principe associatif me semble être un inconvénient dans les octonions ou octaves ...".

84 Lettre à De Morgan, 2 février 1846 ([Graves, J. T., 1975, 504]).

85 "I sometimes claim to be regarded not as a *des*tructive innovator, but as a *con*structive [...]" (Lettre 10 juillet 1847 au Professeur Young, [Graves, R. P., 1975, II, 579-580]).

[Artigo recebido em 05/2007 | Aceito em 08/2007]