Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Felix Klein

Classification of geometries: a dialogue between the texts of Arthur Cayley and Felix Klein

LEANDRO SILVA DIAS

Universidade Federal do Rio de Janeiro | UFRJ

GÉRARD ÉMILE GRIMBERG

Universidade Federal do Rio de Janeiro | UFRJ

RESUMO Tradicionalmente, quando se trata das geometrias não euclidianas, a maioria dos historiadores relata que Felix Klein se inspirou ao ler a "Sexta Memória sobre os *Quantics*" (1859) de Arthur Cayley. Todavia, não apresentam de forma completa as contribuições de Cayley, dizendo apenas que Klein é que interpretou o trabalho de Cayley para o caso das geometrias não euclidianas. Porém, têm-se alguns problemas nesta narrativa, o maior deles é que Cayley possui uma abordagem própria que é ligeiramente distinta da apresentada por Klein. Nosso artigo se propõe a analisar estas diferenças, esclarecendo a relação entre os trabalhos destes matemáticos e a gênese das métricas não euclidianas.

Palavras-chave história da geometria não euclidiana – Arthur Cayley – Felix Klein – métrica – modelos

ABSTRACT *Traditionally, when it comes to non-Euclidean geometries, most historians report that Felix Klein was inspired by reading Arthur Cayley's A Sixth Memoir upon Quantics (1859). However, they do not fully present Cayley's contributions, only saying that Klein applied Cayley's work to the case of non-Euclidean geometries. However, there are some problems in this narrative, the biggest of which is that Cayley has his own approach that is slightly different from that presented by Klein. Our article proposes to analyze these differences, clarifying the relation between the works of these mathematicians and the genesis of non – Euclidean metrics.*

Keywords *history of non-Euclidean geometry – Arthur Cayley – Felix Klein – metric – models*

Introdução

Nas narrativas referentes ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas, é comum aparecer o relato que Felix Klein se inspirou num artigo de Arthur Cayley, sua sexta memória sobre os *quantics* (polinômios homogêneos de grau dois ou mais) de 1859, ao escrever seus artigos sobre as geometrias não euclidianas, de 1871 e 1873[1]. Nestes, Klein apresenta uma métrica e classifica as diversas geometrias usando a noção de grupo de transformações, partindo da geometria projetiva.

Todavia, estes diversos trabalhos historiográficos não esclarecem qual papel desempenhou os desenvolvimentos de Cayley, presentes na sexta memória. Ao leitor, que não tenha lido os artigos de Cayley, ficará a impressão de que a obra "fundamental" sobre o assunto seria de Klein, cabendo a Cayley apenas uma "função" marginal, como se ele somente tivesse esboçado poucos resultados sobre o assunto.

Neste artigo, apresentamos outra leitura acerca do caráter geométrico das memórias sobre os *quantics* de Cayley, principalmente a sexta memória, que possui um método de apresentar métricas para as geometrias euclidiana, e elíptica. Divergimos, pelo menos em parte, da maioria dos historiadores, pois seguimos os desenvolvimentos de Cayley explicitando suas ideias, esclarecendo as diferenças de abordagem entre Cayley e Klein.

Antes disso, se faz necessário situar nossos questionamentos no quadro geral da discussão histórica, até mesmo para melhor distinguir nossa abordagem sobre os textos de Cayley e Klein das que já são de conhecimento na historiografia tradicional.

Sommerville[2] possui dois artigos onde trata das métricas, incluindo a classificação das geometrias. Em seu artigo de 1910, ele trata de apresentar a métrica a partir da geometria projetiva, com o objetivo de apresentar uma classificação. Já em seu artigo de 1932, ele desenvolve a métrica partindo de um sistema de coordenadas homogêneas, no estilo de Cayley, chegando ao caso de n dimensões. Porém, não desenvolve muitas considerações históricas sobre o assunto, nem mesmo cita os artigos de Cayely, nem os de Klein. Ou seja, apesar de bem apresentar o conteúdo relacionado às métricas, não esclarece as contribuições de Cayley e Klein.

James Pierpont considera que o trabalho de Cayley não teve seu papel bem apresentado pela historiografia, nisto nossos trabalhos concordam. Ele afirma: "Cayley em seu *Sixth Memoir Upon Quantics* (1859) estabeleceu as bases da geometria não euclidiana. Embora este artigo seja frequentemente referido, seu verdadeiro significado parece ter sido totalmente negligenciado".[3]

Em outro artigo, Pierpont[4] apresenta como uma das possíveis razões da abordagem de Cayley ser negligenciada, afirmando que foi devida à popularidade que os trabalhos de Klein ganharam, destacando que provavelmente muitos matemáticos estudaram geometrias não euclidianas a partir destes. Este fato, atrelado ao do programa de Erlangen, que também ganhou muita popularidade, e ter sido traduzido em Italiano (1890), Frances (1891) e Inglês (1893), ou seja, amplamente divulgado, nos faz entender alguns dos motivos pelos quais a abordagem de Klein foi mais conhecida do que a de Cayley. Nosso artigo difere de Pierpont no fato de que este não destaca o papel fundamental da geometria elíptica. Veremos como o modelo esférico é fundamental para entender o desenvolvimento da métrica de Cayley. Além disso, consideramos um contexto mais amplo, dialogando com mais artigos de Cayley e Klein.

Rosenfeld, em seu livro sobre geometrias não euclidianas e a noção de espaço, nos faz perceber um tipo de discurso que se torna comum entre diversos historiadores. Ele afirma que Cayley não teria entendido completamente a geometria hiperbólica de Lobatchevski e, por esse motivo, não apresenta uma métrica hiperbólica na sexta memória sobre os *Quantics*. Rosenfeld é categórico ao afirmar que: "Cayley não conseguiu ver a conexão entre suas métricas e a geometria lobatchevskiana. Sua anteriormente mencionada Nota sobre a Geometria Imaginária de Lobatchevski mostra que, embora ele estivesse familiarizado com os trabalhos de Lobatschevski, ele não entendia completamente o artigo do geômetra russo que ele citou".[5]

Ele cita um pequeno artigo, "Nota sobre a Geometria Imaginária" de Lobatchevski, onde Cayley faz referencia a uma relação analítica do matemático russo, do artigo *Géométrie imaginaire*[6] de 1830. Neste, Lobatchevski apresenta a seguinte relação num triângulo hiperbólico ABC, determinado por lados opostos respectivos a, b, c e sendo $sen\ a' = \frac{1}{ch\ a}$, segue:

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{senB\ sen\ C}{sen\ a'}.$$ [7]

Lobatchevski apresenta várias outras relações e observa que, se a' é trocado por $a'\sqrt{-1}$, obtém-se as fórmulas do triângulo esférico. Concluindo, ele afirma que essa geometria, livre de qualquer contradição, mostra a independência do quinto postulado de Euclides.

Cayley fez um pequeno comentário desta relação em sua nota. Este é o trecho que Rosenfeld utiliza para dizer que Cayley não compreendia o trabalho de Lobatchevski: "Eu não entendo isto; mas seria muito interessante encontrar uma real interpretação geométrica do último sistema de equações mencionado, que (se somente A, B, C são quantidades reais positivas tais que $A+B+C<\pi$; para a condição, A, B, C cada $< \frac{1}{2}\pi$, pode ser omitido) contenha somente as quantidades reais A,B,C,a',b',c'; e é um sistema correlativo para as equações da Trigonometria Esférica".[8]

Cayley com certeza entendeu as fórmulas, mas se coloca a questão de ter uma representação geométrica dessas relações, ou seja, um modelo. Esta afirmação não prova uma possível incompreensão de Cayley da geometria hiperbólica, mas mostra que para Cayley, era necessário ter um modelo para a relação matemática apresentada pelo matemático russo. Aliás, o fato de Cayley mencionar a correlação entre fórmulas das geometrias esférica e hiperbólica, já demonstra que ele não desconhecia o assunto. Se Cayley tinha um modelo da geometria esférica, não tinha o equivalente para a geometria hiperbólica.

Também é importante considerar que somente três anos depois desta nota de Cayley, Beltrami, em 1868, desenvolve modelos para a geometria hiperbólica, o que sinaliza que a sexta memória participa do processo de criação de modelos para as geometrias não euclidianas. Além de Rosenfeld não considerar o que Cayley escreveu posteriormente, em 1872, num artigo sobre a métrica hiperbólica que analisaremos a seguir.

Já Yaglom, considera os desenvolvimentos das memórias sobre os *quantics* de Cayley puramente algébricos, podendo, apenas, ser interpretados no espaço projetivo:

> *Klein iniciou de um trabalho do algebrista inglês Arthur Cayley. Em 1854-1859, nas seis memórias sobre* quantics *no London Philosophical Transactions, Cayley considerou polinômios algébricos homogêneos (formas ou* quantics*, como ele os chamou) de segundo grau ou superior. Os métodos desenvolvidos por Cayley foram puramente algébricos, mas o espaço das variáveis na qual os polinômios dependem pode ser interpretado como o espaço projetivo (descrito em coordenadas projetivas).* [9]

Apesar de Yaglom considerar que a sexta memória sobre os *quantics* teve participação no desenvolvimento das métricas, principalmente com Klein, ele não destaca o caráter geométrico das memórias sobre os *quantics*, ainda que Cayley claramente tenha trabalhado diversos aspectos geométricos, principalmente nas quinta e sexta memórias.

Abe Shenitzer escreveu um pequeno artigo onde fez a seguinte afirmação a respeito de Cayley: "ele não entendia completamente a geometria hiperbólica e, portanto, não considerou o caso de um absoluto real de dois pontos"[10]. Shenitzer mostra como Cayley poderia ter encontrado a métrica hiperbólica, porém não considera outros artigos de Cayley a não ser a sexta memória. Além disso, ele não destaca o que movia Cayley em sua sexta memória, que era uma clara visão do modelo esférico. Logo, percebemos um discurso repetido entre diversos historiadores, porém sem um detalhamento do próprio conteúdo do trabalho de Cayley.

Em seu livro sobre geometrias não euclidianas entre 1860 e 1900, Voelke[11] trata dos desenvolvimentos de Cayley e Klein sobre as métricas, porém não segue, completamente, o raciocínio de Cayley, pois não mostra como o modelo esférico desempenha um papel fundamental para que ele chegasse a sua definição de métrica. Voelke não considera o artigo de 1872 de Cayley, nem faz uma análise das notas de Cayley.

Crilly[12] fez uma bela biografia sobre Cayley, porém não se dedica as pesquisas sobre as geometrias não euclidianas, além de não ter detalhado o conteúdo da sexta memória. Quando ele trata das memórias sobre os *quantics* faz isso considerando apenas os aspectos algébricos da teoria dos invariantes, não menciona os aspectos geométricos.

Jeremy Gray, em seu livro sobre a história da geometria do século XIX, faz uma bela descrição da aceitação das geometrias não euclidianas, porém não analisa o conteúdo da sexta memória, nem dos artigos de Cayley. Ele apenas apresenta o que chama de "*Klein's Cayley metric*", que na verdade é a versão apresentada por Klein. Jeremy Gray diz que: "Quando Klein falou de métrica de Cayley, ele tinha em mente o que ele publicou em dois artigos intitulados "Sobre a assim chamada geometria não euclidiana", em 1871 e 1873. Cayley havia notado uma maneira pela qual se pode começar com a geometria projetiva e chegar à idéia da distância de Euclides, mas não havia percebido a generalidade desta descoberta. Foi Klein quem viu isso"[13].

Gray parte da noção de razão dupla, definindo a métrica da mesma forma que Klein, utilizando o logaritmo da razão dupla, multiplicado por uma dada razão. Após isto, apresenta a razão pela qual essa demonstração é satisfatória, pois concorda com as propriedades fundamentais da distância. Logo, ele não justifica sua afirmação acerca de Cayley, nem se aprofunda nos artigos de Cayley, como nos propomos a fazer aqui.

Norbert A'Campo[14], ao tratar do conteúdo da sexta memória, não faz uma leitura direta do texto, mas sim, citando o texto sobre história da matemática de Klein[15]. Únicas citações diretas que ele faz da sexta memória são a introdução e conclusão de Cayley. Isto quer dizer que Norbert não retrata o que realmente Cayley fez, ele apenas relata as impressões de Klein sobre a sexta memória. Ele cita a nota da sexta memória, porém não cita o artigo de 1872, ou seja, não analisa completamente a abordagem de Cayley.

A propósito, Cayley escreveu uma nota acerca da sexta memória sobre os *quantics*[16], onde ele situa sua obra no contexto dos trabalhos de Klein e da classificação das geometrias. Cayley cita como referência os dois textos de Klein, os de 1871 e 1873, e o seu sobre geometria hiperbólica de 1872. Este artigo de Cayley mostra que ele compreendeu a geometria hiperbólica, publicando este artigo no *Mathematische Annalen*, mesmo periódico no qual Klein publicou seus artigos sobre as geometrias não euclidianas.

Com isso, percebe-se que as investigações acerca das reações de Klein a leitura de Cayley, e de Cayley a cerca dos trabalhos de Klein, ainda não foram suficientemente esclarecidas pela historiografia, ou seja, ainda o trabalho de Cayley não foi analisado de forma detalhada. Nosso trabalho busca explicitar as relações entre os trabalhos destes matemáticos a cerca das geometrias não euclidianas, esclarecendo as reais contribuições de Cayley e Klein, seguindo os desenvolvimentos destes matemáticos.

Para isto, inicialmente analisamos os artigos de Cayley sobre a teoria dos invariantes, dando destaque ao caráter geométrico presente nos trabalhos dos ingleses. Depois, estudamos a sexta memória sobre os *quantics*, apresentando a abordagem de Cayley. O trabalho de Klein é apresentado e, por fim, tratamos do texto de Cayley de 1872, onde trabalha a métrica na geometria hiperbólica.

Teoria dos invariantes e geometria projetiva

Para contextualizarmos os trabalhos sobre a teoria dos invariantes pelos ingleses, precisamos ver como ela inicia-se no princípio do século XIX. Os trabalhos publicados pelos matemáticos britânicos De Morgan[17] e George Boole[18], onde se destaca o artigo de 1841, sobre o tema das transformações lineares, influenciaram Cayley nas suas pesquisas sobre este tema.

Cayley produz os artigos de 1845 e 1846 que são considerados o início da teoria dos invariantes, como ficou conhecida a teoria após Sylvester definir a sua nomenclatura[19]. Sobre este tema, Cayley escreveu ainda uma série de dez memórias, chamadas de *Memoirs upon Quantics* (1854-1878), no *Philosophical Transactions of Royal Society of London*. As memórias que nos interessam são a quinta e sexta memórias, de 1858 e 1859, pois nestas Cayley relaciona a teoria dos invariantes às propriedades projetivas, e a definição de métricas sobre um espaço projetivo.

Com efeito, Cayley que adere ao movimento impulsionado pela *Analytical Society*, que visava trazer a análise e o cálculo diferencial no formalismo leibniziano, não deixa, todavia, aparecer explicitamente a visão geométrica subjacentes aos cálculos algébricos. Mas Cayley prossegue nos seus trabalhos sobre os invariantes dos polinômios homogêneos, utilizando conceitos da geometria projetiva, especialmente, nas quinta e sexta memórias[20].

Após escrever as três primeiras memórias, Cayley submete, em onze de março de 1858, suas quarta e quinta memórias sobre os *quantics*. A teoria dos invariantes já estava esboçada. Cayley afirma no final de sua quarta memória: "Mas eu tenho agora, eu penso, estabelecido grande parte das definições que são necessárias até o presente momento" [21].

Logo, desde já bem elaboradas as bases do estudo dos invariantes, Cayley começa a quinta memória sobre *quantics* com o claro objetivo de relacionar esta álgebra à geometria. Em sua introdução, ele afirma:

> *Esta memória foi originalmente destinada a conter um desenvolvimento das teorias dos covariantes de um determinado* quantic *binário, isto é, das quádricas, das cúbicas e dos quárticos, mas no que diz respeito às teorias das cúbicas e dos quárticos, verificou-se necessário considerar o caso de duas ou mais quádricas, e tenho, portanto, composto por tais sistemas de dois ou mais quádricas, e as teorias resultantes da relação harmônica e de involução, no assunto da memória e, apesar da teoria da homografia ou da relação anarmônica pertencerem ao tema das quádricas binárias bipartidas, até mesmo por sua relação com as teorias referidas, também são consideradas nesta memória.*[22]

Desde a introdução da quinta memória, percebemos o quanto o desenvolvimento da teoria dos invariantes contém um importante viés geométrico, conectando resultados da geometria projetiva à teoria dos invariantes. Destacaremos a sexta memória, pois nela Cayley desenvolve seu método para definir métricas a partir da geometria projetiva, e é nesta memória que podemos explicitar o que Cayley realmente possui de diferente em relação a Klein.

A sexta memória de Cayley sobre os *quantics*

A sexta memória sobre os *quantics* pretende estudar a relação entre polinômios homogêneos do segundo grau, em duas ou três variáveis, e a determinação de uma distância a partir de um espaço projetivo. O conceito de espaço projetivo não é definido por Cayley. Este conceito e essa denominação virão a ser introduzidos, a partir da segunda metade do século XIX, com as contribuições de Möbius, Von Staudt, Felix Klein, e se consolidam na primeira metade do século XX[23], em sinergia com os desdobramentos da álgebra linear. Mas, considerando pontos referenciados por duas ou três coordenadas homogêneas, Cayley toma, de fato, pontos de uma reta ou de um plano projetivo. Cayley afirma na introdução deste artigo: "Um objetivo principal desta memória é a criação, em princípios puramente descritivos, da noção de distância"[24].

Ele inicia o seu estudo partindo da geometria de uma dimensão, em que se utilizam equações quadráticas homogêneas de duas variáveis que representam um par de pontos sobre a reta projetiva. Depois, examina o caso de equações quadráticas de três variáveis que representam cônicas no plano projetivo. Numa parte posterior da sua memória, Cayley desenvolve a noção de distância para ambos os casos. A estrutura desta memória se divide, portanto, em cinco partes[25]: Introdução (parágrafos 147 e 148), *On Geometry of One Dimension* (do parágrafo 149 ao 168), *On Geometry of Two Dimensions* (do parágrafo 169 ao 208), *On the Theory of Distance* (do parágrafo 209 ao 229) e conclusão (parágrafo 230).

Assim, a geometria de uma dimensão é definida por Cayley como: "a geometria de pontos na curva [...]"[26]. Neste caso, vê-se o estudo das relações entre pontos pertencentes a uma mesma reta. Já no caso da geometria de duas dimensões é apresentada como "a geometria de pontos e curvas num plano".

Nesse estudo das relações entre pontos, curvas e retas, Cayley considera a relação de dualidade. Nessa relação, na época chamada de "reciprocidade", o objeto ponto pode significar o seu dual, ou seja, uma curva ou uma reta e, o objeto curva ou reta, pode significar um ponto. Além disso, insiste ainda sobre o significado de coordenadas homogêneas: "[...] é apenas as razões das coordenadas, e não seus valores absolutos, pelos quais são determinados [...]"[27]. E completa: "[...], portanto, ao dizer que as coordenadas x,y são iguais a a,by , ou por escrito, $x,y=a,b$, queremos dizer apenas que $x{:}y=a{:}b$, e nunca como resultado obter $x,y=a,b$, mas apenas $x{:}y=a{:}b$""[28].

Ainda na introdução da sexta memória, Cayley diz que inclui a "*spherical geometry*", que seria a geometria elíptica nos termos atuais. Cayley afirma que os pontos e as retas podem revestir também o significado dos objetos da geometria esférica tratando do modelo:

> *Na verdade, tratamos essas geometrias de maneira absolutamente geral. Em particular – e eu destaco o caso, porque eu vou ter novamente a oportunidade de me referir a ele – nós incluímos na geometria de duas dimensões a geometria esférica; as palavras plano, ponto e linha, significando para este propósito, superfície esférica, arco (de um grande círculo) e ponto (isto é, par de pontos opostos) da superfície esférica. E, da mesma forma, a geometria de uma dimensão inclui os casos de pontos em um arco e de arcos através de um ponto.*[29]

Esta reflexão de Cayley é, a nosso ver, essencial, pois, como constataremos, ela norteia tudo o encaminhamento da sexta memória. De fato, ao abordar a determinação de uma métrica na reta e no plano projetivo, pensamos que Cayley tem em mente a representação da geometria esférica. Veremos alguns aspectos da reflexão de Cayley que mostram isso claramente. Depois de ter analisado em cada etapa, os cálculos de Cayley, adotaremos uma representação da reta projetiva por um círculo, centrado na origem do referencial, onde os pontos diametralmente opostos representam um único ponto, assim como, em duas dimensões, a representação do plano projetivo por uma esfera onde os pontos antípodas representam o mesmo ponto, para mostrar o quanto a visão de Cayley é tributária deste modelo.

Assim a equação da reta projetiva é: $x^2 + y^2=1$, com $y>0$, acrescida do ponto de coordenada (1,0). A equação do plano projetivo é representada pela semiesfera de equação $x^2 + y^2 + z^2=1$, com $y>0$, acrescida do círculo de equação, $x^2 + y^2=1$, os pontos diametralmente opostos do equador representando um único ponto. A razão desta escolha será justificada mais adianta pelos próprios cálculos de Cayley. Aliás, é esta representação que ele estuda no final da sexta memória[30] tornando esta representação como exemplar, e genérica do problema.

Definição de métrica na reta projetiva

Cayley considera a equação $ax^2 + 2bxy + cy^2=0$, que representa dois pontos I e J. Sendo dois pontos A e B da reta projetiva, em involução com I e J, Cayley afirma que as raízes da equação:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + (lx + my)^2=0,$$

determinam um outro par de pontos $X(x,y)$ e $X''(x'',y'')$, em involução com os dois outros pares (I,J) e (A,B), a involução deixando fixos os pontos A e B, e enviando I em J, e J em I. O ponto B pode ser definido pela equação $lx+my=0$ o segundo ponto fixo A é deduzido pelo fato que os pares (I,J) e (A,B) formam uma divisão harmônica. Denotamo's as coordenadas seguindo a notação de Cayley, para dar conta do raciocínio de Cayley a partir do texto original, apesar de não utilizar toda a sua simbologia.

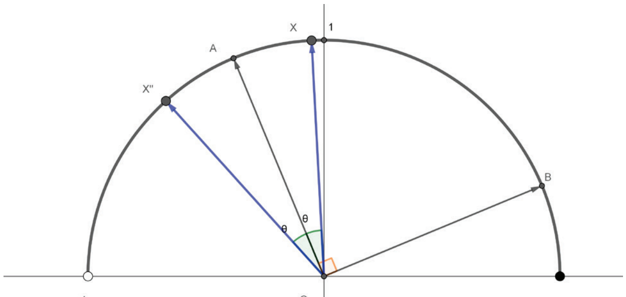

Figura 1 – Modelo da reta projetiva

Na realidade, Cayley poderia utilizar uma representação mais simples de uma forma quadrática, já que sabia que Sylvester (no teorema da inércia) tinha mostrado em 1852 que, para qualquer forma quadrática, existe um referencial em que, a forma quadrática se exprime como soma ou diferença de quadrados[31]. Por isso, no caso em que os pontos I e J são imaginários, a equação $ax^2+2bxy+cy^2=0$ pode, através de uma mudança de variável, se a forma quadrática é definida positiva, se tornar a equação $x^2+y^2=0$, os pontos I e J sendo os pontos cíclicos. Neste caso, os pontos

A e B são tais que o produto escalar $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=0$, e, portanto, são conjugados.

Considerando um ponto qualquer B do semicírculo, A (x', y') é determinado e o ângulo AOB é reto.

Cayley prossegue:

Podemos, se quisermos, sendo (x',y') e θ constantes, exibir a equação do par de pontos inscritos na forma:

$$(ax^2+2bxy+cy^2)(ax'^2+2bx'y'=cy'^2)sen^2\,\theta -$$

$$-(ac-b^2)(xy'-x'y')^2=0,$$

Onde temos por eixo de inscrição e centro de inscrição respectivamente, as equações:

$$xy'-x'y=0$$

$$axx'+b(xy'+x'y)+cyy'=0$$

ou, na forma equivalente,

$$(ax^2+2bxy+cy^2)(ax'^2+2bx'y'=cy'^2)cos^2\,\theta -$$
$$-[axx'+b(xy'+x'y)+cyy']^2=0,$$

Onde, temos para o eixo da inscrição e o centro de inscrição respectivamente, as equações:

$$axx'+b(xy'+x'y)+cyy'=0$$
$$xy'-x'y=0.$$[32]

Cayley considera o ponto de coordenadas $A\ (x',\, y')$ fixado. Podemos observar que aparecem, nas equações, os parâmetros $sen\,\theta$ e $cos\,\theta$, que indicam que as raízes da equação quadrática $ax^2+2bxy+cy=0$ são imaginárias. Com efeito, se Q é uma forma quadrática definida positiva, e P a forma bilinear associada, a razão $\frac{[P(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX})]^2}{Q(\overrightarrow{OA})Q(\overrightarrow{OX})}$ é menor que 1, e se anula para $X=B$. Essa é uma consequência da relação de Cauchy-Schwarz:

$$[P(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX})]^2 \leq Q(\overrightarrow{OA})Q(\overrightarrow{OX}).$$

Assim, podemos escolher o parâmetro θ , tal que $cos^2\,\theta = \frac{[P(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX})]^2}{Q(\overrightarrow{OA})Q(\overrightarrow{OX})}$. Por isso, pensamos que o quadro do raciocínio de Cayley se situa, intuitivamente, num modelo de geometria que Felix Klein irá chamar de geometria elíptica.

O ponto conjugado de X, o ponto X'', verifica, também, $cos^2\,\theta = \frac{[P(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX''})]^2}{Q(\overrightarrow{OA})Q(\overrightarrow{OX''})}$, ou seja os ângulos AOX'' e XOA são iguais.

Cayley[33] justifica as duas expressões (com os parâmetros $sen\,\theta$ e $cos\,\theta$) pela chamada identidade de Lagrange, que podemos hoje escrever em dimensão dois:

$$Q(\overrightarrow{OA})Q(\overrightarrow{OX}) = [P(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OX})]^2 + \det Q\ \det{}^2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}).$$

No artigo 168 da Memória, ele considera o que chamamos hoje de determinante de Gram, constituído pelos produtos escalares dois a dois dos três vetores $X(x,y)$, $X'(x',y')$, $X''(x'',y'')$ que são no plano $z=0$. Sendo coplanares, o determinante de Gram desses vetores é nulo, e no modelo que Cayley tem em vista, se chamarmos os ângulos a,b,c, os ângulos respectivos $X''OX'$, $X'OX''$, $X)X''$, considerando as medidas de a e b menores do que c, o determinante de Gram é:

$$D = 0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos c \\ \cos\ a & 1 & \cos b \\ \cos\ c & \cos b & 1 \end{vmatrix} = 1 - cos^2 a - \cos a\,(\cos b \cos c) + \cos c\,(cos\ acosb - \cos c),$$

ou seja:

$$[cos(b\text{-}a) - cos\ c\text{-}cos(a+b)]=0$$

O primeiro termo sendo diferente de zero $(b-a<c)$, temos $c=a+b$, relação que caracteriza a distância sobre a reta. Cayley não realiza o cálculo, e dá apenas o resultado.

Para definir a métrica sobre a reta projetiva, Cayley chama a forma quadrática Q de Absoluto. A interseção desta cônica com a reta determina dois pontos I e J, e dado dois pontos A e B conjugados com I e J, Cayley define assim a distância entre o ponto A e X como sendo: $\theta = arccos \frac{P(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OX})}{\sqrt{Q(\overrightarrow{OA})Q(\overrightarrow{OX})}}$.

Observa também que, com essa definição, que o ângulo é zero quando $X=A$, e o ângulo maximal é $\frac{\pi}{2}$.

Todas essas considerações de Cayley dizem respeito a uma forma quadrática definida positiva escolhida como absoluta. Se $Q(X)=x^2+y^2$, obtemos a métrica do semicírculo considerado acima.

O caso limite

No artigo, Cayley aborda o caso de uma forma quadrática degenerada que, portanto, é representada por um ponto duplo P. Ele afirma: "Qualquer par de pontos pode ser considerado como um círculo cujo centro é o harmônico do ponto duplo em relação ao par considerado"[34]. Se enviarmos P ao infinito, o centro será o ponto médio do segmento definido pelo par de pontos, e a métrica da reta, a métrica euclidiana. Mas antes de chegar a este resultado, Cayley observa:

> *A respeito da expressão analítica, no caso em questão, $ac-b^2$ desvanece, ou a distância é dada como o arco de um seno que desvanece. Reduzindo o arco ao seu seno e omitindo o fator evanescente, temos uma expressão finita para a distância. Suponha que o Absoluto seja $(qx-py)^2=0$ ou, o que é a mesma coisa, seja o Absoluto (tratado como um único ponto), o ponto (p,q), então encontramos para a distância entre os pontos (x,y) e (x',y'), a expressão:* $\frac{xy'-x'y}{(qx-py)(qx'-py')}$.[35]

"Omitindo", "desvanece", essas expressões mostram que a fórmula obtida é o resultado de um cálculo de limite. Antes de estudar a passagem ao limite que falta no texto de Cayley, observamos que se o ponto (p,q) for $(1,0)$ obtemos a métrica euclidiana, já que o resultado obtido por Cayley se reduz a $\frac{xy'-x'y}{yy'} = \frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}$. Considerando como mapa afim da reta projetiva a reta de equação $y=1$, essa fórmula da distância é a euclidiana.

Para estudar o caso limite, consideramos a forma quadrática definida positiva, (o que Cayley faz no caso geral) de equação $\varepsilon^2x^2+y^2=0$ que representa um par de pontos imaginários, pois é possível transforma-la na forma fatorada: $(\varepsilon x-iy)(\varepsilon x+iy)=0$. No caso limite, $\varepsilon=0$ a forma quadrática se torna $y^2=0.$ O ponto duplo é o ponto ao infinito da reta projetiva. Neste caso, a distância é dada pela fórmula: $sen^2\theta \approx \theta^2 = \varepsilon^2 \frac{(xy'-x'y)^2}{(\varepsilon x^2+y^2)(\varepsilon x'^2+y'^2)}$.

Cayley deve supor que as variáveis θ e ε tendem a zero, de tal modo que a razão $\frac{\theta}{\varepsilon}$ tem um limite finito, limite que se torna a distância no caso $\varepsilon=0$. Sob essas hipóteses, a distância entre os dois pontos é:

$$d = \lim_{\theta,\varepsilon\to 0} \frac{\theta}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{xy'-x'y}{\sqrt{(\varepsilon x^2+y^2)(\varepsilon x'^2+y'^2)}} = \frac{xy'-x'y}{yy'}.$$

Encontramos a distância euclidiana: se a reta projetiva é representada pela equação da reta afim $y=1$, com o seu ponto ao infinito $(1,0)$, obtemos para dois pontos da reta afim $(x,1)$ e $(x',1)$, com $x<x'$, a distância $x'-x$.

Definição de métrica no plano projetivo

Na sexta memória, após fazer a abordagem para a geometria de uma dimensão, Cayley apresenta a seção de título *On Geometry of Two Dimensions*, na qual pretende desenvolver a geometria do plano. No plano projetivo, a teoria é mais geral, pois a teoria da dualidade deve ser leva em conta.

Toda a introdução desta seção é uma exposição das diferentes propriedades geométricas de incidência entre pontos e retas, via coordenadas homogêneas. Cayley define as condições de alinhamento de três pontos, a concorrência de três retas, através de determinantes, enfatizando as propriedades de dualidade, em relação a uma forma quadrática, que se traduzem em termos de simetrias nas equações entre polos e as suas retas polares respectivas. A exposição de Cayley não é original, pois todos esses resultados já se encontram em Plücker.

Em seguida, Cayley aborda as equações de feixe de cônicas. Cayley apresenta sua notação para ponto, reta e cônica, além de expor as principais propriedades geométricas[36]. Para tornar a exposição mais clara, resumimos em termos matriciais os cálculos de Cayley.

O aspecto original da memória inicia-se pela consideração de um feixe de cônicas gerado por uma cônica C dada de equação $Q(X)=0$(Cayley escolha uma forma quadrática Q imaginária[37]), e uma reta de equação $R(X)=0$ que ele escreve como:

$Q(X)+ \lambda R(X)^2=0.$[38]

As cônicas degeneradas deste feixe são determinadas por Cayley, considerando a equação, dada em λ de $detM_0=0$ chamando M_0, a matriz associada a uma cônica do feixe. Como se trata de uma equação do terceiro grau, há uma raiz real α, que corresponde a um ponto A, e duas raízes complexas conjugadas β e γ, que correspondem a dois pontos imaginários I e J. A reta IJ corta a cônica em I e J e seu polo é o ponto A, o que explica que se trata de um feixe bitangente em I e J. As cônicas degeneradas são a reta dupla IJ, e o par de retas AI e AJ. Cayley chama o ponto $A(x',y',z')$ de centro de inscrição e a reta IJ de eixo de inscrição.

Logo após, Cayley observa que podemos obter o resultado dual considerando as equações tangenciais de da cônica C e do ponto P.

Se chamarmos Q a forma quadrática associada à cônica C, e P a sua forma bilinear associada, a equação da polar do ponto A é:

$P[(x',y',z'),(x,y,z)]=0$[39]

Como Cayley[40] considera o efeito da dualidade, sabemos que se chamamos M a matriz da forma Q associada à cônica C, e o seu determinante det M=K, a matriz da forma dual Q^* é M^{-1}.

Tomando um parâmetro θ, a equação da "cônica inscrita", como a chama Cayley, é, na nossa notação:

$Q(x',y',z')Q(x,y,z)cos^2\theta - (P[(x',y',z'),(x,y,z)])^2=0.$

Ou ainda:

$Q(x',y',z')Q(x,y,z)sen^2\theta - KQ^*[(x',y',z')\wedge(x,y,z)]=0.$

Para justificar essas duas equações, Cayley invoca a identidade seguinte:

$Q(x',y',z')Q(x,y,z) - (P[(x',y',z'),(x,y,z)])^2=KQ^*[(x',y',z')\wedge(x,y,z)].$

Essa identidade é baseada sobre duas propriedades das formas quadrática. A primeira é que para uma forma quadrática Q, temos:

$KQ[(x',y',z')\wedge(x,y,z)]= Q(x',y',z')Q(x,y,z) - (P[(x',y',z'),(x,y,z)])^2.$

A segunda propriedade é o fato que o produto vetorial $(x',y',z') \wedge (x,y,z)$ pode ser considerado um vetor do espaço ou um elemento do dual, então vale a igualdade:

$Q[(x',y',z') \wedge (x,y,z)] = Q^*(x',y',z') \wedge (x,y,z)]$.

Essas duas propriedades explicam a fórmula geral de Cayley.

Cayley chama "cônica inscrita" aquela de equação, para θ fixado, dada por:

$Q(x',y',z')Q(x,y,z)cos^2\theta - (P[(x',y',z'),(x,y,z)])^2=0$.

Por ser uma cônica pertencendo ao feixe de cônicas gerado por C e A. Com efeito, essa cônica passa por I e J.

Podemos agora explicar porque pensamos que Cayley escolhe uma forma quadrática imaginária. Certamente, no caso geral que ele estuda, isto é, uma cônica de equação:

$Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+Gxz+Hy$.

a razão dada por:

$$\frac{\{x(\mathrm{A}x_1+\mathrm{F}y_1+\mathrm{G}z_1)+y(\mathrm{F}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{H}z_1)+z(Gx_1+\mathrm{H}y_1+\mathrm{C}z_1)\}^2}{(Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+Gxz+Hyz)(Ax_1{}^2+By_1{}^2+Cz_1{}^2+Fx_1y_1+Gx_1z_1+Hy_1z_1)},$$

deve estar entre 0 e 1, afim de escolher como parâmetro $cos^2\theta$, o que acontece quando a forma quadrática é anisotrópica e definida positiva (teorema de Cauchy-Scwarz). Se Cayley escolhesse uma forma quadrática não imaginária, logo real, a razão acima considerada seria maior do que um, e o parâmetro a ser considerado para o pequeno círculo seria $ch^2\theta$.

Considerando a cônica associada à forma Q a "cônica absoluta", Cayley chega a duas expressões da distância entre dois pontos de coordenadas $A(x',y',z')$ e $A(x,y,z)$:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{P[(x',y',z'),(x,y,z)]}{\sqrt{Q(x',y',z')Q(x,y,z)}}, e \;\; \theta = sen^{-1}\frac{\sqrt{KQ^*[(x',y',z') \wedge (x,y,z)]}}{\sqrt{Q(x',y',z')Q(x,y,z)}} .$$

Cayley dá também as expressões correspondentes do ângulo entre duas retas, assim como a distância de um ponto a uma reta.

O caso limite

Cayley considera o caso em que a cônica degenera em dois pontos I(p,q,r) e J(p_0,q_0,r_0). Neste caso o determinante K da forma anula-se, e Cayley como no caso da distância sobre a reta, passa ao limite implicitamente, assimilando o seno

$$d = \frac{\sqrt{Q^*[(x',y',z') \wedge (x,y,z)]}}{\sqrt{Q(x',y',z')Q(x,y,z)}}.$$

De fato, para chegar a este resultado devemos supor que a razão $\frac{\theta}{\sqrt{K}}$ possui um limite finito quando θ e K tendem a zero.

Para ilustrar este fato, Cayley considera o caso da cônica degenerada nos dois pontos cíclicos pontos I$(1,i,0)$ e J $(1, (1,i,0)\ i,0)$. A equação tangencial da cônica se torna: $x^2+y^2=0$ a equação da cônica absoluta sendo $z^2=0$. O mapa afim é, neste caso, o plano de equação $z=1$, a expressão da distância sendo:

$$d = \frac{\sqrt{(yz'-y'z)^2+(xz'-x'z)^2}}{zz'}.$$

Com $z=1=z'=1$, temos a expressão habitual da distância euclidiana.

A seguir, Cayley[41] aborda o caso onde cônica absoluta é a de equação:

$x^2+y^2+z^2=0$

que representa para ele um caso emblemático. Como já mencionamos, Cayley poderia ter observado que qualquer forma quadrática real, por via de mudança de variáveis no referencial dos autovetores, poderia ser expressa como soma algébrica de quadrados (teorema da inércia, demonstrado por Sylvester em1852).

No caso da cônica imaginária de equação $x^2+y^2+z^2=0$, o plano projetivo pode ser representado por uma semiesfera centrada na origem e de raio um, com as condições $z\geq 0$ e $x^2+y^2+z^2=1$. Conforme a figura 2.

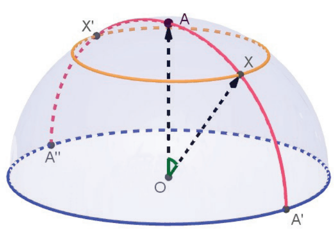

Figura 2 – Modelo da geometria esférica

Consideramos $A(x_1,y_1,z_1)$ e sua polar, que é o círculo interseção do plano P de equação $xx_1+yy_1+zz_1=0$ e da semiesfera. Este círculo passando pelos pontos cíclicos I e J que são a interseção deste plano real P com a cônica imaginária.

Cayley considera o pequeno círculo de centro $A(x',y',z')$ e de certo raio r fixado na semiesfera. Considerando qualquer grande círculo passando por A, que corta este pequeno círculo em dois pontos X e X' e a polar de A em A', os pontos $AA'XX'$ estão em involução, e X e X' estão a igual distância de A. Esta distância é medida pelo ângulo θ que AO faz com OX. A equação do pequeno círculo se escreve, segundo Cayley:

$$\cos^2\theta - (x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2) - (xx_1+yy_1+zz_1)^2 = 0.$$

Então, a distância entre os dois pontos é:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}}.$$

Cayley observa que a diferença essencial entre geometria esférica e geometria euclidiana é que, no caso da geometria esférica, a cônica absoluta é não degenerada, o que possibilita uma dualidade total de todos os teoremas. Com efeito, a dualidade do plano euclidiano se torna completa unicamente levando em conta os pontos ao infinito.

Deste resultado, ele chega à conclusão mais importante dessa memória: "A geometria métrica é, portanto, uma parte da geometria descritiva, e a geometria descritiva é toda a geometria, [...]"[42]. A "geometria métrica" trata-se da geometria euclidiana e "geometria descritiva" da geometria projetiva, ou seja, Cayley conclui que a geometria mais elementar é a projetiva, o que quebrava o paradigma da geometria euclidiana ser a mais fundamental, de onde inclusive se fundamentava a geometria projetiva até então.

O artigo de 1871 de Felix Klein

A estadia de Felix Klein em Paris

No primeiro semestre 1870, Felix Klein e Sophus Lie se encontram em Paris. Rowe[43] destaca que por este período eles se familiarizaram com os trabalhos de matemáticos franceses, tais como Michel Chasles, Camille Jordan e Gaston Darboux. Neste período Jordan havia recentemente publicado seu *Traité des substitutions et des équations algébriques*.

Darboux desempenhou um papel importante na vivência de Klein e Lie com a matemática francesa. Estes trabalham num mesmo tema, nomeado a teoria das curvas-*W*, publicado nos *Comptes rendus* da academia de Paris. Em julho, a guerra interrompe a permanência destes matemáticos na França, forçando Klein a retornar a Alemanha. Deste período na França, Rowe destaca o fato que Lie e Klein leram sobre teoria dos grupos presente no tratado de Jordan, Lie se dedicando ao estudo dos grupos contínuos e Klein aos descontínuos. "Klein estava certamente ciente das aplicações da teoria dos grupos feitas por Jordan à geometria bem antes de sua chegada a Paris, e não há razão para acreditar que ele ou Lie realmente estudaram o *Traité* de Jordan, aquele "livro com sete selos", em detalhes."[44]

Hawkins afirma que o conceito de grupo foi fundamental nos trabalhos de Klein no início de 1871, e fica nítida a influência do trabalho de Jordan sobre a noção de grupo presente em Klein. Segundo Hawkins, "eles estavam plenamente conscientes de que o que estavam fazendo era análogo à teoria das substituições e equações algébricas (teoria de Galois), para as quais a referência padrão era a obra *Traité des substitutions* de Jordan [1870], uma obra a que se referiam [1871: 233n.I], e que parece ter impressionado Klein".[45]

Realmente, quando Klein trata de grupo das transformações em seu artigo de 1871, ele o faz seguindo uma abordagem muito próxima a de Jordan. Por exemplo, a classificação destes grupos no texto de Klein de 1871 segue muito próxima aquela de Jordan, como veremos a seguir.

O trabalho de Klein

Klein expõe suas considerações acerca da classificação das geometrias não euclidianas num artigo, *Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie* ("Sobre as chamadas geometrias não euclidianas"), publicado no *Mathematische Annalen* de Göttingen, em 30 de agosto de 1871[46].

Klein aborda o problema numa perspectiva diferente da de Cayley. Enquanto Cayley estudava apenas aspectos analíticos ligados à teoria das formas quadráticas no quadro das coordenadas homogêneas, Klein realiza uma síntese dos trabalhos de Gauss, *Lobatchevski*, Bolyai que deram uma axiomática das geometrias não euclidianas (o termo é de Gauss) e dos trabalhos de Riemann (1867), Helmholtz, Beltrami (1868-1869). Dez anos após a memória de Cayley, a questão da interpretação das geometrias não euclidianas está em parte resolvida pelos artigos de Beltrami que fornecem os primeiros modelos da geometria que Klein chama de hiperbólica. O propósito de Klein consiste em mostrar como se pode construir modelos das diferentes geometrias a partir de um modelo analítico da geometria projetiva. Klein encontra um quadro que relaciona os trabalhos de autores já citados com a sexta memória de Cayley.

Numa nota de rodapé, Klein afirma ter lido a sexta memória de Cayley a partir de uma tradução de Fiedler. Otto Wilhelm Fiedler (1832-1912) graduou-se na de Escola Supeiror de Artes e Ofícios de Chemnitz em 1846-1849. No período de 1853-1864, dedicou-se a sua tese de doutorado em geometria, período sobre o qual se empenhou na leitura de diversos livros, estudando diversos matemáticos como: Michel Chasles, Gabriel Lamé, Jean Claude Barré de Saint-Venant, Jean-Victor Poncelet, Jakob Steiner, Julius Plücker, Karl von Staudt, George Salmon, Arthur Cayley, and James Joseph Sylvester. Nos seus estudos, trabalhou na tradução de algumas obras, dentre as quais destacamos neste artigo seus livros de 1860 e 1862 que tratam dos matemáticos ligados a Teoria dos Invariantes: Salmon, Cayley e Sylvester.

Os trabalhos de Fiedler, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit Besonderer Berücksichtigung der Neuren Methoden Von George Salmon* de 1860 e *Die Elenente der Neueren Geometrie und der álgebra der Binären Formen* de 1862, tratam de apresentar a teoria das formas algébricas praticadas pelos britânicos, que tinha um viés geométrico muito forte, relacionando teoria dos Invariantes com geometria projetiva.

Na obra de 1860, Fiedler[47], boa parte do conteúdo se trata de uma livre tradução do *Treatise on Conic Sections*, de George Salmon, de 1855. Por se tratar de uma livre tradução pode-se perceber que Fiedler acrescentou muitos outros aspectos à obra inicial de Salmon, incluindo observações acerca de outro livro de Salmon: *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra* de 1859. Já em seu trabalho de 1862, Fiedler[48] além de tratar da obra de Salmon, apresenta a tradução e comentários acerca dos resultados principais da sexta memória sobre os *quantics* de Cayley.

Mas Klein explica por que sua abordagem e mais geral que a de Cayley. Ele afirma:

Para Cayley, o objetivo é demonstrar que a geometria métrica usual (euclidiana) pode ser apresentada como um caso especial de geometria projetiva. Para este propósito ele estabelece a métrica projetiva geral e então mostra que de suas fórmulas procedem às fórmulas da geometria métrica usual, quando a superfície fundamental degenera em uma dada seção cônica, o círculo imaginário ao infinito. Em nosso estudo, pelo contrário, é uma questão de apresentar tão claramente quanto possível o conteúdo geométrico da métrica geral de Cayley e de reconhecer não somente como ela nos fornece uma particularização apropriadamente escolhida da geometria métrica euclidiana, mas também, e acima de tudo, que tem as mesmas relações com as várias geometrias métricas que derivam das várias teorias das paralelas[49].

Podemos observar que Klein restringe o quadro do estudo de Cayley, já que Cayley dá uma expressão da distância de um plano elíptico, mostrando que o caso da geometria euclidiana é o caso limite. Mas o objetivo de Klein é de fundamentar o conceito de distância de um modo diferente, conforme apresentaremos a seguir.

Definição da métrica sobre a reta projetiva

Klein apresenta a métrica para a reta projetiva já na primeira parte de seu texto: "Para determinar a distância de dois pontos, suponho que eles se ligam por uma reta. Esta corta a superfície fundamental em dois outros pontos que, com os dois pontos dados, formam certa razão anarmônica. O produto do logaritmo desta razão anarmônica por uma constante c, uma vez escolhida, é o que eu chamo de distância de pontos".[50]

O importante é como Felix Klein chega a tal definição. Depois de ter lembrado as propriedades elementares de distância sobre uma reta, procura todas as transformações projetivas (Klein as chama de transformações lineares) que podem deixar invariante uma distância entre dois pontos. Há dois tipos de tais transformações, segundo o número de pontos fixos. Estuda o primeiro caso em que uma transformação tem dois pontos fixos que ele chama de elementos fundamentais. Num mapa afim da reta projetiva, podemos escolher $z=0$ e $z=\infty$ como os dois elementos fundamentais. Para conseguir um referencial da reta, apenas precisa de outro ponto que ele nota z_1. A expressão analítica de tal transformação é logo $z'=\lambda z$. Assim, fixado o elemento z_1, consegue uma escala em partes iguais da reta: $z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1$, etc. O intervalo entre $z_1, \lambda z_1$, pode ser divido em n partes, o primeiro passo sendo $z_1, \lambda^{\frac{1}{n}} z_1$. Assim o p-ésimo passo sendo limitado por $\lambda^{\frac{p}{n}} z_1$. Enfim, considerando que um número real é limite de uma sequência de racionais, chega a relacionar qualquer ponto da reta z em relação à z_1, a certo número real α tal que, $z=\lambda^\alpha z_1$. A distância entre esses dois pontos é dado pelo número $\alpha = ln\frac{z}{z_1} / \lambda = ln\frac{z}{z_1}$. A constante c depende do elemento unidade escolhido z_1. Assim a expressão geral da distância entre dois pontos z e z' é $c \cdot log(z/z')$, a razão z/z' sendo a razão anarmônica dos pontos, $z, z', \infty, 0$.

219

Klein destaca que a expressão da distância respeita a relação fundamental, ou seja, tomando z, z' e z'', temos: $c \cdot log(z/z') = c \cdot log(z/z') + c \cdot log(z'/z'')$. Além da distância de um elemento à ele mesmo ser igual a zero: $c \cdot log(z/z) = 0$.

Klein mostra que a expressão da distância recobre aquela de Cayley. Para isto, ele considera que a expressão geral: $\Omega = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0\cdot$

Ele utiliza as coordenadas de dois pontos x_1, x_2 e y_1, y_2, e os seguintes simbolismos, para as substituições na expressão de Ω:

$$\Omega_{xx} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \quad , \quad \Omega_{yy} = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 \ , \quad \Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Exprime a razão anarmônica de dois pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) da maneira seguinte:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

e o logaritmo por:

$$c \cdot log \frac{\Omega_{xy}+\sqrt{\Omega_{xy}{}^2-\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy}-\sqrt{\Omega_{xy}{}^2-\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Utilizando a identidade:

$$c.\log a = 2ic.\arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}},$$

Klein encontra a expressão de Cayley, a menos da constante que deve ser substituída por $c = \frac{i}{2}$:

$$2ic.\arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Essa expressão geral da distância, segundo Klein, envolve dois casos, conforme os pontos fixos da transformação são ambos reais ou ambos imaginários. No primeiro caso, temos uma distância definida entre os dois pontos reais, (métrica hiperbólica), no segundo, uma métrica elíptica.

O caso da transformação onde o ponto fixo é duplo, que envolve a métrica euclidiana, é tratado por Klein do mesmo modo que Cayley, passando a expressão para o caso limite.

Métrica no plano projetivo

Klein, desta vez, apresenta a métrica no plano utilizando a escolha de uma cônica fundamental, a absoluta de Cayley. No caso de uma cônica não degenerada, toda reta encontra esta cônica em dois pontos reais ou imaginários, e a definição da distância segue, considerando sobra a reta, os dois pontos iguais, respectivamente, a escolher $z=0$ e $z=\infty$. Chega também, assim como Cayley, a uma expressão dual para a distância (ângulo) de duas retas. No caso onde a cônica fundamental é degenerada leva a geometria chamada parabólica, ou seja, a distância euclidiana.

Curvatura gaussiana

Um dos aspectos talvez mais interessantes do artigo de Klein é a relação entre a curvatura da superfície escolhida e a constante c da expressão, que é:

$$d(z,z')=c \cdot \log(z/z').$$

Mostra que a curvatura gaussiana da superfície é igual a

$$K=-1/4c^2.$$

Com esta perspectiva, Klein faz a síntese dos trabalhos de Cayley de um lado e, por outro lado, a memória de Riemann sobre os fundamentos da geometria, e os artigos de Beltrami. A compreensão da conexão entre geometria diferencial e as geometrias não euclidianas se torna completa.

A independência entre a geometria projetiva e a teoria das paralelas também fica clara. Klein acaba o seu artigo com uma observação importante: devido aos trabalhos de Von Staudt, o conceito de razão anarmônica é independente da teoria das paralelas. Assim, a geometria projetiva é a mãe das geometrias não euclidianas.

O artigo de Cayley de 1872

Cayley[51] inicia seu artigo *On the Non-Euclidean Geometry* de 1872 afirmando que a teoria referente às geometrias não euclidianas apresentada por Klein pode ser desenvolvida num sistema que permita medir distâncias e ângulos, estabelecendo assim uma trigonometria para cada geometria. Para tal, ele considera como absoluto uma cônica real, que ele toma ser um círculo para ilustrar seu método.

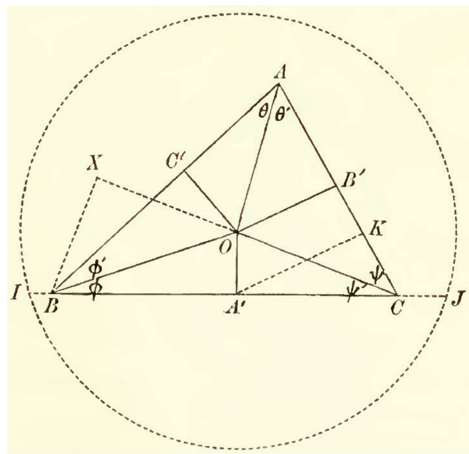

Figura 3 – Diagrama de Cayley[52]

Ele utiliza o caso do círculo de raio unitário, pois simplifica os resultados, uma vez que a distância de um ponto qualquer ao centro passa a ser o seno de um ângulo.

Para calcular a distância BC, ele utiliza o logaritmo da dupla razão dos quatro pontos: B, C, I e J, sendo I e J pontos de interseção com o círculo que é o absoluto. Logo, como ele chama a distância BC de $\bar{a}$, ficamos com a expressão:

$$\bar{a} = \frac{1}{2} log \frac{BI.CJ}{BJ.CI}.$$

Utilizando a identidade $\cosh \bar{a} = \frac{e^{\bar{a}}+e^{-\bar{a}}}{2}$, e as propriedades do logaritmo e da potenciação, ele encontra a expressão:

$$\cosh \bar{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BI.CJ+BJ.CI}{\sqrt{BI.BJ}\sqrt{CI.CJ}},$$

considerando OB e OC, sendo O centro do círculo, iguais a, respectivamente, $sen\ q$ e $sen\ r$, Cayley encontra que $BI.BJ=cos^2 q$ e $CI.CJ=cos^2 r$, e assim a relação da distância fica:

$$\cosh \bar{a} = \frac{cos^2 q + cos^2 r + a^2}{2.\cos q.\cos r}.$$

Cayley apresenta expressões para o ângulo na geometria hiperbólica, assim desenvolve as principais expressões para a trigonometria hiperbólica. Seu objetivo é mostrar que estas fórmulas são semelhantes àquelas da trigonometria esférica trocando apenas $cosh\ a$, $senh\ a$ pelos $cos\ a$ e $sen\ a$. Este artigo, apesar de ser posterior ao artigo de Klei de 1871, é anterior ao segundo artigo de Klein. Demonstra que Cayley, apesar de questionar o método de Klein por tomar como base a dupla razão para definir a distância, reconhece a importância do trabalho de Klein, contribuindo de forma efetiva para o estabelecimento da trigonometria hiperbólica. Além disso, mostra que Cayley conhecia a geometria hiperbólica de Lobatchevisky. A seguir, destacaremos a nota de Cayley a sexta memória, onde ele se posiciona em relação aos seus artigos e aos de Klein.

A nota explicativa sobre a sexta memória

A coletânea dos trabalhos de Cayley possui treze volumes, dentre os quais, podem-se destacar os sete primeiros volumes que foram organizados por ele próprio, incluindo valiosas notas explicativas no final desses volumes. Cayley morre no dia 26 de janeiro de 1895, a partir do oitavo volume A. R. Forsyth assume a organização dos demais volumes, seguindo a organização proposta por Cayley.

Nesta nota dedicada à sexta memória, Cayley destaca os seguintes artigos para o desenvolvimento da "teoria da distância", fundada por seu artigo: primeiro, o artigo de Klein de 1871, segundo um artigo próprio cujo título é: *On the Non-Euclidian Geometry* de 1872 e, terceiro, o artigo de 1873 de Klein[53].

Cayley apresenta a definição de Klein utilizando o logaritmo da razão anarmônica, que substitui o arco cosseno utilizado em sua sexta memória. Apesar de aceitar o fato que a definição de Klein é coerente com a relação fundamental da distância, Cayley coloca uma questão que demonstra que ele tem dificuldade em aceitar a idéia generalizada por Klein em relação à métrica adotada. Para Cayley, isto poderia cair numa contradição que dificultaria o trabalho com a dupla razão independente da métrica adotada. Cayley reconhece que Klein, em seu artigo de 1871, cita o trabalho de Staudt, *Geometrie der Lage*, que defende a independência da dupla razão de quatro pontos em relação a qualquer noção de distância.

Cayley encerra sua nota com a seguinte afirmação:

> *Nessa teoria [Geometria Não Euclidiana] parece que tentamos substituir a nossa noção comum de distância entre dois pontos pelo logaritmo de uma determinada razão anarmônica. Mas essa relação em si envolve a noção de distância medida na forma ordinária. Como então podemos substituir a velha noção de distância pela noção não euclidiana, na medida em que a própria definição da última envolve a antiga?*[54]

Como a nota foi escrita num período bem posterior a da sexta memória, pode-se concluir que Cayley não acreditava ser possível definir a dupla razão sem utilizar o conceito de distância, como era proposto no trabalho de Klein.

Este fato também se encontra destacada na biografia de Cayley, escrita por A. R. Forsyth, que foi acrescentada no início do oitavo volume das obras de Cayley. Segundo Forsyth[55], Cayley utiliza a noção de distância para definir a métrica adotada, logo a dupla razão não fica independente desta noção.

Mas Cayley pretende mostrar a generalidade do seu ponto de vista: Cayley, em seu artigo de 1872, mostra que a partir da escolha do absoluto no caso hiperbólico ele pode encontrar também uma fórmula para a distância completando assim a definição das três métricas sem utilizar a dupla razão.

Klein defende a sua posição 1873: segundo uma memória de Von Staudt que chegou a uma definição da dupla razão sem recorrer à noção de distância. Sabemos que sobre este ponto, Cayley estava errada, e que Klein tinha a posição certa.

O que ficou na historiografia é que a teoria de Klein envolve conceitos que vão se tornar básicos (*Erlanger Programm*), mas a perspectiva de Cayley permitia também definir as três geometrias com a projetiva.

Considerações finais

Cayley, ao escrever suas memórias sobre os *Quantics,* tinha em mente muito mais do que apenas a parte algébrica da teoria dos invariantes, ele já relacionava cada conceito ao seu respectivo caráter geométrico. E nas quinta e sexta memórias, ele desenvolve explicitamente a relação entre álgebra e geometria que são fundamentais para o estabelecimento da sua teoria das métricas, que culmina com a definição da distância, a partir da cônica absoluta. Na sexta memória, ele apresenta a métrica projetiva, euclidiana e elíptica. Seu método nos mostra que ele poderia muito bem desenvolver a métrica hiperbólica, o que fez em 1872.

Cayley possui um método próprio, que parte da definição de coordenadas e uso da dupla razão. Logo, seu trabalho é inaugural ao definir uma métrica de forma mais geral, partindo do caso projetivo e levando a outras geometrias, como a euclidiana. Fato este que leva Cayley a considerar a geometria projetiva a mais "elementar" da qual se pode chegar as demais geometrias. Ele é o primeiro a perceber este fato.

Destacamos também que Cayley escreveu uma nota a sexta memória, onde distingui bem sua abordagem daquela de Klein, colocando sua contribuição para o tema, incluindo seu artigo de 1872 que ficou praticamente desconhecido pela historiografia da matemática. Este fato pode ter ocorrido devida a popularidade dos desenvolvimentos de Klein.

Destaca-se também o papel de Fiedler como divulgador dos trabalhos dos ingleses Salmon, Cayley e Sylverster. Klein toma conhecimento destes por meio das traduções de Fiedler, inclusive, foi por meio da tradução de 1862, que ele tomou conhecimento da sexta memória.

O artigo de 1872 de Cayley nos indica que ele, além de saber a teoria de Lobatchevski, aplicou sua abordagem para a geometria hiperbólica. Isto contradiz as afirmações de alguns historiadores sobre a obra de Cayley que já temos comentado neste artigo.

Cayley foi fundamental para o desenvolvimento a teoria das distâncias, possuindo um método próprio e distinto do de Klein. O que hoje chamamos de métrica de Cayley-Klein na verdade é a abordagem divulgada por Klein, pois a teoria nos termos de Cayley não teve a mesma divulgação. Apesar de sempre ser creditado à Cayley um papel relevante neste desenvolvimento, pensamos ter mostrado que seus desenvolvimentos não foram bem divulgados.

A quinta e a sexta memória sobre os *quantics* e o artigo de 1872 de Cayley constituem um material importantíssimo no que diz respeito às métricas não euclidianas. Além disso, Cayley possui um papel pioneiro neste tema, apresentando uma bela abordagem que une teoria dos invariantes e métricas nas diversas geometrias.

Notas e referências bibliográficas

Leandro Silva Dias é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, campus Volta Redonda. E-mail: leandro.dias@ifrj.edu.br

Gérard Émile Grimberg é professor adjunto do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. E-mail: gerard.emile@terra.com.br

1 KLEIN, F. Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, v. 4, n. 4, p. 573-625, 1871 e v. 6, n. 2, p. 112-145, 1873. Traduções: KLEIN, F. Sur la géométrie dite non euclidienne. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 2, 1871. (Resumo do artigo). KLEIN, F; LAUGEL, L. Sur la géométrie dite non euclidienne. In: *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES, 1897. p. G1-G62.

2 SOMMERVILLE, D. M. Y. Classification of geometries with projective metric. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 28, p. 25-41, 1909; SOMMERVILLE, D. M. Y. Metrical coordinates in non-Euclidean geometry. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, v. 3, n. 1, p. 16-25, 1932.

3 PIERPONT, J. Cayley's definition of non-euclidean geometry. *American Journal of Mathematics*, v. 53, n. 1, 1931, p. 117.

4 PIERPONT, J. Non-euclidean geometry, a retrospect. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 36, n. 2, 1930, p. 68.

5 ROSENFELD, B. A. *A History of Non-Euclidean Geometry Evolution of The Concept of a Geometry Space.* New York: Springer-Verlag, 1988, p. 236.

6 LOBATCHEVSKI, N. *Géométrie imaginaire*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, v. 17, p. 295-320, 1837.

7 Idem, p. 299.

8 CAYLEY, A. Note on Lobatchevski's Imaginary Geometry, 1865. In: CAYLEY, A. The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley. Cambridge: At The University Press, v. 5, 1889. p. 472. (tradução nossa)

9 YAGLOM, I. M. *Felix Klein and Sophus Lie Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*. Boston: Birkhäuser, 1988, p. 65.

10 SHENITZER, A. The cinderella career of projective geometry. *The mathematical intelligencer*, v. 13, n. 2, 1991, p. 53.

11 VOELKE, J.-D. *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900.* [S.l.]: Peter Lang, 2005.

12 CRILLY, T. *Arthur Cayley: Mathematician laureate of the Victorian age*. Johns Hopkins University Press, 2005.

13 GRAY, J. *Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th century*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011, p. 225.

14 A'CAMPO, N.; PAPADOPOULOS, A. On Klein's So-called Non-Euclidean geometry. *arXiv preprint arXiv:1406.7309*, 2014.

15 KLEIN, F. *Development of Mathematics in The 19th Century*. Tradução de M. Ackerman. Massachusetts: Math Sci Press, 1979. 630 p.

16 CAYLEY, A. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 604.

17 DE MORGAN, A. On the General Equation of Curves of Second Degree. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 4, p. 71-78, 1833.

18 BOOLE, G. Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part I. *The Cambridge Mathematical Journal*, v. 3, n. 13, p. 1-20, 1841c.

19 CRILLY, T. The Rise of Cayley's Invariant Theory (1841 – 1862). *Historia Mathematica*, v. 13, 1986, p. 242.

20 Dias, L. S.; Grimberg, G. E. Álgebra e geometria projetiva analítica na Inglaterra dos anos 1841-1853. Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, v. 38, n. 81, 2015, p. 11–31.

21 CAYLEY, A. A Fourth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1858a. In: CAYLEY, A. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 513-526. p. 326.

22 CAYLEY, A. A Fifth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1858b. In: CAYLEY, A. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 527.

23 Cayley colabora no estabelecimento destes conceitos. Maiores detalhes em: Voelke (2005), Crilly (2006) e Gray (2011).

24 CAYLEY, A. A Sixth Memoir upon Quantics, 1859. In: CAYLEY, A. The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 561.

25 As três partes: *On Geometry of One Dimension, On Geometry of Two Dimensions* e *On the Theory of Distance* são subtítulos utilizados por Cayley no corpo do texto da Sexta Memória, o uso das outras duas partes (introdução e conclusão) tem a finalidade de esclarecer a organização desta memória, mas não são subtítulos do texto original.

26 CAYLEY, op. cit., 1859, p. 561.

27 Idem, p. 562.

28 Idem, p. 562.

29 Idem, p. 562.

30 Idem, p. 591.

31 SYLVESTER, J. J. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 4, n. 23, 1852, p. 138.

32 CAYLEY, op. cit., 1859, p. 569.

33 Idem, p. 569. (art. 167)

34 Idem, p. 585.

35 Idem, p. 585.

36 Idem, p. 570. Cayley representa da seguinte maneira $(* \between x,y,\ldots)^m$ uma *quantic* cujos coeficientes não são valores fixados, ou seja, o "*" significa a forma mais geral de se representar a *quantic*, pois não determina os coeficientes da mesma. Já quando ele escreve $(a,b,c \between x,y)^2$, temos que os coeficientes já estão determinados e a *quantic* é, em termos atuais, da seguinte forma: $ax^2+bxy+cy^2$. Ele utiliza a seguinte notação: $x,y,z=a,b,c$, para representar o ponto (a,b,c); e $(* \between x,y,z)^2=0$ ou $Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+Gxz+Hyz$ para representar uma cônica.

37 Cayley chama a equação de C de U=0, utilizando a notação $(a,b,c,f,g,h \between x,y,z)^2$.

38 Idem, p. 581.

39 Idem, p. 581. (art. 205)

40 Idem, p. 577.

41 Idem, p. 590. (art. 225)

42 Idem, p. 592.

43 ROWE, D. E. The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Klein. In: *Ideas and their Reception*. Academic Press, 1989, p. 210.

44 Idem, p. 211.

45 HAWKINS, T. Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups. In: *Ideas and their Reception*. Academic Press, 1989, p. 287.

46 KLEIN, op. cit., 1871.

47 SALMON, G.; FIEDLER, W. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit Besonderer Berücksichtigung der Neuren Methoden Von George Salmon*. Teubner, 1860.

48 FIEDLER, W. *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*. Teubner, 1862.

49 KLEIN, op. cit., 1871, p. 575.

50 Idem, p. 574.

51 CAYLEY, op. cit., 1872, p. 409.

52 Esta figura foi retirada do texto de Cayley (1872, p. 409).

53 KLEIN, F. Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, v. 6, n. 2, p. 112-145, 1873.

54 CAYLEY, A. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, v. 2, 1889. p. 606.

55 FORSYTH, A. R. Arthur Cayley, 1895. p. ix - xliv. In: CAYLEY, A. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, v. 8, 1895, p. xxxvi.

[Artigo recebido em Agosto de 2019. Aceito para publicação em Dezembro de 2019)]