

# A primeira teoria matemática da propagação elétrica: uma leitura estendida do artigo “Sobre a teoria do telégrafo elétrico”, de William Thomson

DANNY AUGUSTO VIEIRA TONIDANDEL

Universidade Federal de Ouro Preto | UFOP

WALLACE DO COUTRO BOAVENTURA

Universidade Federal de Minas Gerais | UFMG

ANTÔNIO EMÍLIO ANGUETH DE ARAÚJO

Universidade Federal de Minas Gerais | UFMG

**RESUMO** Este trabalho tem como focos principais um evento singular ocorrido em meados do século XIX – o lançamento do primeiro cabo para comunicações (elétricas) intercontinentais, o grande “cabo transatlântico” – e um artigo igualmente singular, em que a primeira teoria matematicamente consistente que visava “explicar” como a eletricidade poderia ser transmitida por um condutor foi elaborada por William Thomson (futuro Lorde Kelvin), intitulado “On the theory of the electric telegraph” [Sobre a teoria do telégrafo elétrico], de 1854. Nele foi apresentada uma analogia na qual considerava-se a eletricidade como um fluido que se difundia através do cabo, a exemplo do que havia feito Fourier, anos antes, no problema da condução de calor. Como forma de investigar mais a fundo as relações e analogias entre a formação dos conceitos de eletricidade e calor, apresenta-se uma tradução detalhadamente comentada do referido artigo, que os autores acreditam ter sido um dos motores da grande revolução tecnológica que seria vista no século seguinte.

**Palavras-chave** história da física – história da engenharia elétrica – William Thomson.

267

## Introdução

Criar modelos daquilo que acredita perceber é a forma que o ser humano se utiliza para suprir sentidos que não possui. Ainda que perceba a existência de determinado objeto ou fenômeno, a capacidade de enxergar sua realidade íntima estará, possivelmente, relegada a um futuro infinitamente distante. Um modelo, se entendido como uma projeção de um domínio sobre o outro, tal qual a sombra que entretém o morador da caverna na famosa alegoria de Platão,<sup>1</sup> é algo que reduz de alguma maneira a dimensão da entidade sob a lupa, fazendo com que parte da informação seja para sempre perdida.<sup>2</sup>

Por ser obtido a partir de um processo bem definido, como a dinâmica de uma partícula ou pela vibração da corda em um instrumento musical, um modelo (mecânico, pictórico ou matemático) fornecerá um contexto no qual determinada

teoria pode ser testada. Caso se considere, por exemplo, alguns dos modelos científicos do século dezanove, que não pretendiam ser, necessariamente, descrições *ipsis literis* da realidade, é possível perceber que a intenção de tornar as teorias, além de compreensíveis e verificáveis, utilizáveis na prática. Isto foi feito utilizando o conceito de analogia física.

A característica essencial de uma analogia física é, justamente, uma identidade estrutural que ela deve exibir entre o fenômeno observado, aquele que “salta aos olhos” do investigador, e o modelo.<sup>3</sup> Por exemplo, a partir do século XIX, os fenômenos físicos da transferência de calor e da eletrostática começaram a ser encarados a partir de uma mesma estrutura matemática, interpretando temperatura “como se fosse” potencial elétrico, ou uma fonte de calor “como se fosse” uma carga elétrica positiva.

De acordo com esta corrente, quando se pensava conhecer a extensão exata de uma teoria e onde estaria situada a fronteira entre sua analogia e determinado fenômeno, seria permitido, em princípio, a expressão mais formal sem o termo “como se fosse”.<sup>4</sup> Isto é, para a mentalidade mais rigorosa, o propósito de se elaborar modelos analógicos era o de se familiarizar com determinado campo de conhecimento, a ponto de ser possível descrevê-lo por meio de sua própria linguagem, sem recursos metafóricos de comparação.<sup>5</sup>

A analogia física foi, justamente, a estratégia utilizada por William Thomson, no primeiro artigo em que uma teoria matemática bem fundamentada foi apresentada para lidar com problemas da transmissão de sinais elétricos por meio de um cabo submarino, intitulado “Sobre a teoria do telégrafo elétrico” – apresentado à Sociedade Real de Londres, em 1854.<sup>6</sup> Nesse artigo, Thomson utilizou-se da teoria do calor de Fourier (1822),<sup>7</sup> especialmente a ideia de fluxo de calor, combinando-a com as ideias de Michael Faraday sobre indução elétrica,<sup>8</sup> para criar uma espécie de teoria de campo para a eletrostática e, mais adiante, para a eletrodinâmica, que ele estava desenvolvendo de maneira pioneira até então.

## A telegrafia e o fenômeno da distorção harmônica

Concebido a partir de uma confluência de tecnologias inspiradas em sistemas de comunicações mais antigos, como o telégrafo semafórico,<sup>9</sup> contando com a contribuição conhecida de Gauss, Weber, Steinheil, Morse, entre outros, o telégrafo elétrico surge em forma de uma chave mecânica conectada a uma bateria em uma extremidade, tendo a outra conectada por um fio metálico a um eletroímã [relé], que tinha por função atrair uma peça metálica, atuando como transdutor e convertendo o sinal elétrico em mecânico, a ser impresso em uma fita de papel bobinado.<sup>10</sup>

Na segunda metade do dezanove, a comunicação telegráfica terrestre já havia se convertido em tarefa rotineira,<sup>11</sup> quando o “sonho” de interligar os continentes europeu e americano começava a tomar forma.<sup>12</sup> Era, no entanto, um investimento imensamente arriscado, e que enfrentava difíceis barreiras técnicas, desde 1855, quando aconteceram as primeiras tentativas, até o lançamento bem sucedido em 1866.<sup>13</sup> No entanto, “misterioso” fenômeno provaria ser desanimador para os pioneiros: a “distorção harmônica”, observada primeiramente em 1853 pelo “eletricista” inglês Josiah Latimer Clark (1822-1898).<sup>14</sup>

A distorção em linhas aéreas era praticamente inexistente, todavia, em cabos submarinos, o fenômeno apelidado de “retardation” fazia com que os sinais enviados [em código Morse] a partir de uma extremidade do cabo chegassem, de certa forma, “misturados”, isto é, ligeiramente atrasados e alongados na outra extremidade, dificultando sua leitura e interpretação. Após a detecção do fenômeno, Clark conduziu uma série de testes em linhas subterrâneas [nas quais a distorção também era perceptível] e, a convite do astrônomo real britânico, Sir George Biddell Airy (1801-1892), apresentou os resultados a Michael Faraday (1791-1867), que percebe no fenômeno uma maneira de reforçar suas próprias teorias sobre a natureza das interações eletromagnéticas: seu conceito de campo.<sup>15</sup>

Grande parte dos cientistas da época, sobretudo os “molecularistas” franceses [tais como Laplace, Cauchy, Poisson] e alemães [como Navier e Weber], seguiam a linha de Ampère<sup>16</sup> e enxergavam na eletricidade mecanismos de interação entre forças centrais [de ação à distância].<sup>17</sup> Para esta “escola mecânico-molecular”, quaisquer propriedades

inerentes à transferência de calor ou da eletricidade deveriam ser descobertas primeiramente assumindo a existência de partículas e configurações de forças, que os permitiria, em princípio, deduzir consequências verificáveis para tais configurações.<sup>18</sup> Outros, que poderiam ser chamados partícipes do “Empiricismo”, tais como Ohm<sup>19</sup> e Fourier, buscavam literalmente “matematizar” o fenômeno partindo de metodologias anti-hipotéticas, submetendo a física à análise matemática, com descrições geométricas da realidade em termos de equações diferenciais. Em sua maioria admitiam a hipótese do éter como meio de propagação seja do calor, luz ou eletricidade.

Faraday, por sua vez, acreditava que a condução da eletricidade em um condutor era resultado de um processo de contínua quebra, resultante de uma tensão acumulada,<sup>20</sup> como uma corda esticada, em um meio dielétrico, processo que ele denotava por indução elétrica. Após ser apresentado por Clark ao fenômeno da distorção, Faraday sugere que, nas linhas telegráficas aéreas, o fenômeno era de difícil visualização dada sua baixa capacitância e as linhas se “carregavam” rápido demais para serem percebidas.<sup>21</sup>

O fenômeno não seria problema real senão para longas distâncias, o que para a telegrafia submarina poderia inviabilizar a comunicação intercontinental. Dada a magnitude do problema e a possibilidade de grande visibilidade para quem o resolvesse a figura de William Thomson foi atraída e se tornaria a mentalidade líder na empreitada de lançamento do cabo.

## Thomson, Stokes e o modelo “coaxial” do cabo submarino

Logo após tomar conhecimento do problema em 1616 de outubro daquele mesmo ano, Stokes escreve uma carta ao amigo Thomson relatando o problema em aberto, que começa, por sua vez, a trabalhar na “nova” teoria.<sup>22</sup> Aos 17 anos de idade, quando admitido oficialmente na Universidade Cambridge, Thomson teve a oportunidade de conhecer os trabalhos de Laplace, Poisson, Fresnel e, sobretudo, o *Thèorie Analytique de la Chaleur*, de Fourier,<sup>23</sup> que teria influência significativa em todo o curso de sua carreira.<sup>24</sup> No ano seguinte, o jovem estudante publicaria seu primeiro artigo no *Cambridge Mathematical Journal*, “Sobre o Movimento Uniforme de Calor em Corpos Sólidos Homogêneos e sua conexão com a Teoria Matemática da Eletricidade”,<sup>25</sup> um ousado trabalho em que adaptou a teoria do mestre gaulês ao problema da eletrostática, pautado nos trabalhos de Green<sup>26</sup> e Poisson. Artigo este, aliás, em que sugere pela primeira vez uma analogia física para os conceitos de calor e eletricidade.

A partir daquele momento, Thomson e Stokes trocariam uma série de cartas, unindo esforços que resultariam no lançamento bem sucedido do primeiro cabo transatlântico de comunicações. Estas cartas foram publicadas posteriormente com o título “Sobre a teoria do telégrafo elétrico”,<sup>27</sup> que forneceram uma solução, ainda que incompleta [nas palavras dos próprios autores], para o problema. A abordagem seria, de fato, uma das primeiras teorias matemáticas bem fundamentadas do telégrafo elétrico.

Vale ressaltar que a solução proposta foi muito além da matemática: como resultado seriam apresentadas não apenas “explicações” para o fenômeno da distorção, que poderia por um fim no ambicioso projeto, mas também recomendações práticas, desde a estimação e fabricação do cabo até a proposição de novas formas se medir as variáveis presentes. Além das sugestões, Thomson se envolveu pessoalmente em todas as etapas, desde a confecção até o lançamento dos cabos, evidenciando sua habilidade como engenheiro, inventor e projetista.

Apresenta-se assim a tradução comentada em uma “leitura estendida” do artigo, com as notas dos tradutores e comentários indicados nas notas de fim [com abreviação **NT**] e por trechos entre colchetes, [ ], correspondentes comentários acrescentados ao longo do texto. Os comentários de Thomson ou Stokes nas notas de fim, por serem em menor número, serão precedidas pela abreviação **NA**, nas notas, e parênteses, ( ), ao longo do texto. Buscou-se igualmente adaptar algumas notações, como forma de facilitar a compreensão do leitor. Nestes casos, especificamente, uma nota explicativa será apresentada também como nota de fim.

## Tradução do artigo “On the Theory of the Electric Telegraph” (Art. LXXIII, Proceedings of the Royal Society, May, 1855)

### Art. LXXIII. Sobre a teoria do telégrafo elétrico

A seguinte investigação foi em consequência de uma carta recebida pelo autor enviada pelo prof. Stokes, datada de 16 de outubro de 1854. Foi agora comunicada à Royal Society, embora apenas de forma incompleta, desde que poderia servir para indicar algumas aplicações práticas da teoria, especialmente em estimar as dimensões dos fios telegráficos e cabos requeridos para longas distâncias, e o autor reservará um mais completo desenvolvimento e ilustração das partes matemáticas da pesquisa em um artigo sobre a condução de Eletricidade e Calor através dos sólidos, que ele pretende enviar à Royal Society em outra ocasião [veja o artigo anterior XXII].

“Trecho de uma carta enviada ao prof. Stokes, Largs, 28 de outubro de 1854.”

Seja  $C$  a capacidade eletrostática [capacitância] por unidade de comprimento do fio; isto é, seja  $C$  tal que  $Clv$  é a quantidade de eletricidade [i.e. a carga elétrica] necessária para carregar uma porção  $l$  do fio a um potencial  $v$ . Em uma nota comunicada em adição a um artigo, no número de junho último da *Philosophical Magazine [Electrostatics and Magnetism, Art III]*, que acredito no momento estar em mãos do editor para publicação, provei que o valor de  $C$  é  $\frac{l}{2l \log \frac{R}{r}}$ , com  $l$  denotando a capacidade indutiva específica do guta-percha, e  $R$   $R'$  os raios de suas superfícies cilíndricas interna e externa.<sup>28, 29</sup>

Seja  $R$  a resistência galvânica<sup>30</sup> do fio em medidas eletrostáticas absolutas (por unidade de comprimento do fio) [i.e.  $\Omega/m$ ] (veja o artigo *On the application of the principle of mechanical effect to the measurement of electro-motive forces and galvanic resistances, Phil. Mag. Dec. 1851 (Art LIV vol. 1, acima)*)

Seja  $i$  a intensidade,<sup>31</sup> no instante  $t$ , da corrente (também em unidades eletrostáticas),<sup>32</sup> em um ponto  $P$  do fio a uma distância  $x$  tomado a partir de uma extremidade, que pode ser denotada por  $O$ . Seja o potencial no mesmo ponto  $P$ , no instante  $t$ , denotado por  $v$ .

O potencial no [revestimento] exterior de gutta-percha pode ser considerado, a cada instante, rigorosamente zero (a resistência da água, se o fio for esticado como num telégrafo submarino, é certamente incapaz de evitar que a ação indutiva seja completada instantaneamente em volta de cada ponto do fio. Se o fio estiver bem enrolado, a resistência da água pode, possivelmente, produzir efeitos sensíveis).

Em consequência, no instante  $t$ , a quantidade de eletricidade [carga elétrica] em um comprimento [infinitesimal]  $dx$  do fio em  $P$  será  $vCdx$ .

A quantidade que o deixa no tempo  $dt$  será  $dt \frac{di}{dx} dx$ .

Disso, devemos ter  $-Cdx \frac{dv}{dt} dt = dt \frac{di}{dx} dx$ . (1)

Porém a força eletromotriz, em unidades eletro-estáticas, no ponto  $P$ , é  $-\frac{dv}{dx}$ , e, assim sendo, a cada instante<sup>33</sup>

$$Ri = -\frac{dv}{dx}. \quad (2)$$

Eliminando  $i$  de (1) por meio da relação (2), temos:

$$RC \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (3)$$

que é a equação da excitação elétrica em um fio telegráfico submarino, perfeitamente isolado pela cobertura de gutta-percha.<sup>34</sup>

Esta equação assemelha-se com a bem conhecida equação do movimento linear de calor em um condutor sólido; e diversas formas de solução fornecidas por Fourier são perfeitamente adaptáveis para responder questões práticas em relação à utilização em um fio telegráfico.<sup>35</sup> Assim, primeiramente, considere-se o fio infinitamente longo, comunicando com a terra em sua extremidade [também] infinitamente distante: considere a extremidade  $O$  subitamente elevada ao potencial  $V$  (sendo posta em comunicação com o polo positivo de uma bateria galvânica, na qual o polo negativo está em comunicação com o terra, [considerando-se] a resistência da bateria pequena, diga-se, não mais do que algumas jardas [ $1yd \approx 0,91m$ ] do fio); considere seja mantida a este potencial durante um tempo  $T$ ; e, por último, sendo colocada em comunicação com o terra (i.e. subitamente reduzida a, e para sempre mantida, ao potencial zero).<sup>36</sup> Uma expressão elementar para a solução da equação neste caso é<sup>37</sup>

$$v = \frac{V}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z\omega^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin[2\omega t - z\omega^{\frac{1}{2}}] - \sin[(t-T)2\omega - z\omega^{\frac{1}{2}}]}{\omega} d\omega. \quad (4)$$

onde, em suma  $z = x\sqrt{RC}$  .  $z = x\sqrt{RC}$  . (5)

Que expressa verdadeiramente a solução,<sup>38</sup> com as condições estabelecidas, e pode ser demonstrado observando-se que, **1°**) o segundo membro da equação (4) é convergente para todos os valores positivos de  $z$  e nulo quando  $z$  é infinitamente grande; **2°**) obedece à equação (3) e **3°**), quando  $z = 0$  ela se anula exceto para valores de  $t$  entre  $0$  e  $T$ , e para estes o resultado é igual a  $V$ . É curioso notar, o que podemos concluir, considerando as condições físicas do problema, que o valor da integral definida no segundo membro de (4) é zero para todos os valores negativos de  $t$ , bem como valores positivos de  $z$ .

Tal solução pode ser colocada sob a seguinte forma,<sup>39</sup>

$$v = \frac{2V}{\pi} \int_{t-T}^t d\theta \int_{t-T}^t e^{-z\omega^{\frac{1}{2}}} \cos(2\omega t - z\omega^{\frac{1}{2}}) d\omega. \quad (6)$$

que é, de fato, a solução primária<sup>40</sup> assim como obtido pelo tipo elementar  $\cos\left(\frac{2\pi jt}{T} - z\sqrt{\frac{\pi j}{T}}\right) e^{-z\sqrt{\frac{\pi j}{T}}}$

[sic]<sup>41</sup> apresentados por Fourier<sup>42</sup> em sua investigação das variações periódicas da temperatura terrestre. Isso, se  $T$  for infinitamente pequeno,<sup>43</sup> torna-se

$$v = \frac{2V}{\pi} T \int_0^{\infty} e^{-z\omega^{\frac{1}{2}}} \cos(2\omega t - z\omega^{1/2}) d\omega, \quad (7)$$

que expressa o efeito de se colocar a extremidade  $O$  do fio, por um período infinitamente curto, em comunicação com a bateria e imediatamente depois [em contato] com a terra. Pode ser reduzido de vez em termos finitos pela avaliação da integral,

que fica como segue: quando  $t$  é positivo,  $\int_0^{\infty} e^{-z\omega^{\frac{1}{2}}} e^{-z\omega^{1/2}} \cos(2\omega t - z\omega^{1/2}) d\omega = \frac{\sqrt{\pi z}}{4t^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4t}}$ , e  $0$  (zero) quando  $t$  é negativo.<sup>44</sup>

E então, temos  $v = T \frac{Vz}{2\pi^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4t}}$ , (8)

ou, por (6), quando  $t$  não é infinitamente pequeno [i.e. finito],

$$v = \frac{Vz}{2\pi^2} \int_{t-T}^t \frac{e^{-\frac{z^2}{4\theta}}}{t^{\frac{3}{2}}} d\theta, \quad (9)$$

ou, que é o mesmo que [escrever],

$$v = \frac{Vz}{2\pi^2} \int_0^T \frac{e^{-\frac{z^2}{4(t-\theta)}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta. \quad (10)$$

É digno de nota que em (9) e (10) os limites da integral devem ser tomados de  $0$  a  $t$  (ao invés de  $t - T$ , ou  $0$  a  $T$ ), caso se deseje exprimir o potencial em qualquer tempo  $t$  entre  $0$  e  $T$ , uma vez que a quantidade multiplicada por  $d\theta$  no segundo membro de (6) se anula para todos os valores negativos de  $\theta$ .

Estas últimas formas podem ser obtidas sinteticamente a partir da seguinte solução, também uma das soluções elementares de Fourier:

$$v = \frac{e^{-\frac{z^2}{4t}} Q}{\frac{1}{t^2} \pi^2} \times \sqrt{\frac{R}{C}}, \quad (11)$$

272

que exprime o potencial no fio ao ser aplicada uma quantidade  $Q$  de eletricidade em [na extremidade]  $O$ , deixando-se este terminal isolado. Pois, se pensarmos que o fio seja estendido a uma distância infinita em cada lado de  $O$ , e estas extremidades infinitamente distantes sejam colocadas em comunicação com a terra,<sup>45</sup> a mesma equação expressará o resultado ao se comunicar uma quantidade  $2Q$  ao fio em  $O$ . Agora suponha, no mesmo instante, uma quantidade  $-2Q$  a ser comunicada ao ponto  $O'$  a uma distância  $\frac{\alpha}{\sqrt{RC}}$  no lado negativo de  $O$ . O potencial resultante em um instante qualquer  $t$ , a uma distância  $\frac{z}{\sqrt{RC}}$  [i.e. a uma distância  $xx$ ] ao longo do fio a partir de  $O$ , será

$$v = \frac{Q}{\pi^2} \left[ \frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^{-\frac{(z+\alpha)^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} \right]; \quad (12)$$

e se  $\alpha$  for infinitamente pequeno, [o resultado] se torna

$$v = \frac{Q\alpha}{2\pi^2} \times z \frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

que com valores positivos de  $z$ , expressa obviamente o efeito de comunicar o ponto  $O$  com o polo positivo [da bateria] por um período infinitamente pequeno e, então, instantaneamente com a terra.

A intensidade da corrente a qualquer ponto to fio, sendo igual a  $-\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x'}$ , como mostrado anteriormente, na equação (2), irá variar proporcionalmente a  $\frac{\partial v}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial v}{\partial z}$ . O tempo do máximo efeito eletrodinâmico dos impulsos tais como os

expressos em (11) ou (13) será encontrado pela determinação de  $t$ , em cada caso, ao fazer  $\frac{\partial v}{\partial z}$  um máximo. Assim<sup>46</sup> encontramos  $t = \frac{z^2}{6} = \frac{RCx^2}{6}$ , como o [instante de] tempo no qual o máximo efeito eletrodinâmico de conectar a bateria por um instante em  $O$ , e então deixando este ponto isolado, é experimentado a uma distância  $x$ .<sup>47</sup>

Nestes casos não existe uma “velocidade de transmissão” regular. Mas, por outro lado, se o potencial em  $O$  for tal que varie segundo uma simples lei harmônica ( $\sin 2\omega t$ ), as fases são propagadas regularmente a uma taxa  $2\sqrt{\frac{\omega}{RC}}$ , assim como demonstrada na bem conhecida solução

$$v = e^{-z\omega^{\frac{1}{2}}} \sin(2\omega t - z\omega^{\frac{1}{2}}). \quad (14)$$

Os efeitos dos pulsos em uma extremidade, quando a outra está em comunicação com a terra, e comprimento finito, serão mais convenientemente investigadas considerando um fio de tamanho duplo, com iguais agentes positivo e negativo aplicados em suas duas extremidades. O método sintético encontrado para o uso da equação (11) surge perfeitamente adaptada a responder todas as questões práticas que podem ser propostas.

Para levar em consideração o efeito do isolamento imperfeito (que parece ter sido bem sensível nos experimentos de Faraday), podemos assumir o isolamento de gutta-percha como uniforme, e o fluxo de eletricidade através dele proporcional à diferença de potencial em suas superfícies interna e externa. A equação da excitação elétrica se tornará, então

$$RC \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv, \quad (15)$$

e se assumirmos  $v = e^{-\frac{h}{RC}t} \phi$ , (16)

teremos  $RC \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - hv$ , (17)

[consistindo em] uma equação para o tratamento do que as investigações precedentes são aplicáveis.<sup>48</sup>

*“Trecho de uma carta enviada ao Prof. Stokes, Largs, 30 de outubro de 1854.”*

Uma aplicação da teoria de transmissão da eletricidade, ao longo de cabo telegráfico submarino, mostra como a questão recentemente levantada em relação à aplicabilidade de se enviar sinais distintos ao longo de dimensões tais como 2000 ou 3000 milhas de fio, necessária para a América [do norte], pode ser respondida. A investigação geral mostrará exatamente quanto a forma dos sinais serão desgastados<sup>49</sup> e mostrará qual intensidade máxima de corrente que atravessa o aparato, na América, seria produzida por uma determinada ação da bateria no lado inglês, com [um] fio de determinadas dimensões, etc.<sup>50</sup>

O seguinte formato de solução da equação geral

$$RC \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv, \quad (18)$$

que foi primariamente obtida por Fourier, nos habilita a comparar os tempos até uma dada intensidade de corrente ser obtida, para diferentes dimensões do fio [sic]:<sup>51</sup>

$$v = e^{-\frac{ht}{RC}} \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{RCL^2} t}. \quad (19)$$

Se  $l$  denota o comprimento do fio, e  $V$  o potencial na extremidade comunicante com a bateria, a distribuição final de potencial [em analogia à distribuição de temperatura] no fio será expressa pela equação:

$$v = V \frac{e^{l-x\sqrt{h}} - e^{-l-x\sqrt{h}}}{e^{l\sqrt{h}} - e^{-l\sqrt{h}}}, \quad (20)$$

que, quando  $h = 0$   $h = 0$ , reduz-se a

$$v = V \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (21)$$

correspondendo ao caso de isolamento perfeito. O valor máximo da corrente final no extremo remoto é expresso por

$$\gamma = \frac{V}{Rl} \frac{2l\sqrt{h}}{e^{l\sqrt{h}} - e^{-l\sqrt{h}}}, \quad (22)$$

ou, quando  $h = 0$ ,  $\gamma = \frac{v}{Rl}$ . Por isso, se determinarmos  $A_n$  de forma que

$$\sum A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = V \frac{e^{(l-x)\sqrt{h}} - e^{-(l-x)\sqrt{h}}}{e^{l\sqrt{h}} - e^{-l\sqrt{h}}}, \quad (23)$$

quando  $x > 0$  e  $x < l$ , a equação

$$v = V \frac{e^{(l-x)\sqrt{h}} - e^{-(l-x)\sqrt{h}}}{e^{l\sqrt{h}} - e^{-l\sqrt{h}}} + e^{-\frac{ht}{RC}} \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{RCL^2} t} \quad (24)$$

irá expressar a real condição do fio em qualquer instante  $t$  após uma extremidade ter sido posta em conexão com a bateria, e a outra mantida em conexão com a terra.

Podemos inferir que o tempo requerido para alcançar uma determinada fração da intensidade máxima de corrente, na extremidade remota, será proporcional a  $RCl^2$ . Podemos estar *certos* [grifo de Thomson] antecipadamente [de] que o telégrafo americano será bem sucedido, com uma bateria capaz de fornecer um valor de corrente sensível no extremo remoto, quando mantida suficientemente em ação; mas o tempo necessário para cada deflexão [provavelmente da agulha de um galvanômetro] será dezesseis vezes o necessário para um fio com um quarto do comprimento, como, por exemplo, no cabo submarino francês entre a Sardenha e a África.<sup>52</sup>

Um resultado muito importante é, que pelo aumento do diâmetro do fio e da cobertura de gutta-percha na proporção de todo o comprimento, a distinção da expressão<sup>53</sup> será mantida constante; pois  $nn$  varia inversamente com o quadrado do diâmetro, e  $C$  (a capacidade eletrostática por unidade de comprimento) é inalterada quando os diâmetros do fio e a cobertura são alterados na mesma proporção.

Portanto, como o cabo francês tem sido amplamente testado, podemos garantir o mesmo grau de sucesso no telégrafo americano aumentando-se todas as dimensões do fio na razão da maior distância a que se estende, para a

qual o francês foi testado. Será um problema econômico,<sup>54</sup> facilmente resolvido pelo método analítico dos máximos e mínimos, para determinar as dimensões do fio e cobertura que, com os preços estabelecidos do cobre, gutta-percha e ferro, darão rapidez de ação com o menor custo inicial.

A solução obtida a partir do tipo  $\frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}$  pode ser aplicada para fornecer a condição do fio, quando uma extremidade, **E**, é mantida conectada com a terra, e a outra, **O**, é operada de forma que seu potencial seja mantido variando de acordo com uma dada função temporal arbitrária: somente isso, que eu evitei mencionar em minha última carta, é preciso atender para: ao invés de meramente considerar fontes (por assim dizer) em **O** e **O'** (o último em uma continuação imaginária do fio), nós devemos supor fontes em **O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>, ...** e em **O', O'<sub>1</sub>, O'<sub>2</sub>, ...** [ver Fig. 3] configurados de acordo com o princípio geral da imagens sucessivas, de forma que o potencial em **E** possa ser zero, e que em **O** não pode ser influenciado por outras fontes exceto a fonte **OO**. Tomando **O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>, O', O'<sub>1</sub>, O'<sub>2</sub>, ...** equidistantes, temos apenas que supor fontes iguais, cada uma representada pelo tipo

$$z \frac{e^{-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

a serem colocadas em cada um destes pontos. Para os efeitos de **O<sub>1</sub>** e **O'** se equilibrarão mutuamente no que diz respeito ao potencial em **O**. Assim, o serão **O<sub>2</sub>** e **O'<sub>1</sub>**, também **O<sub>3</sub>** e **O'<sub>2</sub>** e sucessivamente.

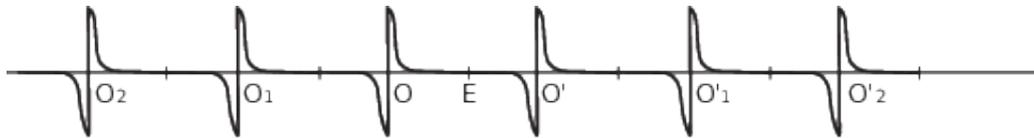


Fig1 - Curva de um sinal de tensão aplicado ao fio telegráfico. Fonte: (Thomson, 1855)

275

E, novamente, **O** e **O'** manteriam, sozinhos, o potencial em **E**, zero. Assim também **O<sub>1</sub>** e **O'<sub>1</sub>**, bem como **O<sub>2</sub>** e **O'<sub>2</sub>** e assim por diante. Assim, se denotarmos **2lRC** por **a**, em resumo, a solução geral é

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{F(\theta)}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \left[ \dots (z+2a)e^{-\frac{(z+2a)^2}{4(t-\theta)}} + (z+a)e^{-\frac{(z+a)^2}{4(t-\theta)}} \right. \\ \left. + ze^{-\frac{(z+a)^2}{4(t-\theta)}} + (z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{4(t-\theta)}} + (z-2a)e^{-\frac{(z-2a)^2}{4(t-\theta)}} + \dots \right], \quad (26)$$

em que **F(θ)** é uma função arbitrária tal que **F(t)** expressa o potencial mantido pela bateria em **O**.

A solução correspondente da equação

$$RC \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - hv \quad (27)$$

é

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{ht}{RC}} \int_0^t \frac{F(\theta)}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{h\theta}{RC}} d\theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (z-ma)e^{-\frac{(z-ma)^2}{4(t-\theta)}} \right]. \quad (28)$$

pele qual o efeito do isolamento imperfeito pode ser levado em consideração.

“Trecho de uma carta enviada pelo prof. Stokes ao prof. W. Thomson, datada de Nov. 1854.”

Tenho trabalhado por mim mesmo em várias formas de solução da equação  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  sob as condições  $v = 0$  quando  $t = 0$ , de  $x = 0$  a  $x = \infty$ ;  $v = f(t)$ , quando  $x = 0$  de  $t = 0$  a  $t = \infty$ , e descobri que a solução com uma única integral (e deve ser necessariamente esta) foi obtida com mais facilidade como segue:

Permita  $v$  ser expandida em uma integral definida da forma

$$v = \int_0^\infty \omega(t, \alpha) \sin \alpha x dx, \quad (29)$$

que sabemos ser possível.

Desde que  $v$  não se anula quando  $x = 0$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  não é obtida por diferenciação sob o sinal de integração, mas o termo  $\frac{2}{\pi} \alpha v_{x=0}$  deve ser suprimido,<sup>55</sup> de modo que (observando que  $v_{x=0} = f(t)$  para uma das equações de condição) temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int_0^\infty \left[ \frac{2}{\pi} \alpha f(t) - \alpha^2 \omega \right] \sin \alpha x dx. \quad (30)$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int_0^\infty \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \alpha^2 \omega - \frac{2}{\pi} \alpha f(t) \right] \sin \alpha x dx, \quad (31)$$

de onde

$$\omega = e^{-\alpha^2 t} \int_0^t \frac{2}{\pi} \alpha f(t') e^{\alpha^2 t'} dt', \quad \omega = e^{-\alpha^2 t} \int_0^t \frac{2}{\pi} \alpha f(t') e^{\alpha^2 t'} dt', \quad (32)$$

o limite inferior é uma função de  $\alpha$  [<sup>NT</sup> Que Stokes não identifica no texto original.]. Contudo, a outra equação da condução fornece

$$\begin{aligned} \omega &= e^{-\alpha^2 t} \int \frac{2}{\pi} \alpha f(t') e^{\alpha^2 t'} dt' \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \alpha \int_0^t e^{-\alpha^2 t - t'} \sin \alpha x d \alpha dt'. \end{aligned} \quad (33)$$

Consequentemente

$$v = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \int_0^\infty \int_0^t f(t') \alpha e^{-\alpha^2 t - t'} \sin \alpha x d \alpha dt'. \quad (34)$$

Mas

$$\int_0^{\infty} e^{-a\alpha^2} \cos b\alpha d\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad (35)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-a\alpha^2} \sin b\alpha \cdot \alpha d\alpha &= \frac{d}{db} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi} b}{4a^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{b^2}{4a}}, \end{aligned} \quad (36)$$

e, por isso, escrevendo  $t - t'$ , para  $a, ba, b$ , e substituindo, temos<sup>56</sup>

$$v = \frac{x}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^t (t - t')^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{x^2}{4(t-t')}} f(t') dt'. \quad (37)$$

A sua conclusão em relação ao fio americano parte daquela mesma equação diferencial que você obteve. Para a equação  $RC \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 v}{dx^2}$  [o resultado] mostra que dois fios submarinos serão similares, dados os quadrados dos comprimentos  $x$ , medidos em pontos similarmente situados, e, portanto, é claro que para aqueles de comprimento  $l$ , variam conforme os tempos dividido por  $RC$ ; ou o tempo para qualquer operação elétrica é proporcional a  $RC l^2$ .

A equação  $RC \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 v}{dx^2} - hv$  fornece  $h \propto l^{-2}$  para a condição inicial de similaridade da fuga.

O conjunto de curvas seguintes representa a intensidade da corrente através do instrumento no extremo remoto do fio à medida que ele cresce gradualmente, gradualmente cresce e decresce, após um extremo operado ter sido colocado em contato com um polo da bateria, e mantido assim permanentemente, ou desconectado e colocado em conexão com a terra após vários intervalos curtos de tempo.<sup>57</sup>

As abscissas, medidas ao longo de  $OX$ , representam o tempo ocorrido a partir da primeira aplicação da bateria, e as ordenadas, medidas paralelamente à  $OY$ , a intensidade da corrente.

O tempo correspondente a  $a$  é igual a  $\frac{RC l^2}{\pi^2} \log_e \left(\frac{4}{3}\right)$ , sendo  $l$  o comprimento do fio em pés,  $R$  é a "resistência" por pé<sup>58</sup>, em unidades eletrostáticas<sup>59</sup>, e  $C$  é a capacidade por pé (que é igual a  $\frac{l}{2 \log \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}}$ , sendo  $l$  o poder eletrostático indutivo do guta-percha, provavelmente sobre  $2$ , e  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  os raios de suas superfícies cilíndricas interna e externa). A curva principal curva (I.) [ver Fig. 3] representa o aumento de corrente no instrumento remoto, quando a extremidade é mantida permanentemente em conexão com a bateria. Ela quase coincide com a linha das abscissas, primeiramente para não indicar qualquer corrente sensível até que um intervalo de tempo  $a$  correspondente ocorra; embora, estritamente falando, o efeito na extremidade remota é instantâneo<sup>60</sup> (i.e. de acordo com os dados limitados ao atual conhecimento sobre a eletricidade, como a que se supõe, em hidrodinâmica, quando a água é considerada como sendo incompressível, ou a velocidade do som considerada infinitamente grande, o que requer que efeitos sejam instantaneamente propagados ao longo de toda massa de água, em uma perturbação por toda parte).

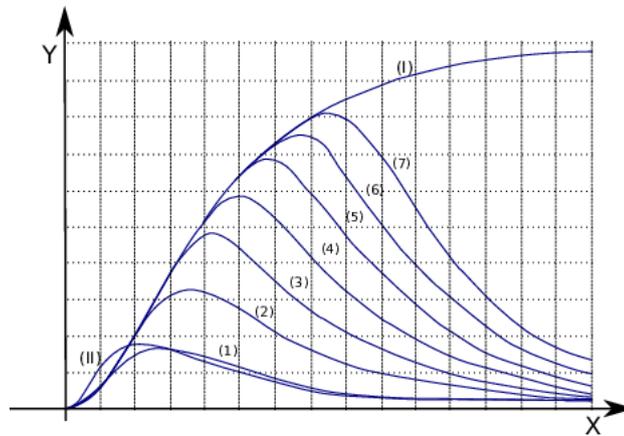


Fig 2 - Curvas de "chegada" para a corrente. Fonte: (Thomson, 1855).

Depois de um intervalo  $a$ , a corrente rapidamente aumenta, e após  $4a$  ou mais, atinge metade de sua intensidade máxima. Depois de  $10a$  após o começo, terá atingido quase sua intensidade máxima, que um maior aumento seria provavelmente insensível. A intensidade máxima é teoricamente alcançada somente após um intervalo de tempo infinito. A primeira (1) das menores curvas representa o aumento e queda da corrente no instrumento remoto após a extremidade ter sido colocada em contato com a bateria; a segunda (2) representa similarmente o efeito da bateria por um tempo  $2a$ . a terceira (3) por um tempo  $3a$  e assim por diante. A curva (II) obtida a partir da curva primária (I) por diferenciação (exibindo de fato a inclinação da curva primária em seus diversos pontos, com respeito à linha das abscissas), representa a intensidade da corrente em diferentes tempos através da extremidade remota do fio, consequência de se colocar uma bateria muito intensa em comunicação com o fio, a partir do qual o sinal é enviado, por um período extremamente curto, e então instantaneamente esta extremidade é colocada em contato com a terra. Assim, um relativamente ao outro, as curvas (1) e (II) podem ser consideradas como representando os efeitos relativos de se colocar determinada bateria em comunicação por um [intervalo de] tempo  $aa$ , e a bateria com dez ou vinte vezes mais células por um tempo  $\frac{1}{10} a$  ou  $\frac{1}{20} a$ .

Se me fosse permitido imaginar como seria o "retardo" que nas observações feitas entre Greenwich e Bruxelas foi determinado ser em torno de  $\frac{1}{10}$  (um décimo) de segundo, eu diria que ele corresponde a quatro ou cinco vezes  $aa$ , mas ele depender do tipo de instrumento utilizado e do modo se fechar ou abrir contatos com a bateria, que foi seguido.

Equação da curva principal (I).

$$y = 10a - 20a(e - e^4 + e^9 - e^{16} - \dots), \quad (38)$$

em que  $e = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{a}}$ ; sendo  $aa$  metade do lado de um dos quadrados.

Se  $y = f(x)$  denota a equação da onda principal, e  $f(x)$  supostamente se anulando para todos os valores negativos de  $xx$ , as séries de curvas são representadas pelas equações

$$\begin{aligned} y &= f(x) - f(x - a) \\ y &= f(x) - f(x - 2a) \\ y &= f(x) - f(x - 3a) \\ &\vdots \\ y &= f(x) - f(x - a) \end{aligned}$$

$$y = a \frac{df(x)}{aa}.$$

Penso claramente que o modo correto de se fazer observações de retardos seriam o uso de do eletro-dinamômetro de Weber ou qualquer outro instrumento de adequada sensibilidade sob o mesmo princípio, isto é, adaptado para mostrar deflexões experimentadas por uma parte móvel do circuito, em virtude força eletrodinâmica mútua entre este e a parte fixa do mesmo circuito, devido a uma corrente fluindo por um tempo muito curto através do circuito. Tal instrumento, e [conjuntamente a] um galvanômetro ordinário (mostrando deflexões impulsivas de uma agulha de aço), ambos mantidos no circuito no extremo remoto do fio telegráfico a partir do qual o sinal é construído, daria os valores de  $\int_0^{\infty} y^2 dx$ , e  $\int_0^{\infty} y dx$  (ou a área), para quaisquer curvas,<sup>61</sup> e a taxa do tempo  $a$  dos diagramas para o tempo durante o qual a bateria é mantida em comunicação com o fio, poderia ser deduzido. O método perderá sensibilidade se a bateria for mantida em comunicação por muito tempo, mas será suficientemente preciso se não for mais do que dez ou vinte vezes  $aa$ . Eu acredito que não haverá dificuldades em aplicar o método em fios telegráficos de vinte a trinta milhas de comprimento, nos quais nenhum retardo será notado por observação direta.

Antes, contudo, de planejar quaisquer observações deste tipo com um panorama de execução, eu desejaria formar alguma estimativa do valor provável de certo elemento, o número de unidades eletrostáticas na unidade eletromagnética da quantidade elétrica, que espero conseguir realizar a partir da observação de  $1/6$  de segundo, como os aparentes retardos entre Greenwich e Bruxelas. Eu, assim sendo, reportei ao astrônomo real para alguns dados a respeito do modo de observação das indicações da agulha, as dimensões e circunstâncias de isolamento do fio; e ele foi muito gentil em me enviar toda informação que tinha disponível para meus propósitos. Elas me possibilitaram fazer uma estimativa, e isto me convenceu de que o tipo de experimento que propus em um artigo sobre transientes elétricos na *Philosophical Magazine* em junho de 1853, que espero poder colocar em prática, seja bem sucedido em fornecer uma comparação razoavelmente precisa para as unidades eletrostáticas e eletrodinâmicas; e [ainda,] uma investigação posterior da capacidade indutiva específica do gutta percha, que não apresentará dificuldades, me possibilitará coletar todos os dados requeridos para estimar os retardos telegráficos, sem quaisquer dados das operações telegráficas [em si]. Este experimento consiste simplesmente em dois discos condutores em comunicação com os dois polos de uma bateria de Daniel (ou qualquer outra bateria em que a força eletromotriz é conhecida em unidades eletromagnéticas) e *ponderar*<sup>62</sup> [grifo do autor] a atração entre eles.

279

\*\*\*\*\*

[O trecho entre os símbolos \*\*\*\*\* não consta no artigo original, estando disponível em uma republicação da Royal Society de Londres, que não faz distinção entre as versões, e que tomamos aqui por ser a mais completa.]

Vejo agora que 100 células da [bateria de] Daniel diretamente aplicadas dariam uma força de, não menos que, quatro graduações entre os dois discos, cada um com  $1 \text{ pé}^2$  de área [superficial],<sup>63</sup> separados por uma distância de  $\frac{1}{100}$  *ésimo* de *pé*. Como a força varia inversamente com o quadrado da distância<sup>64</sup> entre os discos, a ponderação<sup>65</sup> será um pouco problemática em consequência da instabilidade, porém imagino que com um bom balanceamento ela será perfeitamente praticável.

Para fazer a estimativa, supondo que o retardo observado entre Greenwich e Bruxelas seja principalmente devido à parte subterrânea do cabo, e tomei como se ele fosse realmente observado nas 180 milhas [ $\approx 290 \text{ km}$ ] do fio de cobre revestido. Não tendo trabalhado com o problema teórico no caso de um [definido] número de fios isolados pelo mesmo revestimento, considere os casos de um único fio excentricamente colocado dentro do revestimento de ferro, isolado deste pela gutta-percha, e um fio único em seu próprio tubo de gutta-percha com os outros [fios] removidos, o mesmo sendo simetricamente revestido com tecido e [fios de] ferro da maneira usual. No primeiro caso, a capacidade eletrostática do fio seria

$$\frac{l}{2 \ln \frac{\mathcal{R}^2 - f^2}{\mathcal{R}\mathcal{R}'}} \quad (39)$$

aproximadamente,<sup>66</sup> se  $\mathcal{R}$ , o raio interno do revestimento condutor, for considerado múltiplo de  $\mathcal{R}'$ , o raio do fio de cobre,  $f$  denotando a distância entre os eixos. No último caso ela será

$$\frac{l}{2 \log \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}} \quad (40)$$

em que  $\mathcal{R}$ , é o raio interno do revestimento. Estes se tornam  $\frac{1}{2 \times 45}$  e  $\frac{1}{1 \times 35}$ , se tomarmos  $l = 2$  (que é para o gutta-percha, provavelmente, bem próximo), e  $\mathcal{R} = 0.5$ ,  $\mathcal{R}' = 0.325$ , conforme indica a informação que me foi dada pelo Astrônomo Real. O que quer que a teoria possa mostrar devido a influência dos outros fios, o resultado concernente ao retardo deve ser intermediário entre o que seria caso os outros fios fossem removidos, e o que foi usado isolado dos outros por um recobrimento próprio<sup>67</sup>. Podemos, assim sendo, aplicar o resultado teórico tomando  $C$  algo entre  $\frac{1}{2 \times 45}$  e  $\frac{1}{1 \times 35}$ . Consequentemente, se "retardo" concordar com o tempo correspondente a  $a$  nos diagramas,  $R$  deverá ser algo intermediário entre

$$\frac{\pi^2 \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{2 \times 45} \times (180 \times 5280)^2 \times \ln\left(\frac{4}{3}\right)} \quad (41)$$

$$\text{e } \frac{\pi^2 \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{1 \times 35} \times (180 \times 5280)^2 \times \ln\left(\frac{4}{3}\right)} ; \quad (42)$$

ou novamente, se o "retardo" correspondente a  $9a$ ,  $R$  deverá ser intermediário entre

$$\frac{\pi^2 \times \frac{1}{90}}{\frac{1}{2 \times 45} \times (180 \times 5280)^2 \times \ln\left(\frac{4}{3}\right)} \quad (43)$$

$$\text{e } \frac{\pi^2 \times \frac{1}{90}}{\frac{1}{1 \times 35} \times (180 \times 5280)^2 \times \ln\left(\frac{4}{3}\right)}. \quad (44)$$

Tenho quase certeza de que o que foi observado como o "retardo" deve ser, em verdade, intermediário entre  $a$  e  $9a$  de acordo com os diagramas. Consequentemente o real valor de  $r$  por  $pé$ <sup>68</sup> deve estar entre os maiores e últimos das precedentes estimativas, isto é, entre

$$\frac{1}{108 \times 10^9} \text{ e } \frac{1}{176 \times 10^{10}}. \quad (45)$$

Mas o valor de  $R$  (a "resistência" em medidas eletromagnéticas absolutas britânicas de um  $pé$  do fio) deve, de acordo com as observações de Weber do cobre, ser algo em torno de 99810, ou quase 10000<sup>69</sup>. Assim  $\sigma$  (o número de unidades eletrostáticas na unidade eletromagnética) sendo igual a  $\sqrt{\frac{R}{r}}$ , deve ser algo em torno de 104.000.000 e 419.000.000.

De acordo com as observações de Weber, Joule, entre outros, quantidade de água decomposta por uma corrente unitária durante um tempo unitário, isto é, pela unidade eletromagnética de eletricidade, é, exatamente,  $\frac{1}{50}$  da porção. Em consequência, de 2.000.000 a 8.200.000 unidades eletrostáticas são requeridas para decompor uma porção de água. Uma unidade<sup>70</sup> eletrostática positiva e uma negativa a distância de um *pé* se atraem mutuamente com uma força de  $\frac{1}{32 \times 2}$  do peso de uma porção. Doravante, se *eletricidades* [grifo nosso] separadas na decomposição de uma porção forem concentradas em dois pontos separados, elas se atrairiam com uma força maior que 10 e não menos que 42 toneladas! Faraday, há muito, conjecturou que menos eletricidade corre no maior dos raios do que na decomposição de uma gota d'água, o que agora penso ser bem provável.

A expressão para a força, em unidades britânicas dinâmicas, entre duas placas, cada uma com área *S*, a uma pequena distância, *a*, separadas, quando conectadas a dois polos de uma bateria, na qual a força eletromotriz em unidades eletromagnéticas é *F*, sendo  $\frac{S}{8\pi} \left(\frac{F}{\sigma a}\right)^2$ <sup>71</sup>, ou em termos do tamanho de uma porção  $\frac{1}{32 \times 2} \frac{S}{8\pi} \left(\frac{F}{\sigma a}\right)^2$ . Se *F* a força eletromotriz de 100 células da bateria de Daniell, a qual obtive a partir das observações de Joule, deve ser cerca de 250.000.000,<sup>72</sup> e *a* sendo um décimo de um *pé*, e *S* um *pé*<sup>2</sup>, eu concluo, a partir das anteriores estimativas para  $\sigma$ , que a força de atração entre as placas não pode ser menor que 4x4 porções, não mais do que 72.

\*\*\*\*\*

Seria simples, a qualquer momento construir um plano para observar as indicações telegráficas por meios do eletrodinômetro de Weber, ou um instrumento construído sob o mesmo princípio, ou por medições de efeitos térmicos de correntes intermitentes, que poderia ser colocado em prática por qualquer um acostumado em realizar observações, e que poderia fornecer uma medida aceitável para o elemento de tempo, mesmo em casos nos quais o retardo observável é menor que  $\frac{1}{10}$  de segundo.<sup>73</sup> Um simples fio [condutor] em um cabo submarino seria, no que concerne às deduções físicas a serem feitas a partir desta determinação, preferível do que um número de diferentes fios isolados sob o mesmo revestimento. Tenho poucas dúvidas, mas os fios de Varna e Balaklava<sup>74</sup> serão os melhores já construídos para o propósito.

281

Sem contudo saber exatamente o que será o "retardo" em termos do elemento de tempo "*a*" dos diagramas, podemos julgar que o retardo, se estimado de maneira similar, seria encontrado em outros cabos de dadas dimensões. Assim, se o retardo em 200 milhas [≈ 320km] entre Greenwich e Bruxelas for um décimo de segundo, o retardo em um cabo igual com similar seção transversal, estendido por meio mundo (14.000mi) [≈ 22530km!] seria de:

$$\left(\frac{14000}{200}\right)^2 \times \frac{1}{10} = 490 \text{ segundos, ou } 8\frac{1}{6} \text{ minutos ;} \quad (46)$$

e no cabo telegráfico (400 milhas) entre Varna e Balaklava, do qual a capacidade eletrostática por unidade de comprimento pode ser algo em torno de 50% maior que o primeiro [entre Greenwich e Bruxelas], enquanto que o poder condutor do fio é aproximadamente o mesmo, o retardo pode ser esperado ser de

$$\left(\frac{400}{200}\right)^2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5} \text{ segundos .} \quad (47)$$

A taxa a partir da qual sinais distintos poderiam ser propagados para a extremidade remota seria talvez de um sinal por quarto de hora [i.e. um sinal a cada 15 minutos] no primeiro e cerca de dois sinais no último caso.

[Fim da tradução]

## Considerações finais: sobre a analogia eletricidade x calor

Em seu famoso romance, *Hard Times*, Charles Dickens descreve a figura de um pragmático superintendente escolar, preocupado com questões puramente lógicas e factuais, retratado pelo grande escritor como um “homem de números e cálculos”. Thomas Grandgrind, é, em essência, uma figura satírica idealizada por Dickens para descrever a mentalidade de um homem, sobretudo inglês, do século XIX: a “era Vitoriana”. No que concerne às figuras da ciência, pode-se igualmente imaginar um pensamento similar e quase homogêneo: a ideia de um mundo mecânico, em um modo Newtoniano de encarar a realidade, na eventual busca por uma dinâmica geral, que pudesse abarcar as realidades em foco.

Thomson, assim como alguns de seus contemporâneos e sucessores, acreditava que uma teoria matemática deveria ser desenvolvida a partir de um nível visualizável, independente de modelos mecânicos, o que era uma tendência em meados do século dezenove, especialmente entre os físicos e engenheiros britânicos. Analogias geométricas eram a melhor maneira, acreditavam, para atestar uma teoria física baseada em observações empíricas, como no caso do cabo transatlântico de telégrafos, assim como Fourier fizera, anos antes com a “matematização do calor” [nas palavras do próprio Kelvin].

A ideia, compartilhada por quase todos — e que, de certa forma, persiste até os dias atuais — de que equações diferenciais poderiam descrever virtualmente qualquer processo físico em uma escala macroscópica [e por que não dizer, geométrica], era encarada com naturalidade para pensadores como Thomson, mesmo que o processo fosse ainda desconhecido.

Enquanto tal doutrina possa ser aplicada a qualquer teoria dinâmica, uma mudança de ênfase começou a tomar rumo partir da segunda metade do século: teorias anteriores, como as de Green, Stokes e do próprio Thomson, que focavam estritamente na observação direta dos processos por meio de medições empíricas, começaram, sutilmente, a buscar legitimação das estruturas matemáticas por si mesmas, sendo então estruturadas de forma a “se encaixarem” nos resultados experimentais consistentes com uma suposta dinâmica geral. Foi o que Thomson fez com a teoria do calor de Fourier, utilizada no problema do cabo transatlântico de telégrafos. A analogia entre eletricidade e calor consistiu, justamente, em ajustar a equação do calor de acordo com a conveniência, deliberadamente ignorando, por exemplo, a auto-indutância do cabo, de proporções colossais, e eliminando (omitindo) a expressão para o termo de “fugas” da equação, mesmo com indícios de que o fenômeno não se processava dessa maneira, como outros tiveram a ocasião de asseverar, como Faraday.<sup>75</sup> Isto pode mostrar, inclusive, como o conjunto de crenças em determinada estrutura pode influenciar a percepção que se têm da realidade.

O lançamento bem sucedido do primeiro cabo para comunicações telegráficas viria a mudar, para sempre, a estrutura não apenas da economia, mas da ciência e tecnologia mundiais. A colaboração de Thomson e Stokes não só teve relevante importância na realização prática do cabo atlântico, como seu modelo, uma mistura de analogias e conceitos envolvendo a eletricidade e o calor — que de certa forma reformula o conceito Newtoniano de ação a distância,<sup>76</sup> e que passaria gradualmente para a mecânica de um campo [que seria um dos pontos de partida para os trabalhos de Maxwell e os seus seguidores] — direcionou o pensamento dos cientistas para a aceitação de uma nova teoria nascente, a do campo eletromagnético de Michael Faraday, criando um verdadeiro mercado para ela.

## Notas e referências bibliográficas

**Danny Augusto Vieira Tonidandel** é professor do departamento de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Ouro Preto e doutorando pelo programa de pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais. E-mail: tonidandel@ufop.edu.br.

**Wallace do Coutro Boaventura** é professor titular do departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais.

**Antônio Emílio Angueth de Araújo** é professor titular (aposentado) do departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais.

- 1 PLATÃO. A república. Martin Claret, 2006. Tradução de Pietro Nasseti, livro VII, p.210.
  - 2 BEKENSTEIN, J. D. Information in the holographic universe. *Scientific American*, v. 17, n. 1, p. 1-84, 2007.
  - 3 MAXWELL, J. On faraday's lines of force. *Transactions of Cambridge Philosophical Society*, v. 10, p. 155–229, Dez. 1855.
  - 4 HESSE, M. B. *Forces and Fields: a study of action at a distance in the History of Physics*. New York: Philosophical Library, 1962, p.22.
  - 5 Um exemplo disso foi a famosa expressão de Heirich Hertz, sobre a então nascente teoria eletromagnética: "A teoria de Maxwell é o sistema de equações de Maxwell", em: HERTZ, H. *Electric Waves: Being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity Through Space*. New York: Dover, 1893, p. 21. Traduzido por D.E. Jones a partir da primeira edição de 1892.
  - 6 THOMSON, W. On the theory of the electric telegraph. *Proceedings of the Royal Society of London, The Royal Society*, v. 7, pp. 382–399, 1854. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/111814>>.
  - 7 FOURIER, J.-B. J. *The analytical theory of heat*. New York: Dover Publications, 1955. Traduzido para o inglês, com notas, por Alexander Freeman a partir da primeira edição de 1822.
  - 8 FARADAY, M. *Experimental Researches in Electricity*. Londres: Richard Taylor and William Francis, v.3, p. 508, 1855.
  - 9 BRIGGS, A; BURKE, P. *A social history of the media: from Guttemberg to the internet*. Cambridge: Polity, 3. ed. 2009.
  - 10 MURRAY, J. *A story of the telegraph*. Montreal: John Lovell & son, 1. ed. 1905. Disponível em <<https://archive.org>>.
  - 11 Para uma história da telegrafia elétrica no Brasil, ver: SILVA, M. C.; Moreira, I. C. A introdução da telegrafia elétrica no Brasil (1852-1870).
  - 12 COOKSON, Gillian. *Submarine cables: Novelty and innovation, 1850-1870*. *Transactions of The Newcomen Society*, v. 76, p. 207-219, 2006.
  - 13 A comunicação por meio de cabos submarinos teve início alguns anos antes, sendo que um cabo experimental foi lançado no estreito de Dôver [parte mais estreita do canal da mancha, com aproximadamente 33 km], entre a França e Inglaterra, em 1850, tendo falhado logo após seu lançamento. Um ano depois, um novo cabo, que possuía cerca de 7 toneladas e era revestido com a seiva vegetal chamada "gutta-percha", foi lançado com sucesso no mesmo estreito.
  - 14 ROYAL Society, Josiah latimer clark - F.R.S. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, v. 28, p. 667–672, Aug. 1889. Disponível em: <<https://bit.ly/2J0xill>>. Acesso em 27 ago. 2016. Clark observou o fenômeno no (então recém lançado) cabo anglo-dinamarquês, que possuía algumas centenas de quilômetros. Era um construtor de ferrovias que aprendeu o ofício observando o irmão, Edwin Clark, que era Engenheiro Civil. Tal detalhe é importante se observarmos que a própria telegrafia terrestre se aproveitava inicialmente das linhas ferroviárias para o lançamento das linhas de transmissão. Em 1850, a convite do presidente da recém formada *Electric Telegraph Company*, Latimer e seu irmão passaram a integrar a equipe da ETC e foram apresentados ao ramo da telegrafia elétrica. Boa parte, inclusive, dos primeiros Engenheiros Eletricistas veio dos ramos de Engenharia Civil.
  - 15 FARADAY, M. *Faraday's Experimental Researches in Electricity: The First Series (Science Classics Module for Humanities Studies)*. Santa Fe, New Mexixo, USA: Green Lion Press, 2004. Inclui texto integral dos "Experimental Researches", rascunho biográfico de Faraday, além de comentários do editor, H. J. Fisher.
  - 16 CHAIB, J. P. M. de C.; ASSIS, A. K. T. Sobre os efeitos das correntes elétricas - tradução comentada da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista da SBHC, Rio de Janeiro*, v. 5, n. 1, p. 85-102, jan | jul 2007.
  - 17 WISE, M. N. The flow analogy to electricity and magnetism, part i: William Thomson's reformulation of action at a distance. *Archive for History of Exact Sciences, Springer-Verlag*, v. 25, n. 1, pp. 19-70, 1981. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00357201>>.
  - 18 WILLIAMS, L. P. *The Origins of Field Theory*. Maryland, USA: University Press of America, 1980. v. 1. Publicado originalmente por Random House em 1966.
  - 19 OHM, G. S. *The Galvanic Circuit Investigated Mathematically*. New York: Kraus Reprint Co., 1827. v. 1. Traduzido da edição original por William Francis, da Universidade de Berlim. Disponível em <<http://books.google.com/>>.
  - 20 MAXWELL, J. C. On action at a distance. *Proceedings of the Royal Institution of Great Brittain*, v. 7, p. 44–54, 1873. Neste artigo, Maxwell faz uma síntese clara do conceito de tensão baseado na ideia das linhas de força de Faraday:
  - 21 FARADAY, M. *Experimental Researches in Electricity*. Londres: Richard Taylor and William Francis, v.3, p. 508, 1855.
  - 22 THOMSON, W. Inaugural address of the new president: Ether, electricity, and ponderable matter. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, v. 18, n. 77, 1889, p.10. Discurso de posse de Thomson como presidente do IEE, em que relata os motivos do seu envolvimento com os problemas da telegrafia submarina e sua parceria com George Stokes, que estava na plateia.
  - 23 FOURIER, J.-B. J. op. cit.
  - 24 THOMPSON, S. P. *The life of William Thomson, baron Kelvin of Largs*. Macmillan, 1910. v. 2. Digitized by The University of California Libraries. Disponível em: < <https://bit.ly/2yyFaSQ> >. Acesso em: 13 jan. 2017.
  - 25 THOMSON, W. On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies, and its connexion with themathematical theory of. electricity. In: Reprint of papers on electrostatics and magnetism. London: Macmillam & Co., 1872. From Cambridge Mathematical Journal, Feb. 1842. Reprinted PhilosophicalMagazine (1854, first half-year). Disponível em: <<https://archive.org/details/reprintofpaperso00kelv>>.
  - 26 GREEN, G. *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Journ. f. Math, v. 39, n. 1, 1852. Reimpressão doo originalmente publicado em Nottingham, 1828.
  - 27 THOMSON, W. op. cit., 1854.
  - 28 THOMSON, W. On the electro-statical capacity of a leyden phial and of a telegraph. Reprint of wire insulated in the axis of a cylindrical conducting sheath. In: \_\_\_ papers on electrostatics and magnetism. London: Macmillam & Co., 1872. From the Philosophical Magazine, 1855, first half-year.
- Neste engenhoso artigo, submetido como anexo e enviado à Royal Society, Thomson deriva a relação para obtenção da capacitância para um capacitor cilíndrico, conhecida de todo estudante de física e engenharia elétrica na atualidade, que vale ser comentada por seu valor histórico e didático. Nele é feita a analogia entre uma garrafa de Leyden [dispositivo precursor dos capacitores modernos] e o cabo submarino, em que é possível perceber, nas "entrelinhas", que duas perguntas chave deveriam estar fervilhando em sua mente: Admitindo que dois pontos estejam em potenciais elétricos diferentes  $V$  e  $V'$ , o que aconteceria caso as duas superfícies equipotenciais estivessem sujeitas a diferentes temperaturas? E se as grandezas temperatura e potencial elétrico fossem, de certa maneira, análogos? A palavra "potencial" foi utilizada por Thomson para designar uma superfície equipotencial, em analogia a duas superfícies submetidas a temperaturas diferentes, isto é, nas quais existe um gradiente de temperatura, possibilitando uma transferência

de calor. Então, Thomson afirma, por analogia com o calor, que se as duas superfícies fossem mantidas em potenciais diferentes,  $V$  e  $V'$ , os potenciais [elétricos] das duas superfícies, ao longo de uma linha disposta radialmente entre elas, estariam, por conseguinte, em “progressão aritmética”. E por mais estranha que soe esta última expressão, Thomson faz uma definição — ainda que não muito clara e, talvez, inconsciente — do campo elétrico presente em um capacitor, ideia defendida pelo grande experimentalista, Faraday. A “progressão aritmética” indica que a taxa de variação do potencial através do ponto  $P$  seria igual a  $\frac{V-V'}{z}$ , que poderia ser assim traduzido na terminologia moderna. É interessante observar, aliás, que a destreza mental de William Thomson superava, em muito, a inexistência de ferramentas mais adequadas ao tratamento do problema à época, como é o caso do cálculo vetorial, que seria desenvolvido por Heaviside e Gibbs anos mais tarde, como linguagem fundamental do eletromagnetismo. Como  $\vec{E} = -\nabla V$ , em que  $\nabla V$  representa o gradiente do potencial e  $\vec{E}$  o campo elétrico, o campo é definido “implicitamente”. O estabelecimento desta relação amarra, inclusive, o conceito de “diferença de potencial elétrico” à ideia de força central [i.e. “força” como o gradiente de um “campo” escalar, o “potencial”], proposta por Green [nota 26]. Isto também mostra que o potencial, considerado isoladamente, não tinha significado físico para Thomson, mas sim a diferença entre eles, independentemente do referencial.

29 *NT* Aliás, ao considerar um cabo transatlântico como um grande capacitor, Thomson percebeu que sua capacitância equivaleria a uma garrafa de Leyden de, aproximadamente, 771 m<sup>2</sup> de área superficial. Sua capacitância era colossal!

30 *NT* No artigo original foi utilizada a notação  $k$  para a resistência elétrica específica e  $c$  [minúscula] para a capacitância. No entanto, por motivos didáticos, resolvemos utilizar as notações  $R$  e  $C$ .

31 *NT* No artigo original Thomson utilizou a notação  $Y$  para designar a corrente elétrica, em Ampères ( $A$ ).

32 *NT* Sistema Gaussiano.

33 *NT* A analogia do calor para compreender fenômenos eletromagnéticos de Thomson nasceu da eletrostática, em que as Leis de Newton da mecânica são a linguagem principal. No primeiro artigo da série [quando contava pouco mais de] 17 anos de idade [1842] é proposta uma conexão entre o conceito de potencial elétrico — desenvolvido por Green em 1828 [nota 28] — e temperatura [isotermas e equipotenciais], considerando tanto a eletricidade quanto o calor como fluidos “muito finos”, em suas palavras, regidos por forças centrais. Para duas superfícies consideradas [geometricamente] análogas, uma condutora de calor e outra eletrificada, o autor advoga que o fluxo de calor e a força de atração em um “ponto elétrico” [que traduziríamos como uma carga de prova] são proporcionais. Assim, a direção e sentido do fluxo de calor correspondem ao da atração entre duas superfícies carregadas. Em resumo: o sentido do fluxo de calor é o mesmo da força elétrica para superfícies [que ele considerou] geometricamente análogas.

34 *NT* O modelo de Thomson da equação diferencial do calor (ou equação da difusão) para o cabo elétrico seria denominado por um Engenheiro moderno como a “linha de transmissão não indutiva e sem fugas”. Para obter a equação do calor, Thomson utilizou, surpreendentemente, a relação de Ohm e a Lei de Kirchhoff das tensões. Estabelece ele, primeiramente, as chamadas condições de contorno do problema, considerando como parâmetros principais a resistência  $R$  e a capacitância [que ele chama de capacidade eletrostática], desconsiderando a autoindutância do cabo, todas por unidade de comprimento

$x$ . Argumenta ainda que haveria uma queda de tensão ao longo do comprimento do cabo, em consequência à resistência à passagem da eletricidade [corrente elétrica]  $i(x, t)$ . Isto é, a distribuição de potencial seria:  $\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri(x, t)$ . Da mesma forma, a [distribuição de] corrente em relação à variação de tensão seria determinada pela capacitância do cabo:  $\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$ . Eliminando  $i(x, t)$  substituindo a segunda relação na primeira,

derivando-a com relação à  $xx$ , tem-se que  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R \frac{\partial i}{\partial x}$ . Substituindo na segunda relação, vem:  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = R \left( -C \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -RC \frac{\partial v}{\partial t}$ .

35 *NT* Nunca tanta expectativa e dinheiro estavam envolvidos na solução de uma equação diferencial. Caso resolvessem corretamente o problema, todo o investimento com o lançamento de um cabo submarino poderia ser viável: e Thomson já conhecia bem a expressão, pois já havia se deparado com ela em sua adolescência: considerando como parâmetros primordiais a resistência e a capacitância do cabo, salta, aos seus olhos, a equação exaustivamente estudada por Fourier.

36 *NT* Isto é, considera como sinal de entrada a impulso unitário [ou delta de Dirac].

37 *NT* Thomson utilizou a notação “ $n$ ” para designar a frequência angular. Resolvemos, por motivos didáticos, utilizar a notação “ $\omega = 2\pi/T$ ”.

38 *NT* A suposição, que deriva da genialidade de Fourier, é, na verdade, um artifício para eliminar o termo  $RC$  [ $kC$  na notação original] da equação do calor (3). Isto é, sabendo-se, pela regra da cadeia, que  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{RC}$ . Assim,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \sqrt{RC} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -RC \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ . Igualando

as duas equações, tem-se, portanto:  $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ .

39 *NT* Em suma, apresenta a equação (do teorema) integral de Fourier (a atual transformada inversa) como solução para o problema.

40 *NT* A expressão “solução primária” a que Thomson se refere é, em suma, a solução obtida por Fourier para o problema do calor, no qual ele buscava determinar o perfil de temperaturas em um sólido “fino” (e infinito, extensão do problema inicial) condutor de calor. Ao aplicar uma das condições de contorno, ele chegou explicitamente à temperatura inicial na forma de uma equação integral (o que hoje entenderíamos como a transformada inversa de Fourier), da mesma como vez para o caso “finito”, em que obteve a temperatura inicial de um sólido (com periodicidade espacial) condutor de calor, na forma de uma soma de cossenoides, a famosa série de Fourier. No caso da formulação do problema, Fourier estava interessado no perfil de temperaturas em regime permanente e, por isso, a equação do calor se reduzia à equação de Laplace, i.e.  $\nabla^2 U = 0$ .

41 *NT* Em verdade, Thomson investiga diversas soluções particulares para a equação do calor aplicada ao problema da transmissão de sinais elétricos. No primeiro caso, considera o Teorema Integral de Fourier (transformada inversa) já que se tratava de um cabo “semi-infinito”, a exemplo do sólido linear condutor de Fourier. A primeira estratégia foi a de imaginar uma entrada impulsiva [como condições de contorno para a equação diferencial em termos da variável  $Z$ ], que representaria uma chave sendo rapidamente acionada, isto é, uma entrada do tipo  $E(t) = VH(t) - VH(t - T)$ , em que  $H(T)$  seria a atual função degrau unitário ou função de Heaviside e  $V$  um valor finito de tensão. Dessa forma, é fácil demonstrar que, nestas condições, o lado direito da equação (6) é convergente para todo  $Z$  e zero para  $Z \rightarrow \infty$ , que satisfaz a equação diferencial (3), chegando-se ao resultado para a distribuição de tensão  $v(z, t)$  da equação (7). Um outro caso particular, agora de maior interesse, foi admitir uma solução periódica, com sinal de entrada

$v(0, t) = \Re(e^{j\omega t}) = \cos(\omega t)$ , em que  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ . Além disso, considerou que as variáveis espacial e temporal eram separáveis, que resulta, após consideráveis operações algébricas [após desconsiderar a parte imaginária por considerá-la insignificante do ponto de vista físico], em:  $v(x, t) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\omega RC}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{1}{2}\omega RC}x\right)$ , o que significa uma solução oscilatória com amplitude decrescente no tempo, a exemplo do que um surfista enxergaria se estivesse na crista de uma onda. Ele não veria a onda, mas sentiria a amplitude decrescendo monotonicamente. Ou em termos de  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{T}$ , como no artigo original [ $\mathbf{z} = x\sqrt{RC}$  e  $\omega = 2\pi/T$ ]:  $v(\mathbf{z}, t) = e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}RC}z} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - z\sqrt{\frac{\pi}{T}}\right)$ , o que mostra que Thomson estava ligeiramente enganado, em seus cálculos ou em sua apresentação.

42 NT O autor utilizou a notação  $i = \sqrt{-1}$  para designar o número imaginário. Neste artigo, para evitar a confusão natural para a notação de corrente elétrica, resolveu-se utilizar  $j = \sqrt{-1}$  como é usual na Engenharia Elétrica.

43 NT Isto é, o impulso unitário se transforma no delta de Dirac, que representa um “botão” do telégrafo sendo rapidamente acionado.

44 NT Esta é uma equação de formato bem conhecido, e que, sob determinadas transformações, é a expressão da transformada de Fourier do pulso Gaussiano ( $f(t) = e^{-\alpha t^2}$ ), em homenagem ao matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855):  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ , ou, escrevendo na notação que indica a transformada de Fourier como uma relação bijetiva [i.e. uma relação de um-para-um, com a notação “ $\leftrightarrow$ ”]:  $e^{-\alpha t^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ .

45 NT Isto é, admitindo um cabo infinito e não mais “semi-infinito”, abstração utilizada pelo autor no início de sua exploração.

46 NA Podemos inferir que os atrasos dos sinais são proporcionais ao quadrado das distâncias, e não às distâncias simplesmente; e uma vez que diferentes observadores, acreditando que encontraram uma “velocidade da propagação elétrica,” podem bem ter encontrado resultados amplamente discrepantes; e a aparente velocidade seria, *ceteris paribus* [expressão em Latim que significa “tudo mais é constante”], tanto menor quanto maior for a dimensão do fio usado na observação. (Compl. Art. LXXVI. abaixo).

47 NT Interessante notar que o resultado expressava que o retardo do sinal máximo de corrente dependia de  $x^2$  ao invés de  $x$ , como seria de se esperar. O atraso em si não causava tanto espanto, mas a dependência do quadrado da distância causou muita desconfiança. Se estivesse correta, a “Lei dos quadrados” poderia inviabilizar a telegrafia a longas distâncias. E um dos opositores mais ferrenhos era o médico Inglês e autodeclarado “especialista” em assuntos elétricos, Edward Orange Wildman Whitehouse. Por ter realizado (presumidamente) experimentos por conta própria, e sendo partidário da ala de “homens práticos” [daqueles que desconfiavam bastante da matemática] da Engenharia, Whitehouse — que havia sido guindado à chefia da *Atlantic Telegraph Company* — afirmou que, para a transmissão a longas distâncias, bastaria que os sinais fossem transmitidos a partir de uma fonte de alta tensão [de alguns milhares de volts][nota 25]. Não é necessário dizer que a decisão acatada pelo conselho diretor da companhia, mesmo após ter sido veementemente refutada por Thomson, acarretaria em um imenso fracasso no cabo de 1858, que não durou mais que algumas semanas. Em virtude disso, Whitehouse foi demitido do cargo e, dada a publicidade negativa, o fenômeno provocaria uma crença quase generalizada de que a “Lei dos quadrados” de Thomson fosse realmente um princípio da Natureza, o que estava longe de ser. No aspecto sociológico, é possível perceber que a percepção social foi alterada, e as personagens envolvidas mais diretamente com a questão começaram a enxergar em Thomson alguém importante para decidir sobre o assunto, levando sua visão acerca da importância da matemática a um patamar mais elevado de consciência entre a “população”. O problema foi que, neste aspecto, Thomson estava errado, e o modelo, embora matematicamente consistente, era fisicamente inconsistente. Esta má interpretação provocaria um atraso na aplicação prática da telegrafia submarina por um longo tempo, até a descoberta de que a solução poderia estar mais “do lado de fora” do cabo, com os trabalhos de Heaviside sobre o papel da autoindução, no final dos anos 1870.

48 NT Em uma segunda carta, enviada dois dias após a primeira, Thomson continua sua análise do problema, analisando para outra série de casos particulares, e que apresentará, em seguida, a análise de Stokes. Vale ressaltar que a equação (17) foi a última a ser numerada no artigo original. Tomamos então a liberdade de continuar enumerando-as para facilitar a leitura.

49 NA Vejam as curvas abaixo.

50 NT Outra tentativa de Thomson consistiu em aplicar as séries trigonométricas de Fourier na tentativa de resolver a equação do calor adaptada à propagação telegráfica. Desejava saber o quanto a forma dos sinais de entrada [de tensão] seriam distorcidos e qual a forma da saída — procurando o valor máximo de corrente, nos EUA, produzido por determinada “ação” da bateria, na Inglaterra, i.e., dependendo do sinal de entrada. E começa por resolver a EDO do calor, sem o termo de fuga, aplicando o método que Fourier havia estabelecido anos antes, a “separação de variáveis”. A condição inicial para o problema é  $v(x, 0) = f(x)$  aplicado no instante inicial, para  $0 \leq x \leq L$ , e as condições de fronteira:  $v(0, t) = v(L, t) = 0 \Rightarrow$  extremos do cabo aterrado.

51 NT Neste ponto Thomson comete outro engano na utilização da variável  $v(x, t)$ . Para manter a correção no desenvolvimento do raciocínio, é necessário utilizar a notação  $u(x, t)$ , já que, para eliminar o termo  $-hv$  da equação (18), é preciso fazer a substituição  $u(x, t) = e^{-\frac{ht}{RC}}v(x, t)$ . Apenas o termo do somatório na equação (19) corresponde a  $v(x, t)$ . Outro equívoco é fornecer incorretamente a solução, que deveria ser algo da forma  $u(x, t) = e^{-\frac{ht}{RC}}v(x, t) = e^{-\frac{ht}{RC}} \cdot \sum_{k=0}^n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}RCt}$ , com o termo  $RC$  no numerador da potência na função exponencial.

52 NT Cabo lançado em 1857, com 286km, entre a Sardenha e atual Argélia, ex-colônia Francesa. Este cabo funcionou por vários anos.

53 NT Thomson utiliza a expressão idiomática “*distinctness of utterance*” para enfatizar a capacidade de distinguir entre dois sinais diferentes, geralmente enviados em código Morse.

- 54 NT Obviamente a palavra “facilmente” não representa o colossal investimento que já estava sendo realizado para o lançamento do cabo transatlântico, que aconteceria dali a quatro anos. Na questão econômica, não podemos deixar de salientar o papel fundamental do “gênio financeiro” por trás da empreitada, o industrial americano Cyrus West Field (1819-1892). Aos 34 anos 1854, Field já havia se aposentado por se tornar um dos primeiros milionários americanos [a palavra milionário, inclusive, havia sido cunhada há pouco] atuando na indústria do papel. Por anos Field estaria obcecado com a ideia de se lançar um cabo que unisse os continentes Europeu e Americano, e se tornaria um dos fundadores da New York, Newfoundland and London Telegraph Company, criada para levar o projeto, tendo estado presente, a bordo do “lado americano” [o navio USS Niagara] em todas as tentativas de lançamento, desde o primeiro fracasso em 1858 até o lançamento bem sucedido em 1866.
- 55 NA De acordo com um método explicitado em um artigo intitulado “*On the critical values of the sums of periodic series,*”, *Camb. Phil. Trans. vol. viii. p. 533.*
- 56 NT Embora o prof. William Thomson tenha abordado o problema a partir de muitos casos particulares, foi Stokes quem obtém a solução para um caso mais geral, em que a função  $f(t')$  representa um sinal de entrada proveniente do “botão” do telégrafo, em que diversas situações poderiam ser estudadas.
- 57 NT Um ano antes deste resultado, no artigo “*On transient electric currents*”, publicado em junho de 1853 na *Philosophical Magazine*, Thomson notaria que a descarga elétrica através de um capacitor, ligado em série com um resistor e um indutor [RLC série] possuía uma natureza oscilatória. Anos mais tarde, Heaviside descobriria, por sua vez, que determinadas “oscilações elétricas” ocorriam em linhas telegráficas aéreas: HEAVISIDE, O. *Electrical papers*. London: Elibron Classics, 1892. v. 2, p.83. O que Heaviside [presumidamente] ignorava era que tinha sido Maxwell o primeiro a abordar o problema, após um convite que recebeu para visitar o laboratório do [futuro Sir] William Robert Grove, para observar curioso fenômeno que ele havia descoberto, enquanto trabalhava com uma bobina de indução alimentada por uma corrente alternada. A bobina de indução ou bobina de Ruhmkorff era um dos poucos equipamentos elétricos de laboratório da época, e consistia em um transformador de relação de tensão muito alta, no qual se aplicava uma tensão contínua intermitente no primário, de poucas espiras, e obtinha-se assim uma tensão elevada no secundário, que por sua vez provocava um arco elétrico num eletrodo ponta-ponta nele conectado. A aplicação da tensão contínua advinha de uma pilha e a intermitência era causada por uma chave, operada magneticamente que, quando fechada, inseria um capacitor em série com o primário do transformador, e quando aberta, curto-circuitava o capacitor. Se no primário houvesse uma circulação de corrente e a promoção de um arco no secundário, a chave fecharia por atração magnética e colocava o capacitor em série com o primário, fazendo a corrente se anular e a chave se abria. Ao se abrir, a mesma chave curto-circuitava o capacitor e fazia circular novamente uma corrente no primário do transformador, causando outro arco. Em operação normal, esse arranjo promovia um arco elétrico quase permanente no secundário, sendo esse arco o objeto de pesquisa de Sir W.R. Grove. No curso de sua pesquisa, Grove substituiu a pilha por uma máquina elétrica funcionando como gerador de tensão e observou, numa pequena comunicação à Sociedade Real [Grove, W.R. *Phil. Mag. S. London, v. 35, 1868, p.184.*], que o arco no secundário aumentava muito de intensidade se o capacitor estivesse incluído no circuito, e desaparecia se fosse removido. Este é o fenômeno que ele apresentou a Maxwell. Na manhã seguinte ao dia do encontro no laboratório de Sir W.R. Grove, Maxwell endereçou ao famoso cientista uma carta, que foi enviada pelo destinatário à *Philosophical Magazine*, que a publicou em maio de 1868. Nela, Maxwell desvendava o aparente mistério, calculando a corrente alternada que passava pelo primário do transformador e enfatizava o papel do capacitor em série com a indutância do primário, num fenômeno a que atualmente damos o nome de ressonância [Maxwell, J.C. *Phil. Mag. S. In a letter to Mr. Grove, F.R.S. Londres, v. 35, 1868.*].
- 58 NT 1 pé  $\approx 0,3m$ .
- 59 NT Com esta expressão o autor se refere ao que entendemos ser o sistema de unidades gaussiano.
- 60 NT Considerando a equação da difusão, que deriva da mecânica de Newton, o resultado atesta o efeito do mecanismo de ação a distância, o que, obrigatoriamente, tem implicações de que a velocidade de propagação elétrica poderia ser ilimitada, o que era perfeitamente aceitável à época. Vale ressaltar que, até este ponto, as equações fundamentais do eletromagnetismo ainda não haviam sido estabelecidas, bem como um dos postulados fundamentais da teoria da relatividade, em relação à constância da velocidade da luz.
- 61 NT Aqui Thomson passa a tecer recomendações de natureza prática para contornar o problema da distorção de fase dos sinais. O resultado poderá ser consultado nos últimos parágrafos do artigo.
- 62 NT O autor utiliza o verbo “weigh”, que é traduzido literalmente como “pesar”. No entanto, pode também ser traduzido como medir, avaliar, ponderar, sendo que escolhemos esta última significação, de acordo com o contexto e com a maneira que tal conceito poderia ser melhor explicitado, nos dias atuais.
- 63 NT 1 Pé = 0,0929m<sup>2</sup>.
- 64 NT O que configura a chamada “força central”.
- 65 NT Termo traduzido em consonância com as considerações feitas da nota 63.
- 66 NA A expressão rigorosamente correta, a qual pode ser facilmente obtida por meio do método das “imagens elétricas”, não necessita ser dada aqui.
- 67 NT Cremos que o autor se refira, neste caso, aos diversos fios recobertos isoladamente [normalmente de tecido] e enrolados formando um cabo, que seria, por sua vez, recoberto pelo isolamento de gutta-percha. Este último seria, finalmente, revestido por um cilindro de ferro.
- 68 NT Isto é, a resistência específica do fio por unidade de comprimento.
- 69 NA Veja um artigo sobre a aplicação do princípio geral do efeito mecânico para a teoria das forças eletro-motivas, publicado em *Philosophical Magazine*, em dez. 1851.
- 70 NT i.e. carga unitária.
- 71 NA Como foi demonstrado no artigo “*On transient electric currents*”, publicado em junho de 1853, na “*Philosophical Magazine*”.
- 72 NA Veja o artigo referido anteriormente [nota 72], como publicado em *Phil. Mag.*, Dez. 1851.
- 73 NT Como coroamento ao seu trabalho pioneiro Thomson desenvolve um instrumento ultrasensível, o galvanômetro de espelho, que utilizava um feixe de luz proveniente de uma vela para amplificar o sinal, funcionando como “agulha”. Nos arriscamos a afirmar que a invenção deste aparelho que, além de torná-lo imensamente rico após o sucesso do lançamento do cabo em 1866, garantiria de vez o lugar do Jovem professor na “Câmara dos Lordes”, que o sagraria cavaleiro da Rainha, Lord (ou Lorde) Kelvin. Uma bela ilustração da invenção de Thomson pode ser consultada em: LARDNER, D.; BRIGHT, E. B. *The Electric Telegraph*. 3. ed. London: Lockwood & Co., 1867.
- 74 NT Cabo lançado em 1855 por ocasião da Gerra da Crimeia [confronto entre os impérios Britânico e Russo], que veio a falhar pouco tempo depois.
- 75 NT O próprio Thomson chegou a afirmar, anos mais tarde [ver THOMSON, W. *Mathematical and Physical Papers*. London: Cambridge University Press, v.1, 1882, p. 534] ter considerado a autoindução e deixado a anotação em um de seus cadernos de pesquisa [julho de 1852], mas acreditando que ela exerceria

um papel minoritário, considerou desprezível, dadas as dimensões do cabo transatlântico. Contudo, foi Oliver Heaviside [àquela altura, um operador de telegrafia desempregado de 26 anos, que possuía apenas o ensino fundamental] quem reformularia o conceito - a partir de uma série de 3 artigos começando com o seu "On The Extra Current" [ver HEAVISIDE, O. *Electrical Papers*. London: Macmillan and Co., v.1, 1892, p. 53] - dando importância ao papel da autoindutância e das fugas em um cabo real. Nesta análise, Heaviside obtém a equação que ficou conhecida como "equação do telegrafista", mas não foi o primeiro a obter a equação. Gustav Robert Kirchhoff, em impressionante artigo de 1857 [ver KIRCHHOFF, G. *Philosophical Magazine*. London, v. 13, n.4, 1857], obtém não apenas a equação do telegrafista para um fio elétrico, mas também propõe, quase 20 anos antes de Heaviside e um ano após a publicação do famoso artigo de Thomson, a propagação de ondas elétricas, prevendo inclusive a possibilidade da reflexão destas ondas em condutores de tamanho finito. Entretanto, além da questão da linguagem que acabou dificultando o acesso de outros cientistas à obra, Kirchhoff obteve seus resultados utilizando conceitos de ação a distância, tornando difícil a conciliação com a nascente teoria eletromagnética, já que a análise de Thomson, de certa forma uma teoria "híbrida", iria abrir, lentamente, os olhos do mundo para a aceitação da teoria de campo de Faraday, e que teria o seu mais proeminente expoente em James Clerk Maxwell. Heaviside, um Maxwelliano convicto, afirmaria anos mais tarde (1886) [Heaviside, O. op. cit., 1892, p.81] que ignorava a análise de Kirchhoff, e que não havia entendido nada quando tomou conhecimento dela.

- 76 *NT* Os Newtonianos do século dezoito, por exemplo, tentaram levantar sua ciência sobre um princípio [metafísico] de que as propriedades das coisas observáveis a partir de nossos sentidos poderiam ser considerados [ou assumidos como] propriedades de partículas que são, inerentemente, insensíveis, não-observáveis. Isto permitiu a redução de vários fenômenos, tais como a eletricidade e o calor para a ação de átomos ou partículas de dimensões finitas, se movendo através do espaço supostamente vazio.