DOI: https://doi.org/10.53727/rbhc.v17i2.895

DOSSIÊ

A grandeza sai de cena: a história do capítulo que Amoroso Costa decidiu não publicar

Quantity vanishes: the history of the chapter that Amoroso Costa decided not to publish

Rodrigo Rafael Gomes | Instituto Federal de São Paulo
rodrafagomes@ifsp.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-5346-3901

RESUMO Este trabalho aborda um capítulo não publicado do livro *As ideias fundamentais da matemática*, do matemático, engenheiro e astrônomo brasileiro Manuel Amoroso Costa. O exame dos rascunhos de próprio punho do livro, contidos no arquivo pessoal do autor, revelou a existência de um capítulo que Amoroso Costa escreveu para o livro, mas que decidiu suprimir, que trata do conceito matemático de grandeza. O conteúdo desse capítulo é discutido neste artigo, que também apresenta transcrições de alguns fragmentos da segunda versão do texto inédito. A análise do capítulo revela forte influência do lógico-matemático Louis Couturat, cujas ideias são aqui expostas, além de sugerir que o processo de abandono do paradigma da matemática como ciência da grandeza, na passagem do século XIX para o XX, pode ter repercutido no processo de elaboração do livro.

Palavras-chave história da matemática no Brasil – textos históricos – manuscritos de cientistas – axiomas de Burali-Forti – número.

ABSTRACT *This work deals with an unpublished chapter of the book The fundamental ideas of mathematics, by the Brazilian mathematician, engineer and astronomer Manuel Amoroso Costa. Examination of the book's own handwritten drafts, contained in the author's personal archive, revealed the existence of a chapter about the mathematical concept of quantity that Amoroso Costa wrote for the book but which he decided to suppress. The content of that chapter is discussed in this paper, which also presents transcripts of some fragments of the second version of the unpublished text. The analysis of the chapter reveals strong influence of the logician and mathematician Louis Couturat, whose ideas are exposed here, in addition to suggesting that the process of abandoning the paradigm of mathematics as a science of quantity at late 19th and early 20th century may have had repercussions on the process of preparing the book.*

Keywords *history of mathematics in Brazil – historical texts – manuscripts of scientists – Burali-Forti axioms – number.*

Introdução[1]

Nas primeiras décadas do século passado, o engenheiro, matemático e astrônomo Manuel Amoroso Costa (1885-1928) engajou-se, junto a outros acadêmicos brasileiros, em diversas ações de divulgação científica voltadas para a população ilustrada do Rio de Janeiro (Massarani, 1998). Entre essas iniciativas, destaca-se uma série de artigos expositivos sobre ciência e filosofia que escreveu para jornais da então capital federal, alguns cursos que ministrou por meio da Associação Brasileira de Educação (ABE) e dois livros: *Introdução à teoria da relatividade* e *As ideias fundamentais da matemática*.[2]

As atividades de Amoroso Costa em prol da ciência brasileira foram abruptamente interrompidas por um desastre aéreo que lhe ceifou a vida.[3] Felizmente, manuscritos e documentos seus foram guardados pela família, que posteriormente os doou ao Museu de Astronomia e Ciências Afins (Mast). Tal acervo, constituído por materiais diversos (iconográficos, cartográficos e textuais), foi integralmente digitalizado e está inserido na base digital de dados do Arquivo de História da Ciência do museu (Zenith).[4]

Entre os documentos que compõem o arquivo, encontram-se manuscritos de próprio punho da obra *As ideias fundamentais da matemática*, que foi publicada no ano seguinte ao do falecimento de seu autor. Há dois manuscritos do livro, nenhum deles idêntico à publicação. Aquele que está mais próximo do livro publicado compõe o dossiê AC.T.3.033,[5] enquanto o rascunho mais antigo, o dossiê AC.T.3.031.

O exame desse material revelou a existência de um capítulo, presente em ambos os esboços do livro (Figura 1), que não aparece na publicação. O conteúdo e a subdivisão do texto são os mesmos nos dois rascunhos, mas há diferenças na redação e no posicionamento desse capítulo em relação aos demais. O título do texto que terminou suprimido era "As noções de grandeza e de medida".

1 O presente trabalho é um produto da pesquisa de pós-doutoramento do autor, realizada junto ao Grupo de Pesquisa em História da Matemática (GPHM), da Universidade Estadual Paulista (Unesp) *campus* Rio Claro, sob a supervisão do professor doutor Sergio Roberto Nobre, que sugeriu ao autor o tema aqui abordado. Para realização da pesquisa, o autor foi contemplado com Afastamento Remunerado Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP).

2 O primeiro desses livros, publicado em 1922 pela Livraria Científica Brasileira, é considerado um dos primeiros textos sobre a teoria da relatividade no mundo (Eisenstaedt e Fabris, 2004). A obra foi reeditada em 1995 pela Editora da UFRJ, e nessa reedição há, no apêndice da apresentação do livro, a relação completa das obras impressas (livros e artigos) e das conferências de Amoroso Costa e, anexos, dois artigos sobre a relatividade que ele publicou originalmente em *O Jornal*. O segundo livro, que é o objeto do presente trabalho, foi publicado pela primeira vez em 1929, sob o título *As idéas fundamentaes da mathematica*. Em 1971, uma segunda edição, intitulada *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*, apareceu pela Editorial Grijalbo em parceria com a Editora da Universidade de São Paulo. Essa reedição contém, além do conteúdo da edição de 1929, uma introdução –composta por três textos: uma pequena biografia de Amoroso Costa escrita por Arthur Gerhardt Santos (1928-), a transcrição de um discurso de Lélio Gama (1892-1981) em sua homenagem e um artigo de Antonio Paim (1927-2021) que inclui relação das obras de Amoroso Costa – e algumas das conferências, artigos e ensaios produzidos pelo autor. Uma terceira edição, com o mesmo conteúdo da anterior, foi publicada em 1981 pelas editoras Convívio/Edusp.

3 Inúmeros textos e trabalhos acadêmicos contendo informações a respeito da vida e obra matemática de Amoroso Costa foram produzidos desde a sua morte, alguns deles disponíveis nas reedições dos livros acima. Uma das exposições mais recentes com esse viés pode ser encontrada em Silva (2022, p. 53-62).

4 Condição que permitiu ao autor deste trabalho consultá-lo remotamente em http://zenith.mast.br.

5 No inventário sumário do arquivo, esse dossiê é descrito como "Manuscritos do trabalho *Sobre a concepção da matemática pura*".

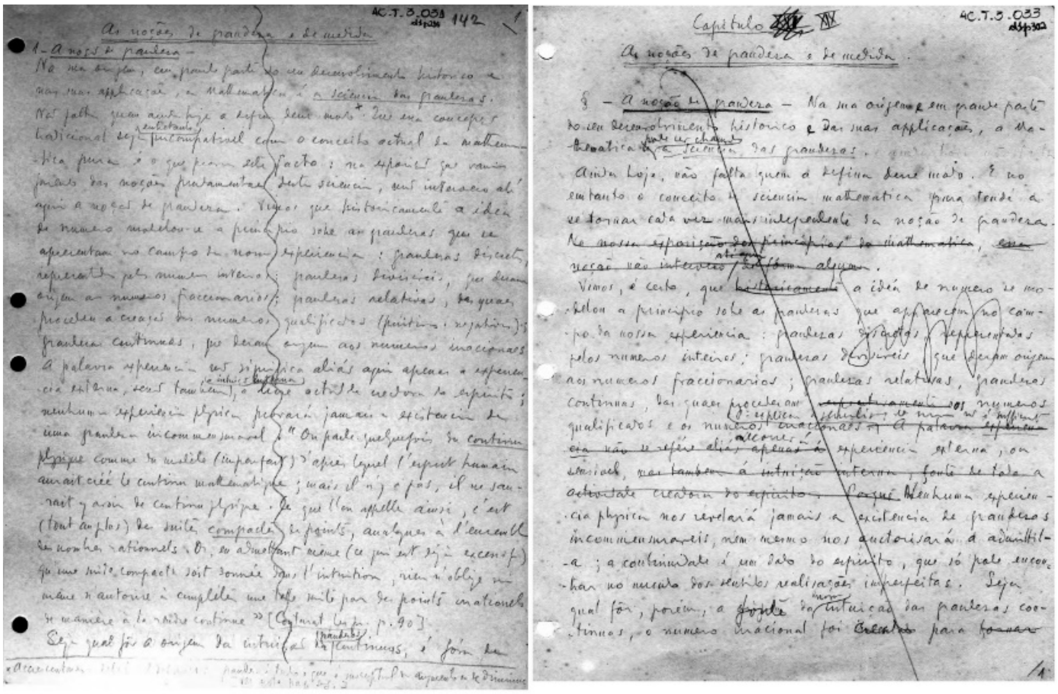


Figura 1: Primeiras folhas das duas versões do capítulo não publicado (mais antiga à esquerda), que estão entre os rascunhos do livro (dossiês AC.T.3.031 e AC.T.3.033, respectivamente).

Fonte: Costa ([s.d.-a], p. 231; [s.d.-b], p. 302).

Quando o livro de Amoroso Costa foi publicado, a noção de grandeza não era considerada um conceito fundamental pelos matemáticos. Até o século XIX, a matemática ainda era vista, por muitos, como a ciência da grandeza (Epple, 2003), mas esse cenário começou a mudar quando os matemáticos – ou, pelo menos, parcela significativa da comunidade matemática – passaram a considerar a noção tradicional de grandeza imprecisa e, portanto, insuficiente para fornecer uma fundamentação adequada aos conceitos da análise matemática (Ehrlich, 1994). Avanços na direção de uma definição rigorosa para as noções de número e continuidade sem referência àquela noção contribuíram fortemente para esse sentimento e, paulatinamente, na passagem do século XIX para o XX, o paradigma da matemática como ciência da grandeza foi sendo abandonado. Essa transformação certamente ecoou na forma como Amoroso Costa, na década de 1920, via a estrutura do edifício da matemática, podendo ser uma das razões para sua decisão de não incluir no livro um capítulo que já havia terminado sobre o tema, embora, em face das evidências disponíveis, isso não possa ser corroborado.

O texto de Amoroso Costa será abordado a seguir, mas primeiro será útil conhecer as circunstâncias de produção do livro, de cuja história participa a do capítulo não publicado. Para a (re)construção dessa história, serão considerados tanto documentos do arquivo do Mast (oriundos da base de dados Zenith) como jornais da época obtidos via Hemeroteca Digital da Biblioteca Nacional. Os aspectos histórico-matemáticos atinentes à segunda parte serão discutidos à luz de trabalhos produzidos pelos autores citados por Amoroso Costa em seus escritos.

Antes de prosseguirmos, é preciso estabelecer algumas convenções. Conforme mencionado acima, há dois esboços do livro; o mais antigo deles será doravante designado pela sigla RASC1 e o outro, por RASC2. Os fragmentos cujas transcrições são aqui reproduzidas foram extraídos todos do segundo e atualizados conforme as normas do português atual. As folhas digitalizadas do RASC2, assim como do RASC1, compõem um único arquivo digital, portanto, para que o leitor interessado possa cotejar as transcrições feitas para este trabalho com a digitalização dos originais, nas citações diretas de trechos desses manuscritos serão especificadas as páginas em que esses trechos são encontrados no documento digital.

Ao final deste trabalho é apresentada uma transcrição integral e editada do manuscrito da segunda versão do capítulo não publicado de Amoroso Costa, manuscrito esse que está contido no RASC2.

Um curso e um livro sobre a concepção atual da matemática pura

No triênio 1926-1928, Amoroso Costa ministrou três cursos sob os auspícios da ABE. "As ideias fundamentais da matemática" foi o primeiro deles,[6] realizado, em dez lições, no período de 3 de junho a 15 de julho de 1926.[7]

Na primeira lição, Amoroso Costa leu uma introdução, publicada na edição do dia seguinte de *O Jornal*, na qual apresentou os objetivos e o plano de estudos do curso. Essa introdução foi adaptada para o livro homônimo, aparecendo no RASC2 (para o RASC1, ele não elaborara uma introdução).

O objetivo do curso, Amoroso Costa teria exposto em sua leitura (Cursos..., 1926, p. 5), era "a concepção atual" da matemática pura, que resultara "de um longo e profundo trabalho de crítica das noções que constituem a estrutura da aritmética, da análise e da geometria, trabalho sobretudo realizado nos últimos cinquenta anos". Provavelmente em virtude do caráter pouco modesto de tal propósito, na apresentação do plano de estudos ele fez questão de assinalar a natureza necessariamente incompleta do programa proposto, que não tinha pretensão de "resumir em algumas lições a prodigiosa massa de resultados que constituem a matemática moderna, senão apenas mostrar de que modo se apresentam hoje ao geômetra as ideias sobre as quais se fundam essa ciência" (Cursos..., 1926, p. 5).

Com pequenas mudanças na redação, o que é dito na introdução, publicada em *O Jornal* a respeito do curso, está no livro. Uma breve passagem, porém, foi omitida, na qual Amoroso Costa explica que o conteúdo estava dividido em duas partes. Na primeira delas, ele trataria "das questões de metodologia, da 'forma' da ciência; na segunda parte, das ideias propriamente matemáticas, que são a sua 'matéria'" (Cursos..., 1926, p. 5). A utilização de uma terminologia de cunho metafísico nesse fragmento é um reflexo do interesse que Amoroso Costa nutria pela filosofia da matemática. Esse tema, assim como o da história da ciência, está presente em artigos que publicara e em conferências que realizara previamente,[8] tendo ele sido convidado

6 Os outros dois foram, respectivamente, "As geometrias não euclidianas", em seis lições, nos meses de julho e agosto de 1927, e "As geometrias não arquimedianas", em quatro lições, nos meses de agosto e setembro de 1928.

7 Informações depreendidas de jornais da época, consultados via Hemeroteca Digital da Biblioteca Nacional.

8 São eles: "Conferência sobre Otto de Alencar" (1918), proferida na Escola Politécnica e depois transcrita na *Revista Didática* da Escola; "A evidência em matemática" (1919), na *Revista Didática* da Escola Politécnica; "A filosofia matemática de Poincaré" (1920), conferência lida na Sociedade Brasileira de Ciências e publicada

pela Faculdade de Filosofia e Letras do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro a assumir a cadeira de História e Filosofia da Matemática do curso de Ciências Matemáticas daquela instituição.[9] Apesar da alteração, a divisão, na prática, permaneceu no livro, cujos assuntos em vários momentos são expostos com o concurso de elementos da história e da filosofia da matemática, especialmente na primeira parte (capítulos I a V).

O curso de Amoroso Costa, assim como outros do mesmo gênero organizados pela ABE naquele ano,[10] ocorreu na Escola Politécnica. Conforme noticiado pelos jornais da época, qualquer pessoa poderia frequentá-lo;[11] o público, porém, parece ter sido constituído majoritariamente por estudantes.[12] Entre os ouvintes, em alguns momentos, esteve presente um ilustre ex-aluno da Escola (e de Amoroso Costa): Theodoro Ramos.[13] Este registrou o seguinte a respeito das conferências do antigo mestre:

> Tive a satisfação de assistir a algumas dessas preleções onde as noções básicas da Matemática moderna eram expostas com método e clareza. A feição de que se revestiam as conferências não permitia que nelas fossem abordados detalhes referentes a demonstrações de certas proposições enunciadas, mas todos os pontos essenciais da teoria eram postos em evidência precisamente e com muita elevação (Ramos, 1933, p. 22).

Tratava-se, portanto, de um curso concebido para um público não necessariamente versado em matemática (embora suficientemente instruído), característica advinda da experiência prévia de Amoroso Costa com a divulgação científica. Além dos artigos sobre temas diversos que produzira para a mídia não especializada, quatro anos antes ele proferira, também na Escola Politécnica, uma série de conferências sobre a teoria da relatividade.[14] Tais conferências, teria explicado a Teodoro Ramos em uma carta, eram destinadas "ao público que sabe o que é uma equação, evitando, porém, desenvolvimentos de cálculo e insistindo apenas sobre as definições e os resultados" (Ramos, 1933, p. 21).

---

na revista dessa sociedade; "Teoria da relatividade: esboço histórico" (1922), conferência realizada na Escola Politécnica e publicada na *Revista Brasileira de Engenharia*; "O problema da ciência" (1922), "Pascal geômetra" (1923) e "As duas imensidades" (1923), em *O Jornal*; "Kant e as ciências exatas" (1924), conferência realizada na festa comemorativa do bicentenário do filósofo alemão.

9 O convite, de 22 de março de 1919, é um dos documentos que compõem o dossiê AC.T.2.002, mas não se sabe se Amoroso Costa de fato assumiu a cadeira para a qual foi convidado.

10 Os cursos "A estrutura geopolítica do Brasil", de Everardo Backheuser, "Antropologia", de Roquette-Pinto, "A constituição geológica do Brasil", de Euzebio de Oliveira, "Estudo teórico e prático das bombas centrífugas", de Mauricio Joppert, foram anunciados por jornais diversos, juntamente com o de Amoroso Costa, como "cursos de alta cultura e de especialização".

11 Entre eles o *Correio da Manhã*, em sua edição de 25 de maio de 1926, p. 2, e *O Jornal*, edição de 4 de junho de 1926, p. 5.

12 Uma nota sobre o curso na edição de 13 de junho de 1926 de *O Jornal*, p. 2, sugere isso.

13 Theodoro Augusto Ramos (1895-1935), engenheiro civil (1916) e doutor em Ciências Físicas e Matemáticas (1918) pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, então professor da Escola Politécnica de São Paulo, seria o responsável pela contratação, na Europa, do corpo docente estrangeiro da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, quando da criação da Universidade de São Paulo, em 1934.

14 Dessa vez, sem relação com a ABE, que só foi fundada em 1924. O tema da relatividade foi objeto de uma série de artigos que Amoroso Costa publicou em *O Jornal*: "A teoria de Einstein", em 1919; "À margem da teoria de Einstein" (em duas partes) e "Bergson e a relatividade", ambos em 1922.

O livro *As ideias fundamentais da matemática*, apareceu dois anos e meio depois do curso homônimo. Porém, diferente do que sugere Castro (1999), o primeiro dificilmente terá sido uma consequência do segundo. A grande diversidade de temas abrangidos pela obra constitui por si só um indicativo da envergadura da tarefa realizada, mas a isso ainda se acrescenta a longa lista de trabalhos de autores estrangeiros contida no RASC1,[15] que foram consultados por Amoroso Costa em sua pesquisa para o livro. É mais provável, portanto, que o trabalho de elaboração da primeira versão do livro – ou pelo menos de uma parte substancial dele – tenha sido realizado em um momento em que ele pôde dedicar-se integralmente à tarefa, antes do curso.

Uma aposta razoável é que boa parte do trabalho de pesquisa/escrita tenha ocorrido no período que vai do segundo semestre de 1924 ao primeiro bimestre de 1926, quando Amoroso Costa esteve na Europa, realizando estudos de seu interesse. Foi a segunda licença que obteve do posto de professor na Escola Politécnica para esse fim, mas diferente do primeiro período de afastamento – que foi de 1920 a 1921 ou 1922 e cujas notas dos cursos a que assistiu na Faculdade de Letras de Paris estão em seu arquivo pessoal[16] –, não há nenhum registro das atividades realizadas na segunda vez. Há apenas dois documentos disponíveis relacionados a esse afastamento no arquivo do Mast, ambos contidos no dossiê AC.T.2.001. Um deles é o requerimento dirigido à Congregação da Escola Politécnica, de 28 de julho de 1924, para licença de um ano sem vencimentos, cujo deferimento data de 28 de agosto. O outro é uma nomeação do diretor da Escola Politécnica, de 15 de agosto de 1925, para que procedesse, na Europa, "estudos de aperfeiçoamento do ensino de sua cadeira" e a elaboração de um projeto para o novo observatório da Escola que seria construído no morro do Valongo – sugerindo, assim, que o fim de seu afastamento fora prorrogado. Não se sabe qual o tema dos estudos a que o brasileiro estaria se dedicando na ocasião.

Amoroso Costa retornou ao país na primeira semana de março de 1926,[17] três meses antes, portanto, do início do curso da ABE. Se não o trabalho todo, uma parte considerável dele deve, assim, ter sido realizado no período em que esteve licenciado do cargo na Escola Politécnica. Soma-se aos indícios acima uma anotação, no verso de uma folha do RASC1, sobre cotas de alguns periódicos na biblioteca da Sorbonne (Figura 2), quiçá para empréstimos.

15 Essa lista está nas quatro primeiras folhas do manuscrito, mas nem todas as referências listadas foram consultadas. Segundo uma codificação empregada por Amoroso Costa, os títulos dos trabalhos vistos por ele recebiam o sinal "v", mas algumas referências da lista não foram assinaladas.

16 Esses cursos foram: "Introdução à filosofia das ciências", de Abel Rey, "Teoria do conhecimento", de Léon Brunschvicg, e "Teoria do movimento da Lua", ministrado por Marie Henri Andoyer. Eles foram frequentados por Amoroso Costa de novembro de 1920 a junho de 1921, mas o período de seu afastamento certamente foi maior. Sabe-se (por meio de notas em jornais) que ele partiu para o exterior em maio de 1920, possivelmente tendo participado do Congresso Internacional de Matemáticos em Estrasburgo no mês de setembro (Villat, 1921), porém o momento em que regressou é desconhecido.

17 A edição de 6 de março de 1926 da *Revista da Semana* noticia o então regresso da "família Amoroso Costa" da Europa.

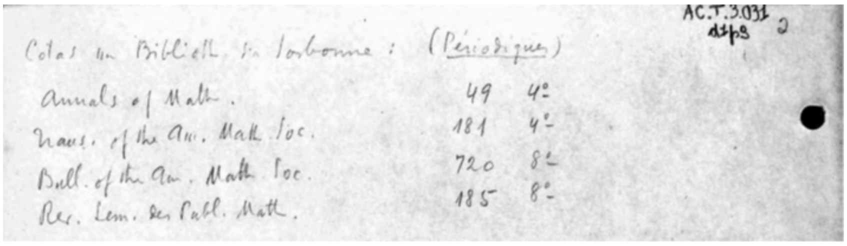
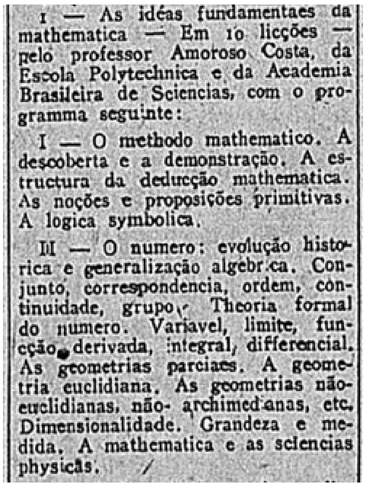


Figura 2: Anotação sobre cotas de periódicos na Biblioteca da Sorbonne.

Fonte: Costa ([s.d.-a], p. 3).



I — As idéas fundamentaes da mathematica — Em 10 licções — pelo professor Amoroso Costa, da Escola Polytechnica e da Academia Brasileira de Sciencias, com o programma seguinte:

I — O methodo mathematico. A descoberta e a demonstração. A estructura da deducção mathematica. As noções e proposições primitivas. A logica symbolica.

II — O numero: evolução historica e generalização algebrica. Conjunto, correspondencia, ordem, continuidade, grupo. Theoria formal do numero. Variavel, limite, funcção, derivada, integral, differencial. As geometrias parciaes. A geometria euclidiana. As geometrias não-euclidianas, não-archimedianas, etc. Dimensionalidade. Grandeza e medida. A mathematica e as sciencias physicas.

Figura 3: Programa do curso publicado no *Correio da Manhã*.

Fonte: Associação... (1926, p. 2).

O momento em que o RASC2 foi produzido é outra questão. Os títulos dos capítulos nesse manuscrito estão mais próximos do programa divulgado pela ABE (Figura 3) do que os do RASC1 – incluindo a ordem em que o tema *grandeza e medida* seria abordado – mas isso não significa que as alterações feitas na segunda versão tenham sido feitas para o curso; elas podem ter sido realizadas a partir dele.

O livro começou a ser anunciado bem antes de sua publicação, menos de um ano depois do término do curso, conforme atestam peças de propaganda veiculadas por jornais do período (Figura 4). Um exame geral dos manuscritos sugere que as alterações do RASC2 para o livro publicado não foram tantas quanto as que foram empreendidas entre um rascunho e outro, porém a remoção de um capítulo é uma mudança importante.

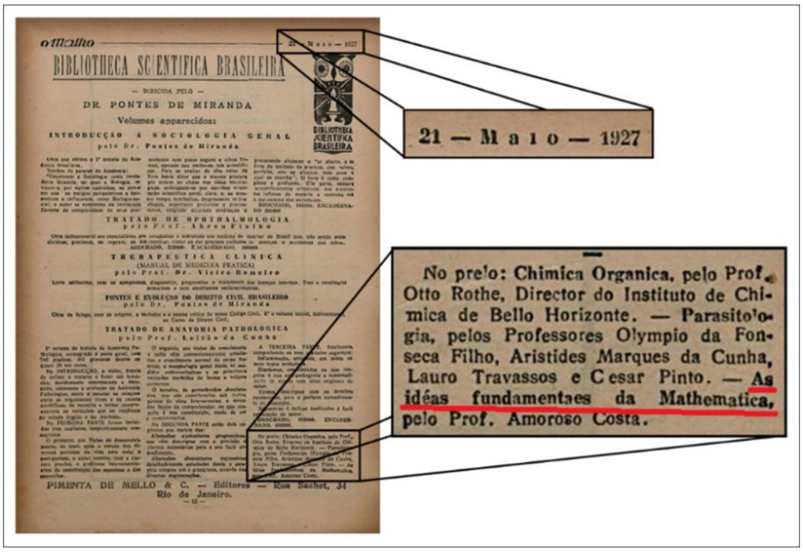


Figura 4: O anúncio da coleção Biblioteca Científica Brasileira, na edição de maio de 1927 do jornal *O Malho*, já faz publicidade do livro de Amoroso Costa, então no prelo.

Fonte: Bibliotheca... (1927, p. 12).

Como o capítulo em questão está presente no RASC1 e no RASC2, ou foi retirado na versão enviada para a editora[18] ou no prelo, e é possível que o curso realizado por Amoroso Costa em 1926 tenha contribuído para sua percepção de que o tema "grandeza e medida", nele abordado, poderia ser suprimido sem prejuízo didático.

18 Se esse manuscrito existiu (um terceiro rascunho), ele se perdeu.

A noção de grandeza, não mais uma ideia fundamental da matemática

No RASC1, o capítulo removido está entre os capítulos “As noções de grupo e de invariante” (que no livro publicado é o capítulo “XV – A noção de grupo”) e “Os princípios da geometria euclidiana”; no RASC2, é o penúltimo capítulo, depois de “A noção de dimensionalidade” (Quadro 1), seguindo a mesma ordem em que o tema foi abordado no curso da ABE (Figura 3). O assunto do texto foi sendo, desse modo, postergado entre uma versão e outra até, finalmente, o autor dar-se conta de que o livro poderia prescindir dele.[19]

Quadro 1: Comparação entre os títulos dos capítulos finais dos rascunhos e livro*

RASC1	RASC2	Livro
As noções de grupo e de invariante	A noção de grupo e a teoria formal do número	XV – A noção de grupo
As noções de grandeza e de medida		
Os princípios da geometria euclidiana	Os princípios da geometria euclidiana	XVI – Os princípios da geometria euclidiana
As geometrias não euclidianas	As geometrias não euclidianas	XVII – Geometrias não euclidianas e não arquimedianas
Outras geometrias	Outras geometrias**	
A noção de dimensionalidade	A noção de dimensionalidade	XVIII – A noção de dimensionalidade
	As noções de grandeza e de medida	
	A matemática e as ciências físicas	XIX – Matemática pura e matemática aplicada

* Embora os capítulos sejam numerados na versão dois, os números foram rasurados (alguns, várias vezes).
** No livro, esse capítulo foi incorporado ao anterior. Fonte: Elaborado pelo autor.

As subdivisões do capítulo, em número de quatro, são as mesmas nos dois rascunhos, as seções figurando com os mesmos títulos: i) “A noção de grandeza”, ii) “As grandezas extensivas”, iii) “A noção de medida” e iv) “Extensão da noção de medida”.

O primeiro rascunho do capítulo, assim como os outros capítulos do livro manuscrito, contém citações, não traduzidas, dos autores consultados ao longo da escrita inicial, e removidas na versão seguinte. Por isso, a consulta ao RASC1 permitiu conhecer em quais autores Amoroso Costa apoiou-se na elaboração de seu texto.

A referência predominante em “As noções de grandeza e de medida” é o lógico e matemático Louis Couturat (1868-1914). Duas obras dele são citadas no RASC1, a saber, *De l’infini mathématique* (1896) e *Les principes des mathématiques* (1905), principalmente a última. O francês defende pontos de vista opostos nesses livros, embora esse contraste não seja mencionado por Amoroso Costa.

19 O texto não foi, porém, totalmente descartado. A última seção, que é independente das demais, foi inteiramente reproduzida no livro, no capítulo “XI – As noções de variável e de limite”, sendo-lhe dada uma redação muito próxima da do RASC2, conforme pode ser conferido na transcrição apresentada ao final deste artigo.

A influência de Couturat, parte 1: o número prescinde da grandeza

À época em que publicou *De l'infini mathématique*, Couturat acreditava que as noções da análise matemática se apoiariam no conceito de grandeza e não no de número como defendiam os adeptos da "aritmetização da análise".[20] Uma das razões para essa crença era a suspeita de que a noção de continuidade seria um atributo inseparável da de grandeza e, portanto, irredutível a outras noções. Assim, o conceito de número real só poderia adquirir significado enquanto fosse aplicável à grandeza, que deveria ser fundamento da análise matemática (Couturat, 1973). Seu posicionamento modificou-se graças aos trabalhos de Cantor, que mostraram como a continuidade poderia ser estabelecida em termos ordinais.[21] Poucos anos depois da publicação do livro, em um artigo publicado na *Revue de Métaphysique et de Morale*, Couturat (1900, p. 157) revela sua perplexidade diante de resultados que iam de encontro ao que defendera: "o que é ainda mais curioso e mais paradoxal é que a ideia de continuidade, que parece ser um atributo essencial da grandeza, pode ser definida por meio, unicamente, da ideia de ordem".[22]

A conexão entre as ideias de ordem e continuidade não foi esquecida por Amoroso Costa no próprio livro. Na última seção do capítulo "IX – As noções de ordem e continuidade", após apresentar os elementos essenciais dos então recentes desenvolvimentos associados a essas noções, ele chama atenção para o fato de que, antes dos trabalhos de Dedekind e de Cantor, "a ideia de continuidade se apoiava mais ou menos explicitamente sobre a de grandeza", diferente da então nova teoria do *continuum*, que: "fundada sobre a noção de ordem, representa um imenso progresso sobre aquelas em que predomina a intuição geométrica, e com toda a razão B. Russell a considera como uma das realizações mais notáveis da matemática moderna" (Costa, 1929, p. 119).

Na passagem acima, o eco do entusiasmo de Bertrand Russell (1872-1970) em relação aos avanços obtidos no estudo do conceito matemático de continuidade – presente, aliás, desde

20 A expressão "aritmetização da análise" refere-se à vertente, vitoriosa na disputa com outras, em que se defendia fundar a análise matemática unicamente nos conceitos da aritmética, tornando aquela independente da noção de grandeza (Hobson, 1921). Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918) estão entre os matemáticos representativos dessa corrente, na qual os conceitos de número inteiro, número racional e número real são definidos e dependem, em última análise, do conceito de número natural.

21 Esse resultado foi apresentado por Cantor no primeiro de dois artigos publicados em 1895 e 1897, nos *Mathematische Annalen* (Anais de Matemática), ambos sob o título *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (Contribuição para os fundamentos da teoria dos conjuntos transfinitos), sendo traduzidos para o francês, em 1899, por Francisque Marotte (1873-1945). Cantor apresentara uma definição de continuidade anteriormente, em 1883, no quinto artigo da série *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* (Sobre variedades pontuais lineares infinitas), também publicada nos *Mathematische Annalen*, mas essa definição, apelidada de "métrica" por Couturat, não era exclusivamente ordinal.

22 Cantor fez isso concebendo a ideia de continuidade em termos da de "tipo ordinal" de um conjunto ordenado. Ele notou que os conjuntos ordenados que são similares – e que têm, portanto, o mesmo tipo ordinal – possuem as mesmas propriedades com respeito às relações de ordem sobre eles definidas, assim essas propriedades também podem ser atribuídas ao tipo ordinal desses conjuntos. Então ele definiu a continuidade como sendo a propriedade do tipo ordinal dos conjuntos "contínuos", isto é, dos conjuntos linearmente ordenados tais que: é perfeito (denso em si mesmo e fechado) e contém um subconjunto enumerável linearmente ordenado com o atributo de que entre quaisquer dois elementos de há sempre um elemento de (Cantor, 1955). Todas as propriedades que entram nessa definição (linearidade, densidade de um conjunto em si mesmo, fechamento etc.), segundo o sentido que Cantor atribui a elas, são ordinais, isto é, são estabelecidas na "linguagem" das relações de ordem.

o início do processo de elaboração do livro de Amoroso Costa (esse trecho está no RASC1) –, também se manifesta em *Les principes des mathématiques* – a começar pelo título, que coincide, em francês, com o do livro que Russell publicou em 1903.

No prefácio, Couturat (1980, p. v) alerta que seu trabalho não reivindica originalidade; que embora pretendesse incialmente fazer uma revisão da obra *The principles of mathematics*, de Russell, fora impelido a apresentar suas próprias análises "da maior parte dos trabalhos dos matemáticos contemporâneos sobre as mesmas questões". Seu posicionamento a respeito do papel do conceito de grandeza nos fundamentos da matemática é particularmente instrutivo, incorporando e ampliando, assim, a discussão do artigo que publicara cinco anos antes:

> A concepção tradicional da matemática, que prevaleceu até meados do século XIX, fez da grandeza o objeto essencial dessa ciência; o próprio número era considerado um tipo de grandeza, grandeza discreta, em oposição à grandeza contínua. Desde então, tornou-se um dogma universalmente aceito que a matemática pura repousa inteira e exclusivamente na ideia de número, e até mesmo na de número inteiro. Agora vimos [...] que os números como objetos da matemática pura podem ser reduzidos às suas propriedades ordinais,[23] e que o próprio *continuum*, que parecia ser o atributo característico da grandeza, pode ser definido de um modo puramente ordinal (Couturat, 1980, p. 98).

É visível a semelhança do início desse discurso com o primeiro parágrafo do capítulo que Amoroso Costa suprimiu:

> § – *A noção de grandeza* – Na sua origem e em grande parte do seu desenvolvimento histórico e das suas aplicações, a Matemática pode ser chamada *a ciência das grandezas*.
>
> Ainda hoje, não falta quem a defina desse modo. E, no entanto, o conceito de ciência matemática pura tende a se tornar cada vez mais independente da noção de grandeza. *Na nossa exposição dos princípios da matemática, essa noção não interveio até aqui de forma alguma*[24] (Costa, [s.d.-b], p. 302; destaques no original).

De fato, como é dito ao final desse fragmento, em nenhum dos capítulos anteriores, mesmo no RASC1, o conceito de grandeza ocupa uma posição de centralidade nas discussões. A primeira referência a esse conceito aparece na introdução (tanto do curso como do RASC2), em que, Amoroso Costa, após enfatizar a posição privilegiada ocupada pelo número entre as ideias matemáticas, sublinha que, embora as extensões sucessivas da ideia de número tenham inicialmente servido ao propósito de simbolizar grandezas cada vez mais complexas, certas generalizações do número surgiram da necessidade de se atribuir sentido a operações então impossíveis nas classes de números já constituídas. A interpretação das novas classes

23 Couturat refere-se à definição de número real proposta por Russell que identifica esse número com a classe inferior de um corte de Dedekind, que Russell (2010), baseando-se nos trabalhos do italiano Giuseppe Peano (1858-1932), denomina "segmento". Os segmentos são classes de números racionais definidas em termos da relação de ordem usual entre esses números e entre as quais são definidas operações de adição e multiplicação que possuem as mesmas propriedades que as operações de mesmo nome sobre os racionais. A classe dos números reais é então identificada com a classe dos segmentos de racionais, sendo que esses segmentos são definidos de maneira puramente ordinal.

24 O último trecho destacado nessa citação encontra-se riscado no manuscrito, o que indica que Amoroso Costa pretendia suprimi-lo caso o capítulo fosse publicado.

de números em termos de grandeza (interpretação concreta) surgiu somente mais tarde. Essa questão é retomada, repetindo algumas palavras da introdução, no manuscrito do capítulo "VI – A evolução histórica da noção de número", que começa da seguinte forma:

> Historicamente, como logicamente, o número é a noção central da Matemática. As extensões sucessivas dessa noção tiveram por fim criar símbolos capazes de representar grandezas cada vez mais complexas. De próximo em próximo, o número se torna divisível, contínuo, orientado, dirigido, ele adquirindo a cada fase nova um dos caracteres específicos da grandeza e penetrando mais intimamente a sua natureza. Essa longa evolução conduz, porém, a um período de liberdade criadora, em que a noção de número se desprende da de grandeza e a generalização se torna cada vez mais abstrata (Costa, [s.d.-b], p. 87).

A passagem acima não está no RASC1, o que significa que não foi concebida na fase inicial do trabalho de escrita. Amoroso Costa preferiu deixá-la fora do livro. Alguns pontos desse discurso são retomados ao longo do mesmo capítulo (no RASC2 e no livro), assim, talvez ele tenha julgado que seria repetitivo mantê-lo. Ao final do capítulo, ele retorna à questão, concluindo que embora a grandeza tenha tido, historicamente, um papel legitimador em relação ao número – como quando conferiu-se significado aos números negativos por meio das grandezas que têm dois sentidos opostos e aos números complexos mediante grandezas vetoriais –, isso não significa que, logicamente, a noção de número seja posterior à de grandeza.

No primeiro parágrafo do manuscrito do capítulo "VII – A generalização algébrica da noção de número",[25] Amoroso Costa acrescenta: "vamos mostrar como as extensões sucessivas da noção de número se podem construir sobre as noções de número natural e de operação sobre números naturais, sem apelo à ideia de grandeza" (Costa, [s.d.-b], p. 111), que foi mantido no livro, com uma sútil mudança na redação.[26] No RASC1, esse fragmento está presente, mas com a expressão "número inteiro" no lugar de "número natural", e não há menção à ausência de apelo à grandeza, sugerindo ser algo que sentiu necessidade de ressaltar posteriormente.

Retornando ao capítulo "As noções de grandeza e de medida", a defesa da não essencialidade do conceito de grandeza na matemática prossegue ao longo da primeira seção. O argumento exposto no início do capítulo VI, de que, historicamente, as sucessivas extensões do número continham as propriedades das grandezas das quais foram abstraídas até, finalmente, o número se desprender da grandeza, é repetido no segundo parágrafo:

> Vimos, é certo, que a ideia de número se modelou a princípio sobre as grandezas que aparecem no campo da nossa experiência: grandezas discretas, representadas pelos números inteiros; grandezas divisíveis, que deram origem aos números fracionários; grandezas relativas, grandezas contínuas, das quais procederam os números qualificados e os números irracionais. [...] Mas as generalizações superiores do número nem sempre nasceram da consideração das grandezas a que se aplicam, e, pelo contrário, precederam por vezes qualquer aplicação (Costa, [s.d.-b], p. 302-303).

---

25 No livro publicado, capítulo VIII.

26 "As extensões sucessivas do número podem ser construídas sobre as noções de número natural e de operação, sem apelo à de grandeza" (Costa, 1929, p. 91).

Amoroso Costa assinala em seguida: "O número é a forma, a grandeza é a substância. De posse da noção indefinidamente generalizável de número, a matemática pura prescinde da noção de grandeza" (Costa, [s.d.-b], p. 303), e mais adiante afirma: "A matemática pura, tal como nós a concebemos hoje, ignora a noção de grandeza".

Surpreende que, diante de defesa tão contundente, o assunto da próxima seção seja justamente uma teoria axiomática da grandeza. Afinal, por que abordar uma teoria sobre um conceito que, segundo ele, a matemática pura dispensava?

A influência de Couturat, parte 2: os postulados de Burali-Forti

A segunda seção do capítulo constitui um resumo de ideias desenvolvidas pelo matemático Cesare Burali-Forti (1861-1931), no artigo *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri* (1904), que são problematizadas por Couturat em *Les principes*.[27] Naquele trabalho, é abordado o conceito de classe de grandezas (contínuas), domínio sobre o qual está definida uma operação que satisfaz oito postulados. Membro da "escola de Peano",[28] Burali-Forti apresenta seus resultados segundo a notação simbólica desenvolvida pelo grupo italiano. Por isso, o conteúdo de seu artigo precisou ser destrinchado pelo francês que, provavelmente, para tornar sua própria discussão mais acessível, comenta cada um dos axiomas – que também são apresentados seguindo uma orientação formalista.

Dando continuidade à tendência de empregar o mínimo de simbolismos em um livro que também pretendia ser útil ao não especialista, Amoroso Costa preferiu evitar esse tipo de notação, porém sua apresentação do sistema axiomático de Burali-Forti é bastante superficial. Antes de arrolar os oito postulados que constituem tal sistema, o brasileiro explica que "uma espécie de grandezas é uma classe *G*, em relação à qual se define uma operação +, que se chamará a adição das grandezas" e que o elemento nulo da classe *G* "será representado por , por analogia com o número zero, mas sem confusão". Em seguida, diz que "duas outras definições prévias são necessárias" (Costa, [s.d.-b], p. 305). São elas:

> 1) *a desigualdade de grandezas G*. Na realidade, o que se define é o conjunto dos elementos inferiores a um elemento *G*: esse conjunto se representa pelo símbolo θa (*inferior a a*). A desigualdade se define então em termos da soma, isto é, do resultado da adição: "*a* sendo um *G*, θa é o conjunto dos *x* da classe *G*, tais que *a* é a soma de *x* e de um *G* não-nulo."
>
> 2) *um conjunto limitado de G*: assim chamaremos a todo conjunto *u* tal que existem *G* iguais ou superiores a um elemento qualquer de *u* (Costa, [s.d.-b], p. 305; destaques do autor).

É importante assinalar que os postulados de Burali-Forti não pretendem caracterizar um domínio qualquer de grandezas, mas um domínio de *grandezas absolutas*[29] com elemento nulo,

27 O artigo de Burali-Forti está entre os trabalhos da bibliografia registrada no RASC1, mas de acordo com a codificação empregada por Amoroso Costa (cf. nota 15), não foi visto por ele. É possível, claro, que para a produção da segunda versão do texto, essa situação tenha mudado.

28 Desde o final do século XIX, Peano e um extenso grupo de colaboradores vinham trabalhando na "axiomatização" de diversos ramos da matemática, empregando, para isso, uma notação simbólica, por eles desenvolvida, que permitia exprimir tanto os conceitos matemáticos de uma teoria como as relações lógicas a ela subjacentes.

29 A expressão vem de *absoluten Grössen*, empregada pelo matemático austríaco Otto Stolz (1842-1905).

o que significa que a ideia de uma classe de grandezas constituída por elementos positivos e negativos é alheia a essa teoria. Assim, não é necessário distinguir entre conjuntos limitados inferior e superiormente. A relação de ordem entre as grandezas do domínio determinado pelos postulados, por sua vez, é definida a partir da operação (denominada adição) cujo significado é fixado pelos axiomas. Uma vez estabelecidas as convenções acima e assumindo que x, y e z são grandezas do domínio G, são introduzidos os postulados:

> P1. Se $x+z=y+z$, tem-se $x=y$
>
> P2. Existe (pelo menos) um G nulo (e do postulado anterior resulta a unicidade dessa grandeza nula);
>
> P3. Existe (pelo menos) um G não nulo;
>
> P4. A soma de dois G, dos quais um é não nulo, é um G não nulo;
>
> P5. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (o que se significa que a adição das grandezas possui a propriedade associativa);
>
> P6. Ou bem $x=y$, ou bem $x<y$, ou bem $y<x$;;
>
> P7. Se x é não nulo, existe um G inferior a x e não nulo;
>
> P8. Se u é um conjunto limitado de G, existe uma grandeza x tal que $\theta x=\theta u$ (Costa, [s.d.-b], p. 305-306).

Embora fiel à nomenclatura adotada por Couturat, em seu sintetismo Amoroso Costa esqueceu-se de explicar que θu, quando u é uma classe de grandezas de G (e não uma grandeza, ou seja, não um elemento de G), é o conjunto das grandezas G com a seguinte propriedade: uma grandeza x pertencerá a θu sempre que houver algum elemento de u superior a x.[30] Sem o conhecimento dessa convenção não é possível compreender o significado do oitavo axioma, que pretende exprimir a continuidade do domínio de grandezas G.[31] De tal axioma, explica o brasileiro, deduz-se o seguinte teorema:

> a e b sendo G não nulos, existe um número inteiro n tal que $b<na$ (a multiplicação por n sendo definida como adição de n quantidades iguais a a). A esta proposição, que em certas teorias é tomada como primitiva, se denomina então *postulado de Arquimedes*. Ela desempenha um papel muito importante na *medida* das grandezas (Costa, [s.d.-b], p. 306; destaques do autor).

30 Se u for limitado (superiormente) e diferente de {0}, o conjunto θu será um segmento de G. Nesse caso, interpretando G como a semirreta positiva $[0, +\infty)$, θu é o intervalo (segmento) cujos elementos são todos os números menores do que as cotas superiores de u. Por exemplo, se $[1,2)\cup\{5/2\}$ for o conjunto θu, será $[0,5/2)$.

31 Em uma linguagem atual, a grandeza x cuja existência é estabelecida pelo axioma P8 (e cuja unicidade é uma consequência do sistema de axiomas) é a menor cota superior (supremo) do conjunto limitado u (definição 2 acima). De fato, assumindo P1-P8, se u possuir um maior elemento, esse será a grandeza x nas condições de P8, que por sua vez será o supremo de u. Caso contrário, se u não tiver um maior elemento, u será subconjunto de θu (pois se a é elemento de u, a é menor do que algum elemento de u) e, consequentemente (da igualdade $\theta u=\theta x$), u também será subconjunto de θx; assim, x será uma cota superior de u. Se u tiver uma cota superior y menor do que x, y será elemento de θx e, portanto, de θu, ou seja, y será menor do que algum elemento de u, uma contradição. Logo x será o supremo de u.

Essa não é a primeira menção ao postulado de Arquimedes nos manuscritos do livro,[32] que é discutido no capítulo em que são abordadas as geometrias não arquimedianas – intitulado "Outras geometrias" nos rascunhos, depois incorporado, no livro editado, ao capítulo "As geometrias não euclidianas" (Quadro 1). Esse capítulo (no livro publicado, é a seção 90) começa explicando que uma geometria não arquimediana é aquela construída sobre a negação do postulado de Arquimedes, o que esse postulado exprime e que o reconhecimento da propriedade por ele expressa é anterior ao geômetra grego – citando a definição 4 do livro V de *Os elementos* como uma evidência disso:[33] "existe uma relação mútua entre grandezas que podem por multiplicação exceder-se mutuamente" (Costa, [s.d.-b], p. 275). Em seguida, o texto menciona a existência de números infinitamente pequenos atuais como uma consequência da negação do postulado, exibindo o tipo mais simples desses números. Por fim, são apresentados os ângulos corniformes como caso particular de grandeza não arquimediana, um exemplo que Amoroso Costa retirou do segundo volume da obra *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte* (Matemática elementar de um ponto de vista superior), de Felix Klein (1849-1925).[34]

O exemplo de *grandeza* angular discutido nos rascunhos deu lugar, no livro publicado, a um caso particular de sistema de *números* não arquimedianos como pares de números reais, tópico que aparece em manuscrito não relacionado ao livro (ele compõe o dossiê AC.T.3.037) e que deve ser, portanto, posterior à elaboração dos dois rascunhos.[35] A ausência de referências nesse manuscrito sugere que tal exemplo pode ter sido concebido pelo próprio Amoroso Costa, mas sua colocação no livro pode ter ocorrido não apenas em virtude do ineditismo. Além de dar continuidade ao tópico anterior sobre *números* infinitamente pequenos, também pode ser um indicativo do desconforto de Amoroso Costa com o emprego de uma terminologia que remete ao conceito de grandeza, conceito que ele mesmo diz não fazer parte do escopo da nova matemática.

Retornando aos axiomas de Burali-Forti, no texto que decidiu não publicar, Amoroso Costa observa que a noção de grandeza, conforme definida pelos axiomas, é tão geral que o sistema dos números reais se apresenta como um caso particular dela. Nessa direção, conclui:

> Os números reais constituem a classe tipo das grandezas contínuas, aquela que representa as propriedades formais dessas grandezas – o seu esquema-abstrato. A matemática pura pode ignorar a grandeza e substitui-la pelo número porque os dois conceitos são formalmente idênticos. Mas a de grandeza implica um dado empírico ou intuitivo ao passo que o de número é uma construção inteiramente abstrata[36] (Costa, [s.d.-b], p. 306-307).

32 Uma rápida referência a ele é feita no capítulo "I – A descoberta e a demonstração".

33 No RASC2, não há indícios das fontes consultadas, mas no RASC1 é explícito que fora utilizado o tomo III, volume 1, da *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, obra que contém dois textos que abordam o assunto.

34 Nos manuscritos do livro está indicado que fora consultada a terceira edição, publicada em 1925.

35 A apresentação desses dois exemplos desviar-nos-ia muito do assunto principal. O leitor interessado tem a opção de buscá-los nos próprios manuscritos aqui citados, pelo portal Zenith do Mast, ou de consultar um outro trabalho do autor deste artigo (Gomes, 2021).

36 A despeito do que Amoroso Costa escreveu, o conjunto dos números reais não pode ser a classe tipo das grandezas contínuas se essa for descrita pelos axiomas de Burali-Forti, pois, conforme explicado antes, esses dizem respeito a um domínio de grandezas absolutas.

O discurso acima, assim como outros desenvolvidos no capítulo, também se apoia em Couturat. Este, após introduzir a teoria de Burali-Forti, em *Les principes*, aborda as implicações dessa teoria para o debate envolvendo números e grandezas. O problema, segundo ele, é que a definição por postulados não é capaz de assegurar a existência de um domínio de grandezas e, além disso, a única realização dos axiomas de grandeza contínua que se conhece na matemática pura são justamente os números reais, uma vez que os exemplos retirados do conjunto desses números são usados para se demonstrar a independência desses axiomas. "A existência de grandezas é, portanto, garantida apenas pela existência de números reais; e essa é, como sabemos, a principal razão pela qual não quisemos basear a noção de número na de grandeza" (Couturat, 1980, p. 113), argumenta.

A discussão dos axiomas de Burali-Forti desempenha, na verdade, um papel pedagógico no livro de Couturat, que é o de expor as dificuldades filosóficas advindas das tentativas de definição do conceito matemático de grandeza, mesmo que essas tentativas estejam sob a roupagem rigorosa do método axiomático.[37] Aparentemente, é isso o que Amoroso Costa pretendia fazer (em menor proporção) no próprio livro, a partir do capítulo não publicado.

O conceito de grandeza sai de cena, entra o de conjunto

A terceira seção do capítulo "As noções de grandeza e de medida" funciona meramente como elo entre as seções anteriores e a última. É uma seção bastante curta, na qual o conceito tradicional de medida é apresentado como o ato de estabelecer uma correspondência entre as grandezas de uma determinada espécie e a classe dos números que constituem o seu tipo. "Estabelecer essa correspondência", diz Amoroso Costa,

> é definir a *medida* das grandezas consideradas, que é a operação fundamental das ciências físicas. Assim, para medir os comprimentos sobre uma reta, fazem-se corresponder os números reais e os pontos da reta, que serão extremidades dos segmentos medidos (Costa, [s.d.-b], p. 307; destaque no original).

Na seção seguinte, o brasileiro desprende-se do texto de Couturat. Trata-se de uma apresentação de fragmento do fascículo 4 do tomo 1, volume 1, da *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, de autoria de Arthur M. Schoenflies (1853-1928) e René-Louis Baire (1874-1932). A noção de medida é apresentada como uma extensão da ideia exposta na citação acima, mas agora não mais ligada ao conceito de grandeza e sim ao de conjunto:

> A medida dos conjuntos quaisquer de pontos se apresenta como uma extensão das noções geométricas de comprimento, área, volume, que do ponto de vista habitual só têm sentido em relação a conjuntos contínuos. Essa extensão [...] pode ser feita de vários modos. Citemos, por ordem cronológica, as definições de Hankel (1882), Cantor (1884), Peano (1887) e Jordan (1892), e passemos a indicar como se apresenta a noção de medida dos conjuntos no sentido de Borel, generalizada por Lebesgue (Costa, [s.d.-b], p. 308-309).

37 Burali-Forti não foi o primeiro (nem seria o último) a abordar do ponto de vista axiomático o conceito de grandeza. É provável que Couturat o tenha escolhido por ser, na ocasião de elaboração de seu livro, o trabalho mais recente – ou um dos mais recentes, pelo menos – nessa linha de investigação.

A seção inteira foi inserida no capítulo XI do livro publicado,[38] cujo tema subjacente é a teoria "cantoriana" dos conjuntos, dentro da qual, nesse capítulo, são expostos os conceitos de variável, de elemento limite e de continuidade. A parte do texto que permaneceu no livro não faz qualquer referência à noção de grandeza. Como sua compreensão não depende das outras seções, ela foi aproveitada, enquanto as demais foram descartadas.

Ao olhar para essa alteração, é preciso ter em conta que na década de 1920, quando Amoroso Costa estava trabalhando em seu livro, a maioria dos matemáticos já reconhecia a teoria dos conjuntos como uma teoria basilar da matemática (Ferreirós, 2002). O próprio Couturat, anos antes, expressara esse reconhecimento na introdução de *Les príncipes* – ao dizer que "os matemáticos foram levados a constituir duas novas teorias que serviriam doravante como base para todas as outras: a teoria dos conjuntos e a teoria dos grupos" (Couturat, 1980, p. 2) –, e o brasileiro faria o mesmo na introdução de *As ideias fundamentais da matemática*: "a linguagem da teoria dos conjuntos é hoje indispensável ao exame das noções de variável, limite e função, que formam o arcabouço da análise matemática" (Costa, 1929, p. 13).

As mudanças feitas por Amoroso Costa, refletindo circunstâncias sócio-históricas próprias da matemática de sua época, parecem, pois, indicar o desejo de produzir uma obra atualizada, mesmo que isso implicasse sacrificar aspectos filosóficos, que eram uma marca de sua escrita.

Considerações finais

Neste trabalho foi discutido um capítulo inédito do livro *As ideias fundamentais da matemática*, a partir de análise de dois rascunhos de próprio punho que compõem o arquivo pessoal de seu autor, falecido antes da publicação da obra. Transcrições de algumas partes do manuscrito mais recente do texto foram apresentadas, fornecendo uma visão geral de seu conteúdo.

Não há indícios de originalidade nesse material. De fato, como indicado em sua introdução, a proposta do livro em si não era apresentar resultados novos. Em particular, no capítulo não publicado, Amoroso Costa apropriou-se das conclusões a que Couturat chegara. Indo na mesma direção que este, parece que a intenção do capítulo como um todo era justificar por que a grandeza – que fora outrora uma ideia central da matemática, e que talvez ainda fosse significativa do ponto de vista pedagógico – tornara-se dispensável para as pesquisas matemáticas da época.

Vimos que Couturat fora um defensor da grandeza como uma das ideias fundamentais da matemática, mas seus pontos de vista, acompanhando os desenvolvimentos das pesquisas matemáticas na passagem do século XIX para o XX, se modificaram. Reflexos dessa transformação podem ser encontrados no percurso de elaboração do próprio livro por Amoroso Costa, que, desde as primeiras versões e o curso da ABE até chegar à publicação, buscou expurgar os indícios que poderiam levar a qualquer interpretação de centralidade do conceito de grandeza, omitindo um capítulo e substituindo um exemplo por outro em que faz uso do termo (menos comprometedor) *número* não-arquimediano. Permaneceram na obra fragmentos em que diz que o conceito de número se libertara do de grandeza e que esta não era mais o fundamento

38 Cf. nota 19.

da ideia de continuidade. Se o conceito de grandeza era supérfluo na nova matemática, isso era o suficiente a se dizer, pode ter avaliado.

Mesmo que haja um paralelo entre os rumos que a matemática tomou desde então e as escolhas de Amoroso Costa em relação a sua obra, não se encontra facilmente, contudo, uma justificativa para a não inclusão de "As noções de grandeza e de medida" entre os capítulos do livro. As questões de cunho histórico e filosófico inerentes ao conteúdo desse capítulo não são exclusivas dele, e o texto está em consonância com os demais capítulos, de modo que sua permanência no livro não prejudicaria o objetivo principal, expresso na introdução, de "expor em traços gerais a concepção atual da matemática pura".

Independente dos motivos que o levaram a essa resolução, ao decidir não publicar o capítulo que produziu sobre o tema, Amoroso Costa promoveu uma simplificação que privou o leitor de ter contato com algumas das questões filosóficas que permearam o debate sobre a natureza da relação entre número e grandeza. Segundo Epple (2003), embora a separação entre esses dois conceitos tenha sido capaz de elucidar os fundamentos da análise matemática, estabelecendo o consenso de que esta (e a matemática, de modo geral) deve se basear nos conceitos e axiomas da teoria dos conjuntos, tal cisão alijou das práticas convencionais de pesquisa e ensino da matemática as discussões filosóficas que emergiram quando o paradigma da matemática como ciência da grandeza chegou ao fim.

O caso de Amoroso Costa suscita, pois, mais pesquisas sobre como o divórcio entre número e grandeza – e, por conseguinte, a união entre a teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática –, foi recebido no Brasil. A história do capítulo que decidiu não publicar é apenas mais um capítulo dessa história.

Referências bibliográficas

ASSOCIAÇÃO Brasileira de Educação. *Correio da Manhã*, Rio de Janeiro, ano 25, n. 9.612, p. 2, 25 maio 1926.

BIBLIOTHECA Scientifica Brasileira. *O Malho*, Rio de Janeiro, ano 26, n. 1.288, p. 12, 21 maio 1927.

BURALI-FORTI, C. Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, v. 39, p. 256-272, jan. 1904.

CANTOR, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover, 1955.

CASTRO, F.M. de O. *A matemática no Brasil*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.

COSTA, M.A. *As idéas fundamentaes da mathematica*. Rio de Janeiro: Pimenta de Mello, 1929.

COSTA, M.A. *Manuscritos do trabalho 'Idéias fundamentais da matemática'*. AC.T.3.031. Rio de Janeiro: Mast, [s.d.-a]. Disponível em: http://zenith.mast.br/MAST_DOC/TEXTUAL/AC.T.3.031/AC.T.3.031_d01.pdf. Acesso em: 4 nov. 2024.

COSTA, M.A. *Manuscritos do trabalho 'Sobre a concepção da matemática pura'*. AC.T.3.033. Rio de Janeiro: Mast, [s.d.-b]. Disponível em: http://zenith.mast.br/MAST_DOC/TEXTUAL/AC.T.3.033/AC.T.3.033_d01.pdf. Acesso em: 4 nov. 2024.

COUTURAT, L. Sur la définition du continu. *Revue de Métaphysique et de Morale*, v. 8, n. 2, p. 157-168, 1900.

COUTURAT, L. *De l'infini mathématique*. Paris: Albert Blanchard, 1973.

COUTURAT, L. *Les principes des mathématiques*: avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant. Paris: Albert Blanchard, 1980.

CURSOS de alta cultura e especialização. *O Jornal*, Rio de Janeiro, ano 8, n. 2.293, p. 5, 4 jun. 1926.

EHRLICH, P. General introduction. In: EHRLICH, P. (ed.). *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. p. vii-xxxii.

EISENSTAEDT, J.; FABRIS, J.C. Amoroso Costa e o primeiro livro brasileiro sobre a relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 2, p. 185-192, 2004.

EPPLE, M. The end of the science of quantity: foundations of analysis (1860-1910). In: JAHNKE, H.N. (ed.). *A history of analysis*. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 291-323.

FERREIRÓS, J. O surgimento da abordagem conjuntista em matemática. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 2, n. 4, p. 141-154, out. 2002.

GOMES, R.R. O conceito de número não-arquimediano segundo Amoroso Costa: primeiras impressões de uma pesquisa. In: OLIVEIRA, M.N.; GOMES, R.R.; PANTANO FILHO, R. *Matemática e ciências*: ensino, pesquisa e extensão. Salto: Fox Tablet, 2021. p. 49-61.

HOBSON, E.W. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1921.

MASSARANI, L. *A divulgação científica no Rio de Janeiro*: algumas reflexões sobre a década de 20. Dissertação (Mestrado em Ciência da Informação) – Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

RAMOS, T.A. *Estudos*: ensino, sciencias physicas e mathematicas. São Paulo: Escolas Profissionais do Liceu Coração de Jesus, 1933.

RUSSELL, B. *Principles of mathematics*. Abingdon: Routledge, 2010.

SILVA, C.P. da. *Início e consolidação da pesquisa em matemática no Brasil*. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2022.

VILLAT, H. *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens (Strasbourg, 22-30 septembre 1920)*. Toulouse: Imprimerie at Librairie Édouard Privat, 1921.

Recebido em 15/06/23

Aceito em 12/04/24

Transcrição editada do manuscrito de Amoroso Costa

A seguir a transcrição completa e editada do manuscrito da última versão de *As noções de grandeza e de medida*. A presente edição leva em consideração as rasuras feitas por Amoroso Costa no manuscrito (RASC2), que indicam substituições, acréscimos e eliminações que ele pretendia realizar no texto original. Buscando manter-se fiel às intenções prévias do autor, esta versão extrapola como seria aquele capítulo caso fosse publicado hoje.

CAPÍTULO XIX

AS NOÇÕES DE GRANDEZA E DE MEDIDA

A noção de grandeza – Na sua origem e em grande parte do seu desenvolvimento histórico e das suas aplicações, a Matemática pode ser chamada *a ciência das grandezas*.

Ainda hoje, não falta quem a defina desse modo. E, no entanto, o conceito de ciência matemática pura tende a se tornar cada vez mais independente da noção de grandeza.

Vimos, é certo, que a ideia de número se modelou a princípio sobre as grandezas que aparecem no campo da nossa experiência: grandezas discretas, representadas pelos números inteiros; grandezas divisíveis, que deram origem aos números fracionários; grandezas relativas, grandezas contínuas, das quais procederam os números qualificados e os números irracionais. Para explicar a generalização de número não é suficiente recorrer à experiencia externa, ou sensível. Nenhuma experiência física nos revelará jamais a existência de grandezas incomensuráveis, nem mesmo nos autorizará a admiti-la; a continuidade é um dado do espírito, que só pode encontrar no mundo dos sentidos realizações imperfeitas. Seja qual for, porém, a fonte da nossa intuição das grandezas contínuas, o número irracional foi criado para representá-las. Mas as generalizações superiores do número nem sempre nasceram da consideração das grandezas a que se aplicam, e, pelo contrário, precederam por vezes qualquer aplicação.

O número é, pois, o símbolo da grandeza. Sobre o número fracionário, símbolo da grandeza divisível, nós reconstruímos a infinita cadeia das relações entre as grandezas divisíveis.

Mas se historicamente e psicologicamente o número se modela sobre a grandeza, logicamente ele a precede. O número é a forma, a grandeza é a substância. De posse da noção indefinidamente generalizável de número, a matemática pura prescinde da noção de grandeza.

À intuição e à experiência compete escolher a classe de números que exige a representação de cada classe de grandezas, como dados empíricos ou intuitivos.

Afirmar que uma classe de grandezas e uma classe de números possuem a mesma estrutura, é enunciar um postulado, que pertence ao domínio da matemática aplicada.

A matemática pura, tal como nós a concebemos hoje, ignora a noção de grandeza. Certos ramos da geometria, como a *Analysis situs*, abstraem mesmo completamente de qualquer ideia de medida. Porém, na matemática aplicada, a noção de grandeza desempenha o papel principal.

As grandezas concretas apresentam propriedades particulares das quais devemos aqui abstrair, tendo apenas em vista que existem grandezas de espécies diferentes; e outra coisa não exprime a generalização do número.

Do ponto de vista abstrato, pode-se dizer que são da mesma espécie duas grandezas que possam ser comparadas entre si, de modo a que fique estabelecido qual delas é inferior e qual superior à outra. Dever-se-ia talvez, procurando um maior rigor de expressões, denominar *quantidades* os diferentes estados de *uma mesma grandeza*, em vez de falar em grandezas iguais ou desiguais.

Costuma-se distinguir entre as grandezas *intensivas*, em relação às quais se pode definir a desigualdade, mas não a adição, e as grandezas *extensivas*, para as quais ambas essas noções possuem sentido. As do segundo tipo são as grandezas propriamente matemáticas.

As grandezas extensivas – Pode-se construir uma teoria axiomática das grandezas extensivas. A este respeito citemos os trabalhos de Helmholtz, de Stoltz, de Burali-Forti e de Huntington. Vamos aqui expor em resumo a teoria de Burali-Forti[39*] sobre as grandezas contínuas.

Uma *espécie de grandezas* é uma classe G, em relação à qual se define uma operação +, que se chamará a *adição das grandezas*.

O *elemento nulo* da classe G, isto é, na linguagem da teoria dos grupos, o módulo da adição, será representado por 0, por analogia com o número zero, mas sem confusão.

Duas outras definições prévias são necessárias:

1. A *desigualdade* de grandezas G. Na realidade, o que se define é o conjunto dos elementos *inferiores* a um elemento a: esse conjunto se representa pelo símbolo θa (*inferior a* a). A desigualdade se define então em termos da soma, isto é, do resultado da adição: "a sendo um G, θa é o conjunto dos x da classe G, tais que a é a soma de x e de um G não nulo."
2. *Um conjunto limitado* de G: assim chamaremos a todo conjunto u tal que existem G iguais ou superiores a um elemento qualquer de u.

Estabelecidas estas definições, eis aqui os oito postulados de Burali-Forti. Sejam *x, y, z* grandezas *G*; então:

P1. Se $x+z=y+z$, tem-se $x=y$;

P2. Existe (pelo menos) um G nulo (e do postulado anterior resulta a unicidade dessa grandeza nula);

P3. Existe (pelo menos) um G não nulo;

P4. A soma de dois G, dos quais um é não nulo, é um *G* não nulo;

P5. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (o que se significa que a adição das grandezas possui a propriedade associativa);

P6. Ou bem $x=y$, ou bem $x<y$, ou bem $y<x$;

P7. Se x é não nulo, existe um G inferior a x e não nulo;

39 * *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri*, em *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, v. XXXIX (1904).

P8. Se u é um conjunto limitado de G, existe uma grandeza x tal que $\theta x = \theta u$.[40+]

Estes oito postulados são independentes uns dos outros. O sétimo exprime a divisibilidade, o oitavo a continuidade das grandezas da classe G. Deles se deduzem, entre outros, os seguintes teoremas:

1. a e b sendo não nulos, existe um número inteiro n tal que $b<na$ (a multiplicação por sendo definida como addição de n quantidades iguaes a a). A esta proposição, que em certas teorias é tomada como primitiva, se denomina então *postulado de Arquimedes*. Ela desempenha um papel muito importante na *medida* das grandezas.
2. Dados uma grandeza e um número inteiro não nulo n, existe uma grandeza única x tal que $nx=a$. Esta proposição exprime a divisibilidade indefinida das grandezas G.

Em suma, uma classe de grandezas G é uma classe entre cujos elementos se pode efetuar a operação +, e que verifica os oito postulados acima.

Assim considerada, a noção de grandeza é muito geral. Os números reais constituem a classe tipo das grandezas contínuas, aquela que representa as propriedades formais dessas grandezas – o seu esquema abstrato. A matemática pura pode ignorar a grandeza a substituí-la pelo número porque os dois conceitos são formalmente idênticos. Mas o de grandeza implica um dado empírico ou intuitivo ao passo que o de número é uma construção inteiramente abstrata.

Observemos que outras classes de grandezas podem verificar parcialmente os postulados de Burali-Forti. Assim, por exemplo, todas as classes do tipo do conjunto dos números racionais verificam esse sistema com exclusão do último postulado.

A noção de medida – Do que acabamos de ver, resulta que o número representa a grandeza; ou, mais precisamente, que entre as grandezas de uma dada espécie e a classe de números que lhe servem de tipo, pode-se estabelecer uma correspondência perfeita e tal que à soma de duas grandezas quaisquer corresponde a soma dos dois números correspondentes.

Estabelecer essa correspondência é definir a *medida* das grandezas consideradas, que é a operação fundamental das ciências físicas. Assim, para medir os comprimentos sobre uma reta, fazem-se corresponder os números reais e os pontos da reta, que serão extremidades dos segmentos medidos.

Os postulados de Burali-Forti caracterizam o conceito de grandeza contínua *mensurável*.

A medida de uma grandeza individual, isto é, do que se conviria antes chamar uma quantidade relativamente a uma grandeza-padrão da mesma espécie, será a *relação* entre a primeira e a segunda; ou, mais precisamente, o número racional ou irracional pelo qual se deve multiplicar a segunda para obter a primeira. Quando elas forem iguais, a medida da primeira será o número 1. A grandeza que serve à comparação se chama a *unidade de medida*, e a sua escolha determina a medida de todas as outras quantidades da mesma espécie.

Como se vê, a teoria da medida das grandezas contínuas lineares se baseia nos postulados de Arquimedes e de Cantor-Dedekind.

Extensão da noção de medida – Voltando ao ponto de vista da matemática pura, a noção de medida é suscetível de generalizações muito interessantes, de modo a se aplicar a conjuntos descontínuos.

40+ [+] Nota do editor: θu é o conjunto dos x tais que, para algum elemento y de u, $x<y$.

A medida dos conjuntos quaisquer de pontos se apresenta então como extensão das noções geométricas de comprimento, área, volume, que do ponto de vista habitual só têm sentido em relação a conjuntos contínuos. Essa extensão, que se prende intimamente à de integral pode ser feita de vários modos. Citemos, por ordem cronológica, as definições de Hankel (1882), Cantor (1884), Peano (1887), e Jordan (1892), e passemos a indicar como se apresenta a noção de medida dos conjuntos no sentido de Borel, generalizada por Lebesgue[41*], a qual se devem numerosos aperfeiçoamentos na teoria das funções.

Consideremos em primeiro lugar os conjuntos lineares de pontos.

O problema consiste em fazer corresponder a cada conjunto linear restrito K um número positivo ou nulo $m(K)$, que será a sua *medida*, satisfazendo as seguintes condições:

1) o segmento $0 \vdash\!\dashv 1$ tem como medida o número 1;

2) dois conjuntos iguais (isto é, que se possam superpor por translação sobre a reta a que pertencem) têm a mesma medida;

3) o conjunto formado pela reunião de um número finito ou de uma infinidade enumerável de conjuntos, sem ponto comum dois a dois, tem por medida a soma das medidas dos conjuntos parciais.

Dizem-se *mensuráveis no sentido de Lebesgue* os conjuntos para os quais é possível definir o número $m(K)$.

Eis aqui como se obtém esse número:

Dado um K, encerremos seus pontos em um número finito ou em uma infinidade enumerável de intervalos exteriores uns aos outros. Seja λ o comprimento total desses intervalos. Consideremos o conjunto dos λ possíveis; esse conjunto tem um extremo inferior $m_e(K)$, que se chama a *medida externa* de K. Seja, por outro lado, AB um segmento que contem K, e chamemos K_1 o conjuncto dos pontos de AB que não pertencem a K. O conjunto K_1 tem uma medida exterior $m_e(K_1)$. O número positivo ou nulo igual à diferença

$(\overline{AB}) - m_e(K_1)$

($\overline{AB}$ sendo o comprimento de AB) se chama a *medida interna* de K e se representa por $m_i(K)$.

Demonstra-se então que se tem

$m_i(K) \leq m_e(K)$.

Pois bem, quando essas duas quantidades são iguais, demonstra-se que o seu valor comum satisfaz as três condições acima enunciadas. Esse valor comum é, por definição, a medida do conjunto K, e este se diz mensurável.

Um intervalo qualquer é mensurável; sua medida é o seu comprimento. Todo conjunto finito ou enumerável de pontos tem medida nula. O conjunto dos pontos irracionais do segmento $0 \vdash\!\dashv 1$ tem para medida o número 1: do ponto de vista da medida esse conjunto é equivalente ao segmento completo, cuja medida não se altera pela supressão dos pontos racionais.

Eis aqui um resultado muito interessante. Tomemos conjuntos constituídos, cada um, seja por um ponto, seja por um intervalo, e apliquemos um número finito de vezes as seguintes

41 * H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* (1904).

operações: 1) reunamos um número finito ou uma infinidade enumerável de tais conjuntos; 2) tomemos o conjunto comum a um número finito ou a uma infinidade enumerável desses conjuntos. Nessas condições, demonstra-se que os conjuntos assim obtidos são todos mensuráveis. Como se vê, a noção de mensurabilidade no sentido exposto é extremamente geral, pois na realidade abrange todos os conjuntos que se podem efetivamente definir.

A definição de Lebesgue se estende facilmente aos conjuntos de duas ou mais dimensões. Obtêm-se desse modo as definições da *medida superficial*, extensão da noção de *área*, da medida de um conjunto tridimensional, extensão da noção de *volume*, e assim por diante. Aqui como nas teorias já estudadas, as noções, que na ciência clássica se aplicam exclusivamente aos conjuntos contínuos, se generalizam ao domínio descontínuo.