ARTIGOS

DOI: https://doi.org/10.53727/rbhc.v18i2.902

O papel de Sylvester no desenvolvimento da teoria dos invariantes

Sylvester´s role in the development of invariants theory

Magno Luiz Ferreira | Universidade Federal do Rio de Janeiro
magno.ferreira@ifrj.edu.br
https://orcid.org/0009-0006-0162-9910

Gérard Émile Grimberg | Universidade Federal do Rio de Janeiro
gerard.emile@terra.com.br
https://orcid.org/0000-0003-1075-5530

RESUMO Arthur Cayley (1821-1895) e James Joseph Sylvester (1814-1897) são vistos como personagens centrais do desenvolvimento da teoria dos invariantes. Este artigo tem a finalidade de analisar o papel das ideias de Sylvester em três recortes temporais: 1839 a 1848; 1849 a 1851 e 1852 a 1853, os quais representam os momentos de mudanças em suas perspectivas de pesquisa. Foi possível identificar a influência dos trabalhos de Julius Plücker (1801-1868) nas publicações que fundamentaram uma visão geométrica das bases da nova teoria, conexões com outras áreas de pesquisa, como a mecânica, e a delimitação das práticas que caracterizaram a teoria dos invariantes, por volta da metade do século XIX.

Palavras-chave teoria dos invariantes – James Joseph Sylvester (1814-1897) – polinômios homogêneos.

ABSTRACT *Arthur Cayley (1821-1895) and James Joseph Sylvester (1814-1897) are seen as central characters in the development of invariant theory. This article aims to analyze the role of Sylvester's ideas in three-time frames: 1839 to 1848; 1849 to 1851 and 1852 to 1853, which represent the moments of change in his research perspectives. It was possible to identify the influence of the works of Julius Plücker (1801-1868) in the publications that supported a geometric vision of the bases of the new theory, connections with other areas of research, such as mechanics, and the delimitation of the practices that characterized the theory of invariants, around the middle of the 19th century.*

Keywords *invariant theory – James Joseph Sylvester (1814-1897) – homogeneous polynomials.*

Introdução

"Na segunda, 15 de março de 1897, em Londres, onde, em 3 de setembro de 1814, ele nasce, morreu o personagem mais extraordinário da metade do século no mundo matemático".[1] É assim que George Bruce Halsted (1853-1922) inicia a biografia que homenageava o matemático James Joseph Sylvester no ano de sua morte. Essa publicação do volume 4 do *The American Mathematical Monthly* (Halsted, 1897), mostra a importância que era dada a Sylvester na matemática britânica do século XIX.

Nosso artigo pretende analisar o contexto no qual ocorreram as principais contribuições de Sylvester para a teoria dos invariantes. A pesquisa britânica sobre os *invariantes* tem seu início em 1841 com a publicação do artigo de George Boole (1815-1864) "*Exposition of a general theory of linear transformations*" que, de acordo com Parshall (1989) e Crilly (1986), indica um novo rumo para as pesquisas sobre transformações lineares no Reino Unido. Em 1845, Cayley propõe a busca de todas as expressões algébricas que permanecem inalteradas por substituições lineares das variáveis dos polinômios homogêneos vinculados a elas.

> Ao continuar minhas pesquisas sobre o presente assunto, fui levado a uma nova maneira de considerar a questão, que, ao mesmo tempo em que é muito mais geral, tem a vantagem de se aplicar diretamente ao único caso que se pode esperar desenvolver com algum grau de completude, o de funções de duas variáveis. De fato, pode-se propor a pergunta: 'Encontrar todas as derivadas de qualquer número de funções, que tenham a propriedade de manter sua forma preservada por quaisquer transformações lineares das variáveis'. Por Derivada entendo uma função deduzida de qualquer maneira das funções dadas, e dou o nome de Derivada *Hyperdeterminante*, ou simplesmente *Hyperdeterminante*, àquelas derivadas que têm a propriedade que acabamos de enunciar[2] (Cayley, 1845, p. 104; destaques nossos).[3]

Podemos observar a constituição de uma nova etapa de pesquisa, ao se ressaltar a necessidade de enumerar os *invariantes* relacionados aos polinômios homogêneos. No mesmo período, Cayley e Sylvester se conhecem e iniciam uma colaboração que renderia muitos frutos para a produção de matemática britânica (Parshall, 2006a, p. 91). Na década de 1850, Sylvester começa a publicar suas contribuições relacionadas ao domínio de pesquisa demarcado por Cayley, na perspectiva de estabelecer características gerais da nova teoria.

Os desdobramentos da teoria dos invariantes já foram bem investigados em trabalhos como o de Karen Parshall, autora de duas biografias sobre Sylvester (Parshall, 1998, 2006a). Esses artigos dão conta de detalhes importantes sobre a evolução da teoria dos invariantes,

1 No original: "On Monday, March 15, 1897, in London, where, September 3, 1814, he was born, died the most extraordinary personage for half a century in the mathematical world".

2 No original: "In continuing my researches on the present subject, I have been led to a new manner of considering the question, which, at the same time that it is much more general, has the advantage of applying directly to the only case which one can possibly hope to develop with any degree of completeness, that of functions of two variables. In fact, the question may be proposed, 'To find all the derivatives of any number of functions, which have the property of preserving their form unaltered after any linear transformations of the variables'. By Derivative I understand a function deduced in any manner whatever from the given functions, and I give the name of Hyperdeterminant Derivative, or simply of Hyperdeterminant, to those derivatives which have the property just enunciated".

3 Todas as traduções de trechos em língua estrangeira foram realizadas pelos autores.

tanto sobre o protagonismo inicial de Boole e Cayley, bem como apresenta a iniciativa de Sylvester para sistematizar os procedimentos utilizados pelos dois matemáticos. Entendemos que o recorte temporal apresentado pela autora, o qual considera a evolução social da trajetória do personagem central de suas pesquisas, merece um olhar que se concentre nas mudanças de perspectiva sobre o tratamento dos polinômios homogêneos, o que permite uma melhor compreensão do modo como suas pesquisas se encontram com a teoria dos invariantes.

Como exemplo, podemos citar o tratamento dado ao texto "*Sketch of a memoir on elimination, transformation, and canonical forms*" (Sylvester, 1851a). Parshall (2006b, p. 189) destaca a percepção do matemático a respeito da invariância do determinante funcional desenvolvido por Otto Hesse (1811-1874) nos anos 1840, como pode ser visto em Hesse (1844). Entretanto, os conceitos que foram associados ao objeto matemático ainda demandam esclarecimentos sobre seu papel no desenvolvimento da teoria.

Outro autor que lidou com o surgimento da teoria dos invariantes em solo britânico foi Tony Crilly, autor da biografia de Cayley (Crilly, 2006), que se dedicou a apresentar as ideias mobilizadas por Cayley no início de suas contribuições, detalhando a aplicação de práticas como os *hyperdeterminantes* (Crilly, 1986). Da mesma forma, apresenta um olhar para o modo como as ideias de Sylvester se relacionam com as de Cayley, no processo de desenvolvimento da nova teoria.

Os trabalhos dos autores citados até aqui revelam que a história dos *invariantes algébricos* ainda merece investigações sobre o papel desempenhado por Sylvester no estabelecimento da teoria. Analisaremos as publicações do matemático inglês, no período de 1839 até 1853, para compreender como os métodos e conceitos, elaborados por ele, se articulam com os interesses de outros pesquisadores no mesmo período. Essas contribuições representaram uma sistematização das práticas da teoria dos invariantes, para além daquelas já desenvolvidas por Cayley e Boole na década de 1840. A periodização deste artigo considera três etapas fundamentais: 1) 1839 a 1848: período das primeiras publicações até antes de seu conhecimento do recurso das coordenadas homogêneas; 2) 1849 a 1851: período de publicações de artigos sobre propriedades geométricas; 3) 1852 a 1853: período de estabelecimento dos conceitos-chave da teoria dos invariantes.

Ao compararmos essa periodização com Parshall (1998), observamos uma diferença nos intervalos de tempo. Isso se deve ao fato de a autora considerar a evolução da carreira de Sylvester. Já Crilly (1986), ao se concentrar na obra de Cayley, divide a história dos invariantes de forma que não considera noções geométricas que influenciaram a formação dos conceitos-chave da teoria. Dessa forma, entendemos que o recorte temporal proposto no parágrafo anterior revela aspectos que não foram analisados por esses autores.

Este trabalho está dividido em 4 seções, além desta introdução e da conclusão. Inicialmente nos concentramos na trajetória dos interesses de Sylvester até o final da década de 1840, por meio de seus artigos publicados e algumas correspondências que mostram as mudanças de sua perspectiva sobre a pesquisa em matemática. Em seguida, analisamos os textos que trataram dos conceitos geométricos que serviram de base para suas contribuições sobre a teoria dos invariantes. Logo após, analisamos os artigos que estabeleceram os conceitos-chave que deram uma nova perspectiva sobre a agenda proposta por Cayley em 1845. Por fim, nos concentramos na divulgação apresentada no continente, por meio de trabalhos que apresentaram nosso personagem de pesquisa aos alemães interessados nas práticas sobre os *invariantes*.

As contribuições de Sylvester antes do conhecimento sobre as coordenadas homogêneas

Como apresentamos na introdução, Boole (1841) é visto como o texto fundador das ideias sobre as formas algébricas que permanecem inalteradas após transformações lineares das variáveis em polinômios homogêneos. Essa noção é reforçada por Parshall (1989), que aponta a conexão com a abordagem de Lagrange sobre o problema da redução de formas quadráticas à suas formas canônicas[4]. Destacamos que essa característica evidencia que os *invariantes* não eram o foco principal das investigações.

Seguindo os resultados do texto de Boole, Cayley (1845) chama atenção para a importância de se concentrar mais nas expressões *invariantes* do que nas propriedades das transformações, e retoma a discussão a partir de uma nova perspectiva que estabelece uma agenda de pesquisa. Nesse contexto, Cayley expande o problema aos polinômios para graus maiores do que 2, na busca de novas derivadas de polinômios homogêneos.

A proposta de encontrar todas as formas derivadas, nome dado por Cayley (1845) aos futuros *invariantes*, demonstra que ele entende o problema das transformações para além da discussão da redução de uma forma quadrática, que se associava ao problema proposto por Lagrange como Boole apresentou em 1841. Esse novo entendimento seria a porta de entrada para os trabalhos de Sylvester nos anos 1850.

No mesmo período em que Boole e Cayley investigavam as transformações, Sylvester se dedica à determinação de métodos para resolução de sistemas de equações e propriedades das resultantes[5] (Sylvester, 1839). Apesar da noção de invariância ainda não estar presente nesse artigo de 1839, as resultantes passam a ser identificados como *invariantes* em Sylvester (1851a). Esse fato evidencia que a mudança de perspectiva proposta em Cayley (1845) influenciou o inicio da participação de Sylvester na teoria dos invariantes. De acordo com Parshall (2006a), os dois matemáticos se conheceram em algum momento próximo de 1847, uma vez que a primeira correspondência trocada entre os dois personagens data de 24 de novembro de 1847.

Nesse mesmo período, encontramos Sylvester dedicado a investigações sobre resolução de equações, mais específicamente as de grau 3. Artigos como "*An account of a discovery in the theory of numbers relative to the equation* $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$" (Sylvester, 1847a), "*On the equation in numbers* $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$*, and its associate system of equations*" (Sylvester, 1847b) e "*On the general solution, in certain cases, of the equation* $x^3 + y^3 + z^3 = Mxyz$" (Sylvester, 1847c) se caracterizaram por uma abordagem algébrica, uma vez que tratavam de determinar fórmulas que dependiam dos coeficientes dos polinômios. A relação desses artigos com o conhecido teorema de Sturm revela o interesse do autor inglês nos problemas de determinação

4 Uma forma canônica típica de um polinômio homogêneo é quando todos os termos são expressos em potências de uma única variável. Por exemplo, se considerarmos um polinômio homogêneo em duas variáveis x e y, a forma canônica envolveria a expressão de todos os termos em potências da variável x, enquanto a variável y seria tratada como um coeficiente constante.

5 Esse termo se refere à forma algébrica que surge no processo de eliminação das variáveis em um sistema de equações. Sylvester inicia suas investigações construindo as resultantes em função das raízes dos polinômios envolvidos no sistema, como uma generalização do teorema de Bézout (Sylvester, 1839, p. 429). Essa abordagem se modifica para uma construção das resultantes em função dos coeficientes a partir da elaboração do método dialítico para resolução de sistemas de equações (Sylvester, 1841).

da natureza das raízes de uma equação. Sinaceur (1991, p. 134), destaca que essas contribuições fazem parte de um processo de algebrização do teorema de Sturm.

As contribuições de Sylvester utilizando as coordenadas homogêneas de Plücker

Sylvester começa a mudar sua perspectiva algébrica sobre os polinômios homogêneos ao conhecer a obra de Plücker, por intermédio das conversas com Cayley: "eu não fui capaz de fazer mais do que mergulhar em Plücker,[6] mas ficarei extremamente agradecido se puder deixar os livros comigo por mais tempo, se não for inconveniente para você"[7] (Sylvester para Cayley, 1849 *apud* Parshall, 2006a, p. 95). De acordo com Mansion (1873), Plücker prestou grande serviço para a geometria projetiva ao propor a interpretação de conceitos geométricos por meio das propriedades dos polinômios homogêneos. As contribuições do matemático alemão serviram de inspiração para os trabalhos de Sylvester sobre a natureza dos pontos de contato de curvas e superfícies. Destacamos que, em 1837, Plücker se dedicou a estabelecer relações sobre os pontos singulares de curvas de graus 3, 4 e 5 (Plücker, 1837).

O uso dos polinômios e coordenadas homogêneas permitiu situar as curvas no que ficaria conhecido como plano projetivo que, no final do século XIX, influenciou a perspectiva dos britânicos sobre as abordagens possíveis para problemas de geometria, o que possibilitou a identificação de pontos no infinito e pontos de coordenadas imaginárias. Em particular, Sylvester percebe a conexão entre as técnicas de eliminação e as interpretações sobre os contatos de curvas representadas em coordenadas homogêneas. Tanto ele quanto Cayley reconhecem a possibilidade de lidar com n dimensões por meio de polinômios em várias variáveis.

> A tendência atual da Geometria é apontar para uma generalidade que é incapaz de ser atingida por sua própria natureza, a menos que admitamos a doutrina do Espaço Inconcebível; espaço dotado de um número indefinido de dimensões. Linhas e figuras imaginárias no espaço comum há muito tempo são admitidas na Geometria Moderna, mas o Espaço Inconcebível (como me atrevo a chamá-lo) é um passo ainda mais alto na ordem do desenvolvimento transcendental[8] (Sylvester para lord Brougham, 1849 *apud* Parshall, 1998, p. 20).

Como podemos ver, o uso dos polinômios homogêneos e das ideias de Plücker se fazem presentes no discurso de Sylvester. Como Mansion (1873, p. 316) destaca, os dois matemáticos, além de Cayley, se dedicaram ao estudo de pontos singulares. Isso pode ser observado

6 Apesar de não se saber exatamente de que obra o matemático está falando, acreditamos que se trata do *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, publicados em 1828 e 1831 (volumes 1 e 2 respectivamente). Esse livro apresenta a ideia do uso de coordenadas homogêneas, além de conceitos como pontos no infinito e pontos imaginários da forma como esses surgem em Sylvester (1850a).

7 No original: "I have not been able to do more than dip into Plücker but I shall be exceedingly obliged if you can leave the books with me for some time longer without inconvenience to yourself".

8 No original: "The present tendency of Geometry is to point to a generality which it is incapable from its very nature of attaining, unless we admit the doctrine of Inconceivable Space; i.e. space endowed with an indefinite number of dimensions. Imaginary lines and figures in ordinary space have long been admitted into Modern Geometry, but Inconceivable Space (as I venture to term it) is a step still higher in the order of transcendental development".

em Cayley (1844, p. 127), no qual encontramos o tratamento da geometria em n dimensões e identificamos os *hyperdeterminantes* sendo utilizados para determinar intersecção de superfícieis cônicas. Outra relação importante entre coordenadas homogêneas e *invariantes* é encontrada em Dias e Grimberg (2019), que apontam o papel central do trabalho de Cayley, na teoria dos invariantes, para o desenvolvimento da teoria das distâncias, por intermédio do estabelecimento da métrica de Cayley-Klein.

No caso de Sylvester, as coordenadas homogêneas surgiram pela primeira vez no artigo "*On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates*", que teve os polinômios homogêneos de grau 2 em três variáveis como objeto principal de suas investigações (Sylvester, 1850a). No texto, encontramos objetos que se revelariam *invariantes* ou *covariantes* a partir de 1851, quando o autor descreve os conceitos-chave da teoria.

O discriminante de uma forma quadrática em 3 variáveis é o primeiro desses objetos que encontramos em Sylvester (1850a). É importante destacar que o artigo de Boole (1841) discute a propriedade invariante desse objeto. No entanto, o autor utiliza os discriminantes como forma de determinar os pontos de intersecção de duas cônicas. "Mencionei que pairava uma dúvida sobre minha afirmação de que, a menos que as raízes de □(U + λV) fossem todas reais, os pontos de inflexão deveriam ser todos imaginários"[9] (Sylvester para Cayley *apud* Parshall, 1998, p. 28). Como podemos ver nessa correspondência, enviada em 21 de dezembro de 1850, que a ideia de discriminante difere daquela anunciada pelo autor do texto fundador da teoria dos invariantes.

A expressão[10] □(U + λV) se refere ao determinante da matriz associada de um feixe gerado por duas cônicas, U e V. É nesse ponto que identificamos a nova perspectiva do autor a respeito dos resultados que ele havia desenvolvido sobre teoria de eliminação, transformações e raízes de equações. De acordo como Brechenmacher (2006), essa é a primeira vez que o cálculo de determinantes é utilizado para determinar pontos de intersecção e contatos de cônica.

O hessiano, que será interpretado como *covariante* pelo próprio Sylvester, é outro objeto utilizado para investigar casos em que as cônicas se tangenciam, o que foi chamado de contatos duplos (Sylvester, 1850a, p. 272). Esse exemplo, assim como o do discriminante, revela a visão geométrica dessa etapa da obra de Sylvester. A partir disso, é possível perceber que o autor se dedica a estabelecer uma conexão entre álgebra e geometria, como fica claro em outros artigos.

Um bom exemplo dessa conexão são as semelhanças entre as abordagens algébrica e geométrica na construção da resultante de um sistema de formas quadráticas em três variáveis (Sylvester, 1850b, p. 215). Destacamos que essa aproximação chamou a atenção para investigações a respeito das formas associadas, o que culmina no início da participação de Sylvester no desenvolvimento da teoria dos invariantes.

9 No original: "I mentioned that a doubt hung over my assertion that unless the roots of □(U + λV) were all real, the points of inflexion must be all imaginary".

10 Dadas as cônicas

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$
$$V = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\alpha' yz + 2\beta' xz + 2\gamma' xy$$

em coordenadas homogêneas, temos:

$$\square(U + \lambda V) = \begin{vmatrix} a + \lambda\alpha & c' + \lambda\gamma' & b' + \lambda\beta' \\ c' + \lambda\gamma' & b + \lambda\beta & a' + \lambda\alpha' \\ b' + \lambda\beta' & a' + \lambda\alpha' & c + \lambda\gamma \end{vmatrix}$$

Ele entendia que as investigações sobre as transformações lineares, que já se tratava de um assunto de interesse em si próprio, mereciam ser considerados com relação às formas associadas, para além dos polinômios homogêneos em si. A ideia central do artigo sobre o cálculo das formas foi apresentar um compilado de propriedades dos *concomitantes*, nome dado para formas que permanecem inalteradas após substituições das variáveis. Destacamos que o autor desenvolveu outros conceitos que extrapolavam aqueles difundidos nos textos de Cayley e Boole nos anos 1840. Os detalhes dessa inserção de novos conceitos são melhor compreedidos quando olhamos para as produções que trataram diretamente dos *invariantes*.

Os artigos sobre os *invariantes* de Sylvester

O primeiro trabalho publicado por Sylvester sobre a temática dos *invariantes* apresenta conexão entre os problemas de contatos de curvas e superfícies algébricas e práticas de eliminação. Em Sylvester (1851a), encontramos uma investigação sobre as propriedades das resultantes[11] que surgem do processo de eliminação e se conecta com as ideias desenvolvidas por Cayley, a respeito dos resultados encontrados em Boole (1841).

A preocupação com as transformações lineares pode ser identificada na aplicação de dois operadores utilizados pelo autor, os quais geram formas que viriam a identificadas como *invariantes*, como podemos ver no seguinte trecho:

> Existem (como agora é bem conhecido) outras funções além do determinante, chamadas por seu descobridor (Sr. Cayley) de *Hyperdeterminantes*, dotadas de uma propriedade similar de imutabilidade. Eu descobri um processo para encontrar *Hyperdeterminantes* de funções de qualquer grau de qualquer número de letras, por meio de um processo de Permutação Composta. Todas as formas do Sr. Cayley para funções de duas letras podem ser obtidas dessa maneira com a ajuda de um dos dois processos (a saber, aquele que daqui em diante será chamado de processo de derivação), para passar de constantes imutáveis para formas imutáveis[12] (Sylvester, 1851a, p. 187; destaques nossos).

Neste trecho, Sylvester chama a atenção para novos processos de derivação.[13] O primeiro deles, que o autor chama de operador *aposicional*, é um processo que se confunde com as formas adjuntivas[14] descritas em correspondência apresentada em Hermite (1850). O segundo, chamado

11 Função dos coeficientes envolvidos em um sistema de n equações homogêneas em n variáveis que garante a existência de uma solução.

12 No original: "There exist (as is now well known) other functions besides the determinant, called by their discoverer (Mr. Cayley) hyperdeterminants, gifted with a similar property of immutability. I have discovered a process for finding hyperdeterminants of functions of any degree of any number of letters, by means of a process of Compound Permutation. All Mr. Cayley's forms for functions of two letters may be obtained in this manner by the aid of one of the two processes (to wit, that one which will hereafter be called the derivational process), for passing from immutable constants to immutable forms".

13 Esse termo não se refere ao cálculo diferencial nesse contexto, mas aos invariantes. Compare Cayley (1845).

14 Hermite propõe uma mudança de variáveis para um polinômio $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de grau 2, da seguinte maneira: $y_0 = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_0}$; $y_1 = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_1}$; ... ; $y_n = \frac{1}{2}\frac{df}{dx_n}$. O polinômio transformado foi chamado de *forme adjointe*, ou forma adjuntiva, pelo autor. O operador aposicional de Sylvester lida com as propriedades da expressão $y_0x_0 + y_1x_1 + \ldots + y_nx_n$, a qual surge da forma reescrita $\frac{1}{2}\frac{df}{dx_0}x_0 + \frac{1}{2}\frac{df}{dx_1}x_1 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{df}{dx_n}x_n$, apresentada pelo próprio Hermite em sua correspondência com Jacobi.

de *derivacional*, revela uma forma de gerar *covariantes* comparada aos *hyperdeterminantes* de Cayley. Em Sylvester (1853c, p. 545), esse operador recebe o nome de *emanante* e é descrito como o resultado da aplicação $\left(x'\frac{d}{dx}+y'\frac{d}{dy}+\ldots+z'\frac{d}{dz}\right)$ um número n de vezes ao polinômio homogêneo. Esse operador se tornou comum em livros textos que se dedicaram a descrever técnicas desenvolvidas para a teoria dos invariantes, como é caso de Bruno (1876) e Salmon (1885).

Ao lidar com o problema das formas canônicas, Sylvester utiliza formas quadráticas e biquadráticas como exemplos de aplicação do *emanante*. Nesses casos, o operador se compara com um determinante funcional que o autor chamou de hessiano (Sylvester, 1851a, p. 193). Esse objeto foi desenvolvido por Otto Hesse (1811-1874) no artigo *"Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraische Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln"*, publicado no volume 28 do jornal do Crelle de 1844. De acordo com Parshall (2006a), o autor teve conhecimento da propriedade invariante do determinante funcional por meio de Cayley.

O desenvolvimento dos *emanantes* e a aplicação dos hessianos são evidências do ingresso de Sylvester na agenda proposta por Cayley em 1845. No entanto, é importante apontar uma diferença entre as contribuições dos dois matemáticos. Enquanto o criador dos *hyperdeterminantes* se dedicou a listar os *invariantes*, seu amigo se debruçou sobre as propriedades das transformações e o modo como elas influenciam, ou não, nas formas derivadas dos polinômios homogêneos.

> O objetivo primário do Cálculo das Formas é a determinação das propriedades das Funções Racionais Integrais Homogêneas ou sistemas de funções: isto é efetuado por meio de transformação; mas, para efetuar tal transformação, a experiência mostrou que as formas ou sistemas de formas devem ser contemplados não apenas como são em si mesmos, mas com referência ao conjunto de formas que podem ser derivadas deles e que constituem como se fosse uma atmosfera invisível ao seu redor[15] (Sylvester, 1852b, p. 52).

Essa introdução nos revela que as investigações sobre as formas algébricas não se limitam aos polinômios que as representam, mas precisam ser conduzidas considerando as formas derivadas. Essa afirmação surge como resultado das pesquisas que o autor realizou no ano anterior, que trataram dos *invariantes* e apresentaram os conceitos de *covariante* e *contravariante*.

O primeiro artigo no qual encontramos o termo *invariante* (Sylvester, 1851b), revela a retomada da discussão de Sylvester (1851a) de forma mais detalhada. A começar pela tentativa de esclarecer os significados de termos utilizados até aquele momento.

> Em primeiro lugar, que um equivalente linear de qualquer função homogênea dada seja entendido como o que a função se torna quando funções lineares das variáveis são substituídas no lugar das próprias variáveis, sujeitas à condição do módulo de transformação (isto é, o valor do determinante formado pelos coeficientes de transformação) sendo a unidade[16] (Sylvester, 1851b, p. 289).

15 No original: "The primary object of the Calculus of Forms is the determination of the properties of Rational Integral Homogeneous Functions or systems of functions: this is effected by means of transformation; but to effect such transformation experience has shown that forms or form-systems must be contemplated not merely as they are in themselves, but with reference to the ensemble of forms capable of being derived from them, and which constitute as it were an unseen atmosphere around them".

16 No original: "In the first place, let a linear equivalent of any given homogeneous function be understood

Esse cuidado com o significado dos termos está diretamente ligado à ideia estabelecer um vocabulário para a nova teoria. Como pode ser visto, os equivalentes lineares são os polinômios homogêneos transformados por substituições lineares das variáveis e o módulo da transformação é o determinante da matriz associada à transformação. Essas delimitações nos mostram que as discussões desse artigo são centradas nas propriedades das transformações.

Inicialmente, Sylvester propõe uma classificação das transformações em dois grupos: concorrentes, quando se coloca as variáveis originais em função das novas variáveis, e complementares, quando as novas ficam em função das originais. Essas diferenças são apresentadas por meio da teoria das matrizes e determinantes, como na descrição a seguir:

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ $e\ B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$, com $a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$,

$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' \\ 0 & a'' & b'' \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha' & 0 & \gamma' \\ \alpha'' & 0 & \gamma'' \end{vmatrix}, \beta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a' & 0 & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix}, \ldots,$ as matrizes AA e BB são recíprocas. Duas transformações *F(x,y,z)* e *G(u,v,w)* são ditas concorrentes se $\begin{matrix} x = aX + bY + cZ \\ y = a'X + b'Y + c'Z \\ z = a''X + b''Y + c''Z \end{matrix}$ e

$\begin{matrix} u = aU + bV + cW \\ v = a'U + b'V + c'W \\ w = a''U + b''V + c''W \end{matrix}$. Mas se $\begin{matrix} u = \alpha U + \beta V + \gamma W \\ v = \alpha' U + \beta' V + \gamma' W \\ w = \alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W \end{matrix}$ com α, β e $\gamma\gamma$ definidos pelos determinantes acima, *F* e *G* são ditas complementares. Esse artigo busca lidar com formas associadas a um polinômio ou um sistema deles e o autor propõe comparar transformações sucessivas. Dessa forma, as transformações F e G, podem ser associadas a uma ou mais formas. A partir disso, define-se o conceito de concomitância, que se caracteriza por transformações lineares concorrentes ou complementares.

Como podemos ver, apesar de Sylvester estabelecer um vocabulário dos *invariantes* a partir de 1853, os termos *concomitantes* e formas associadas já figuravam em seus textos. Os termos *covariante* e *contravariante* ganham detalhes específicos para os conceitos apresentados nesse artigo, como a investigação das formas associadas.

As formas associadas são expressões construídas por meio de combinações dos coeficientes dos polinômios ou sistema de polinômios homogêneos. Essas expressões podem ser formadas exclusivamente pelos coeficientes ou novos polinômios. É importante destacar que esse artigo trata apenas de transformações cuja matriz associada tem determinante igual a 1, que o autor chama de unitárias. Como exemplos, podemos citar o discriminante e o hessiano de formas quadráticas. Os *concomitantes* são caracterizados a partir da seguinte comparação:

> A primeira espécie de concomitância é definida pelos equivalentes correspondentes das duas formas associadas sendo deduzidas por transformações ou substituições precisamente

to mean what the function becomes when linear functions of the variables are substituted in place of the variables themselves, subject to the condition of the modulus of transformation (that is, the value of the determinant formed by the coefficients of transformation) being unity".

> semelhantes, ou, como dissemos, concorrentes, cada uma a partir de sua primitiva dada. A segunda espécie de concomitância é definida pelos equivalentes correspondentes sendo deduzidos não por substituições semelhantes, mas contrárias, isto é, recíprocas ou complementares[17] (Sylvester, 1851b, p. 291).

Nessa citação, encontramos a base da ideia que diferencia os *covariantes* dos *contravariantes*. Como já destacamos, a noção tem base nas transformações, diretas ou inversas,[18] como pode ser visto nas descrições dos casos *concomitantes*.

- Os *covariantes*: formas associadas definidas por transformações concorrentes, ou seja, não complementares. Neste caso, o autor se refere a substituições diretas das variáveis $x_0, \dots, x_n\, x_0, \dots, x_n$ pelas novas $X_0, \dots, X_n X_0, \dots, X_n$, como abaixo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

- Os *contravariantes*: formas associadas definidas por transformações complementares. Neste caso, o autor se refere a substituições inversas das variáveis $x_0, \dots, x_n x_0, \dots, x_n$ pelas novas $Y_0, \dots, Y_n Y_0, \dots, Y_n$, como abaixo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Em Bruno (1876), encontramos uma descrição de *covariante* muito semelhante à dada em Sylvester (1851b). De acordo com o matemático italiano, os *covariantes* são formas derivadas (as formas associadas de Sylvester) de um polinômio homogêneo, cujos equivalentes lineares de ambas as formas (a original e a derivada) permanecem inalteradas, a menos do módulo da transformação (Bruno, 1876, p. 182). Essa descrição se mostra de acordo com aquelas estabelecidas no vocabulário elaborado por Cayley e Sylvester. Como exemplo, Bruno considera:

$$f(x,y) = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2$$
$$g(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

17 No original: "The first species of concomitance is defined by the corresponding equivalents of the two associated forms being deduced by precisely similar, or, as we have expressed it, concurrent transformations or substitutions, each from its given primitive. The second species of concomitance is defined by the corresponding equivalents being deduced not by similar but by contrary, that is, reciprocal or complementary substitutions".

18 Exemplo: considerando x_0, x_1, x_2 como as variáveis originais e X_0, X_1, X_2 como as novas temos

Transformação direta: $\begin{aligned} x_0 &= aX_0 + bX_1 + cX_2 \\ x_1 &= a'X_0 + b'X_1 + c'X_2 \\ x_2 &= a''X_0 + b''X_1 + c''X_2 \end{aligned}$; Transformação indireta: $\begin{aligned} X_0 &= ax_0 + bx_1 + cx_2 \\ X_1 &= a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 \\ X_2 &= a''x_0 + b''x_1 + c''x_2 \end{aligned}$

As transformações indiretas podem ser reescritas de modo a representar as variáveis antigas em função das novas. Após essas manipulações algébricas, chegamos a seguinte distribuição:

$$\begin{aligned} x_0 &= (b'c'' - c'b'')X_0 + (a'c'' - c'a'')X_1 + (a'b'' - b'a'')X_2 \\ x_1 &= (bc'' - cb'')X_0 + (ac'' - ca'')X_1 + (ab'' - ba'')X_2 \\ x_2 &= (bc' - cb')X_0 + (ac' - ca')X_1 + (ab' - ba')X_2 \end{aligned}$$

Esses coeficientes são, justamente, aqueles apresentados por Sylvester no início do artigo sobre as formas associadas (Sylvester, 1851b).

os polinômios ff e gg são ditos *covariantes* pois a transformação de ff, a partir de

$$T = \begin{cases} x = pX + qY \\ y = p'X + q'Y \end{cases}$$

só difere da transformação de g, gerada pela mesma substituição, pelo produto do quadrado do determinante da matriz associada a TT, ou seja,

$$g \circ T = (pq' - p'q) f \circ T$$

É importante destacar que, do ponto de vista geométrico, os *covariantes* geram curvas ou superfícies a partir de outras curvas dadas, independente da escolha dos eixos (Salmon, 1885, p. 114). Em outras palavras, os *covariantes* são movimentos rígidos no plano e no espaço. Por outro lado, os *contravariantes* são uma espécie de concomitante que representam transformações que assumem substituições inversas. Salmon (1885, p. 119), aponta que essas aplicações representam a constituição de um novo sistema de eixos. Ainda sobre os *concomitantes*, Sylvester apresenta duas comparações importantes para o desenvolvimento da teoria dos invariantes.

> *Covariantes* são *hyperdeterminantes* do Sr. Cayley; as *contravariantes* incluem, mas não coincidem com, as formas adjuntivas de M. Hermite, se entendermos pelo último termo as formas que podem ser derivadas pelo processo descrito por M. Hermite na terceira de suas cartas a M. Jacobi, "Sur différents objets de la Théorie des Nombres" (processo que é uma extensão daquele empregado para determinar o recíproco polar de um *locus* algébrico)[19] (Sylvester, 1851b, p. 291; destaques nossos).

Essa citação nos mostra um elo importante da teoria dos invariantes com outras áreas, uma vez que aponta uma conexão entre as investidas de Cayley e Hermite no tratamento das formas quadráticas e suas transformações. Por um lado, a comparação entre *hyperdeterminantes* e os *covariantes* traz uma descrição teórica para uma prática desenvolvida para gerar *invariantes*, por meio de transformações diretas das variáveis. Por outro lado, a citação das formas adjuntivas traz a ideia de transformações lineares inversas associadas à teoria dos números. Como já indicamos, as formas adjuntivas descritas por Hermite é interpretado como o operador aposicional em Sylvester (1851a) e caracterizado como um concomitante gerado por transformações que geram os *contravariantes* em Sylvester (1851b).

Esses artigos representam a conexão entre diferentes temáticas, como os problemas de contatos manifestados nos artigos do autor em 1850 e problemas relacionados à teoria dos números associada às propriedades das formas quadráticas como é descrito em Hermite (1850). Essas características fazem com que a teoria dos invariantes exerça um papel de atração para matemáticos interessados em assuntos que lidam com polinômios homogêneos. Este é o caso dos pesquisadores que se debruçaram sobre o problema da equação secular, o qual trata de determinar a natureza das raízes da equação que auxilia na determinação das desigualdades dos movimentos dos planetas (Brechenmacher, 2014).

19 No original: "Covariants are Mr. Cayley's hyperdeterminants; contravariants include, but are not coincident with, M. Hermite's formes-adjointes, if we understand by the last-named term such forms as may be derived by the process described by M. Hermite in the third of his letters to M. Jacobi, 'Sur différents objets de la Théorie des Nombres' (which process is an extension of that employed for determining the polar reciprocal of an algebraical locus)".

O próprio Sylvester lidou com a determinação das raízes da equação secular. De acordo com Sinaceur (1991, p. 131), a enunciação da lei de inércia para formas quadráticas em 1852 estabelece uma conexão entre o teorema de Sturm e o problema da natureza das raízes da equação que auxília na desigualdade secular do movimento dos planetas. Destacamos que essa lei revela um novo *invariante* conhecido como assinatura das formas quadráticas, a saber: a diferença entre os quadrados positivos e negativos do polinômio homogêneo reduzido à sua forma canônica (Sylvester, 1852a).

O estudo sobre os *concomitantes* tem prosseguimento com a publicação dos artigos Sylvester (1852b) e Sylvester (1852c), que estabelecem as bases da teoria dos invariantes, de maneira sistemática. Uma primeira característica, que reforça essa percepção, é o fato de Sylvester tomar o devido cuidado com as referências aos autores que compartilharam experiências nesse período. De fato, esse trabalho se mostra o resultado de uma construção coletiva, uma vez que as ideias apresentadas foram discutidas em correspondências com Cayley, Salmon, Hermite, Boole e Hesse. Esse trabalho foi distribuído no continente, por intermédio de matemáticos influentes como: Borchardt (matemático alemão com interesse nas transformações de formas canônicas, devido a resolução da equação que ajuda na interpretação dos movimentos seculares dos planetas) e Bienaymé (membro da Société Philomatique de Paris).

Os artigos tratam da teoria em duas partes, publicadas no mesmo volume do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (*CDMJ*) e foram divididos em sete seções, a saber: concomitância simples, concomitância complexa, *comutantes*, reciprocidade e propriedades de *invariantes*, generalizações, equações entre *concomitantes* e *combinantes*. ao longo delas, o autor se propõe a estabelecer as bases das pesquisas sobre os *invariantes*.

Na primeira seção, encontramos uma extensão da noção de concomitante, para o caso de várias classes de variáveis.[20] Sendo assim, o texto apresenta a possibilidade de compor as transformações com números distintos de variáveis, o que configura um caso de concomitância composta. Esse novo contexto permite enunciar uma das bases da teoria, a lei da sucessão.

> A lei mais alta e a mais poderosa em suas aplicações que já descobri na teoria dos concomitantes pode ser expressa pela afirmação de que quando várias classes relacionadas de variáveis estão presentes em qualquer concomitante, um novo concomitante, derivado do anterior, tratando um ou qualquer número dessas classes como independentes das classes restantes, ainda será concomitante da primitiva. Citarei isso a seguir como a Lei das Sucessões. Esta lei, à qual fui conduzido indutivamente, requer um exame extenso e uma prova rigorosa. É a pedra angular da matéria, e qualquer um que suponha que seja uma proposição autoevidente (pela simplicidade da enunciação que poderia ser) cometerá um pequeno erro[21] (Sylvester, 1852b, p. 55).

20 Aqui a ideia é lidar com substituições lineares sucessivas e as classes de variáveis se referem às transformações em si. Se as classes são independentes, chamadas de *cogredientes*, temos o caso da covariância; se as classes estão relacionadas, é o caso da contravariância.

21 No original: "The highest law and the most powerful in its applications which I have yet discovered in the theory of concomitants may be expressed by affirming that when several related classes of variables are present in any concomitant, a new concomitant, derived from the former by treating one or any number of these classes as independent of the remaining classes, will still be a concomitant of the primitive. I shall quote this hereafter as the Law of Succession. This law, to which I have been led up inductively, requires an extended examination and a rigorous proof". It is the keystone of the subject, and any one who should suppose that it is a self-evident proposition (as from the simplicity of the enunciation it might be supposed to be) will commit no slight error.

A ideia de investigar *concomitantes* de *concomitantes* atende a uma agenda, que foi iniciada por Cayley na década anterior, para buscar todas as *invariantes* da teoria das formas. É interessante observar que Sylvester cogita a combinação de transformações, sendo coincidentes ou inversas,[22] como modo de estudar as propriedades dos polinômios homogêneos. Como o próprio autor afirma, esse é o ponto central da teoria e permite uma nova abordagem sobre os problemas comuns nesse período, a saber: problemas de contato, movimentos de rotação e teoria de eliminação.

O *emanante* de polinômio homogêneo é um bom exemplo de concomitante. De acordo com o próprio criador do termo, é fácil mostrar que o *emanante* é um *covariante* de um polinômio homogêneo dado (Sylvester, 1852b, p. 56). Em Bruno (1876), encontramos um exemplo de uma forma quadrática e seu *emanante* que ilustra bem a relação enunciada pelo matemático inglês. Considera-se o polinômio $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ e seu *emanante* $\left(x'\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy}\right) = 2(ax+by)x' + 2(bx+cy)y'$. A partir daí, analisa-se os equivalentes lineares dessas formas, com relação ao sistema de substituições lineares *cogredientes*

$$\begin{matrix} x = pX + qY \\ y = p'X + q'Y \end{matrix} \; e \; \begin{matrix} x' = pX' + qY' \\ y' = p'X' + q'Y' \end{matrix}$$

construindo $F(X,Y) = AX^2 + BXY + CY^2$, onde

$A = ap^2 + 2bpp' + cp'^2, B = apq + b(pq' + p'q) + cp'q' e\ C = aq^2 + 2bqq' + cq'^2$ e seu emanante

$$\left(X'\frac{df}{dX} + Y'\frac{df}{dY}\right) = 2(AX + BY)X' + 2(BX + CY)Y'.$$

Com isso, é possível comparar o *emanante* da forma transformada com a transformada do *emanante* da forma original, o que demonstra que o *emanante* permanece igual apesar da transformação no polinômio original, ou seja, são *covariantes*. Outros *concomitantes* também são destacados em Sylvester (1852b), como é o caso do discriminante da forma $\square(\lambda U + \mu V)(\lambda U + \mu V)$ que é percebido como uma composição de *concomitantes*, em geral *invariantes*, que formam o concomitante geral da forma. Essa ideia abre espaço para discussão de *covariantes* já conhecidos, como o determinante de um sistema de transformações, o qual já fora evidenciado nos trabalhos de Boole e Cayley na década anterior, assim como o determinante jacobiano também se adéqua a teoria dos *concomitantes*, desenvolvida no princípio do cálculo das formas.

> Até agora nos ocupamos em considerar apenas um caso particular de concomitância, cuja ideia verdadeira não se refere a uma forma individual associada (como tal), mas a um complexo de formas capaz de degenerar em uma forma individual. Tal complexo pode ser chamado de Plexo. Um plexo de formas é concomitante a uma determinada forma ou combinação de formas nas seguintes circunstâncias[23] (Sylvester, 1852b, p. 59).

22 O autor se refere a essas transformações sucessivas como *cogredientes*, quando as matrizes associadas são idênticas, e *contragredientes*, quando as matrizes associadas são inversas. Por isso, optamos pelas palavras coincidentes e inversas.

23 No original: "We have hitherto been engaged in considering only a particular case of concomitance, the true idea of which relates not to an individual associated form (as such), but to a complex of forms capable of degenerating into an individual form. Such a complex may be called a Plexus. A plexus of forms is concomitant to a given form or combination of forms under the following circumstances".

Essa citação evidencia uma mudança de tratamento nos problemas de transformação que foram destacados pelo autor. Essa distinção é ponto de partida da segunda seção do cálculo das formas. O conceito de Plexus se refere a uma coleção de *concomitantes* combinados, ou seja, os *concomitantes* identificados até aquele momento podem, e precisam, ser analisados a partir das formas que os constituem.

Um exemplo que ilustra bem a ideia na relação de invariância entre um polinômio homogêneo e o hessiano correspondente. Em Sylvester (1852b, p. 71) encontramos a análise de um polinômio de 5º grau nas variáveis x e y e considera o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2F}{dx^2} & \frac{d^2F}{dxdy} \\ \frac{d^2F}{dydx} & \frac{d^2F}{dy^2} \end{vmatrix} = \frac{d^2F}{dx^2} \times \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dxdy} \times \frac{d^2F}{dydx}$$

que é compreendido como um *plexus*, ou concomitante complexo, composto pelos *concomitantes* básicos $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}; \frac{d^2F}{dx^2}, \frac{d^2F}{dxdy}, \frac{d^2F}{dy^2}$. Esses formam cinco novos polinômios que, por meio de um processo de eliminação das variáveis envolvidas, geram um resultante que é da forma $\square F - I_4^2$, respectivamente o determinante da matriz associada ao polinômio original e o *invariante* geral, como identifica por Cayley, de uma forma quíntica.

Esse ponto nos mostra a intersecção entre a teoria dos invariantes e a teoria de eliminação, ambas investigadas por Sylvester. Nesse trabalho de 1852, o autor identifica que as resultantes das equações de coexistência também geram *plexus* a partir das diferenciais parciais em relação as variáveis. Além disso, ele afirma que todo sistema completo deve constituir um plexo ou conjunto de *plexus invariantes*.

Dessa forma, podemos compreender que essas duas primeiras seções se preocuparam em estabelecer uma abordagem sistemática para a geração de *invariantes*, *covariantes* e *contravariantes*, por meio da busca por unidades básicas dessas formas algébricas. Outra contribuição importante foi a apresentação de técnicas para gerar esses objetos matemáticos, como é o caso dos *comutantes*. Apesar desse termo não figurar no vocabulário dos *invariantes*, que será elaborado em Sylvester (1853c), essa prática apresentaria papel importante no desenvolvimento da teoria.

Sylvester inicia a terceira seção do cálculo das formas apresentando uma distinção entre os *comutantes* simples e totais. O caso simples são os determinantes comuns, já tratados nas outras seções. O caso total se assemelha muito aos *hyperderterminantes* de Cayley, que podem ser visto vistos como uma situação particular dos *comutantes* totais, uma vez que lidam com uma coleção de determinantes comuns.

> Se supomos que ϕ é uma função de um grau par r de um único sistema de n variáveis x, y... t, de modo que os r sistemas x_1, y_1, &c, x_2, y_2, &c x_r, y_r, &c. tornam-se idênticos, podemos inferir imediatamente do esquema acima a existência e o modo de formar um *invariante* para ϕ da ordem n. Este último aparece para o caso n = 2, e deveria, para todos os outros valores de n, ter sido conhecido pelo autor da descoberta imortal dos *invariantes*, denominados por ele *Hyperdeterminantes*, no sentido que, segundo a

> nomenclatura aqui adotada, seria transmitida pelo termo *hyperdiscriminantes*[24] (Sylvester, 1852b, p. 72; destaques nossos).

Podemos notar o esforço de Sylvester para um tratamento sistemático das práticas comuns compartilhadas, como é o caso dos *hyperdeterminantes*, de modo que ele cria um núcleo comum para as investigações sobre os *invariantes*, conduzidas em solo britânico. É nesse sentido que os *comutantes* totais se encaixam na busca pelos *concomitantes* de polinômios homogêneos como é descrito nesse trabalho.

Como exemplo dessa sistematização, podemos destacar o tratamento dado a formas algébricas de ordens 4 e 6. Em Sylvester (1852b, p. 76), encontramos uma associação às formas algébricas *invariantes*, apresentadas em Aronhold (1850). No desenvolvimento da forma canônica do polinômio $F = x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz$, o autor inglês apresenta o hessiano dessa forma cúbica como uma combinação das formas que ficaram conhecidas como S e T no texto do matemático alemão.[25] O determinante funcional utilizado nesse processo é representado como um *comutante* total.

Os *comutantes* totais representam uma forma de combinar os coeficientes, que precisam ser *cogredientes*, ou seja, fazem parte de dois sistemas de transformações concorrentes (Sylvester, 1851b), de modo a gerar *invariantes* mais gerais que lidam com sistemas de variáveis distintos. Com essa técnica o autor apresenta o cálculo de *invariantes* de formas quadráticas, ternária e biquadráticas. Além disso, os *comutantes* se mostram úteis no desenvolvimento da lei de inércia para formas quadráticas, como poderemos ver na próxima seção.

A quarta seção dessa obra trata de analogias de *invariantes* com práticas de outros matemáticos que trabalharam com polinômios homogêneos em diferentes contextos. Inicialmente ele apresenta aplicações do que chamou de método de reciprocidade, o qual merece um destaque por conta das conexões que revela. A primeira conexão que encontramos é uma comparação natural com o trabalho de Boole. Em artigo sobre transformações lineares, o matemático irlandês apresenta fórmulas que são *concomitantes* com o polinômio original. Como exemplo, considera-se a forma binária $\phi(x,y)$ e demonstra-se que a forma associada

$$\phi\left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}\right)$$

permanecerá inalterada após a transformação das variáveis. Essa propriedade se encaixa na teoria dos *concomitantes*, uma vez que se trata de uma relação de contravariância. Sylvester percebe uma possibilidade generalização nessa ideia a partir da teoria dos *concomitantes* e acrescenta uma relação entre *covariantes* e *contravariantes*. Sendo assim, dado um polinômio $\phi(x, y, \ldots, z)$ e seu *contravariante* $\theta(x, y, \ldots, z)$, a expressão

24 No original: "If we suppose ϕ to be a function of an even degree r of a single system of n variables x, y... t, so that the r systems x_1, y_1, &c, x_2, y_2, &c x_r, y_r, &c. become identical, we can at once infer from the above scheme the existence and mode of forming an invariant to ϕ of the order n. This last appears for the case n= 2, and ought, for all other values of n, to have been known to the author of the immortal discovery of invariants, termed by him hyperdeterminants, in the sense which, according to the nomenclature here adopted, would be conveyed by the term hyperdiscriminants".

25 O artigo ao qual se refere aqui é "*Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln*", publicado no jornal do Crelle em 1850, portanto, um ano antes de Sylvester ter cunhado o termo.

$$\phi\left(\frac{d}{dx},\frac{d}{dy},\ldots,\frac{d}{dz}\right)\theta(x,y,\ldots,z)$$

é um *covariante* de ϕ. Essa generalização, chamada pelo autor de teorema de Eisenstein-Hermite, também permite uma nova interpretação aos *invariantes* descritos em Aronhold (1850), por meio do operador *emanante* e do hessiano. Nesse sentido, as combinações dos *invariantes* do matemático alemão são utilizadas para determinar o recíproco polar de formas algébricas.

Essa prática revela a natureza combinatória da teoria dos invariantes, além das conexões entre as temáticas que discutimos até aqui. A ideia de calcular o recíproco polar, ou simplesmente reciprocante como Sylvester o denomina, pode ser exemplificada da seguinte maneira: considerando uma quártica binária $(x, y)^4$, os *invariantes de Aronhold* podem ser associados a uma quártica equivalente linear da forma $(x, y, z).^4$

> Além disso, quem considerar atentamente as observações feitas na Seção II. do anterior em relação aos polares recíprocos, apreenderá sem qualquer dificuldade que a cada *invariante* de uma função de qualquer grau de qualquer número de variáveis corresponderá uma *contravariante* de uma função do mesmo grau de variáveis mais uma em número, e que entre tais *invariantes*, quaisquer que sejam as relações expressas independentemente de todas as outras quantidades, precisamente as mesmas relações devem existir entre as *contravariantes* correspondentes[26] (Sylvester, 1852c, p. 179; destaques nossos).

Aqui percebemos a utilidade dos *concomitantes totais* para relacionar formas com diferentes dimensões. Nesse contexto, é interessante notar que a concomitância em duas dimensões, como é caso do exemplo com o qual estamos lidando, se mostra associada a um processo de mudança de eixos quando adicionamos uma dimensão extra à forma investigada. A discussão sobre os recíprocos polares se adéqua aos estudos sobre projeções, o que conecta o trabalho com as transformações e os problemas de contato com o interesse revelado por Sylvester na correspondência com lord Brougham apresentada anteriormente, na qual afirma-se a importância de lidar com geometria mais geral que não pode ser atingida pelos sentidos.

Retornando ao exemplo, os *invariantes* s e t da quártica binária $(x,y)^4$ correspondem aos *contravariantes* σ e τ da quártica ternária $(x,y,z)^4$. Ao combinarmos esses *concomitantes* sob a forma $\rho = \sigma^3 + \tau^2$, faremos de ρ o recíproco polar de $(x,y,z)^4$. Destacamos a natureza geométrica desse resultado, o que pode ser visto por meio das analogias com o livro-texto de Salmon "*Higher plane curves*", publicado no mesmo ano de 1852. Em sua obra, o reverendo irlandês analisa o problema das tangentes por meio de operadores como o hessiano e os *invariantes de Aronhold*. Em suas analogias, Sylvester generaliza essa ideia para contatos entre linhas, curvas, superfícies e dimensões superiores.

Outra analogia com questões geométricas se apresenta por meio de pontos críticos de formas cúbicas. Caso o reciprocante seja nulo, teremos uma curva com ponto duplo, ou seja, se $\sigma^3 + \tau^2 = 0$; para dois pontos duplos ou a transformação de uma cônica em reta, temos os

26 O original: "Furthermore, whoever will consider attentively the remarks made in Section II. of the foregoing relative to reciprocal polars, will apprehend without any difficulty that to every invariant of a function of any degree of any number of variables will correspond a contravariant of a function of the same degree of variables one more in number, and that between such invariants, whatever relations exist expressed independently of all other quantities, precisely the same relations must exist between the corresponding contravariants".

hessianos dos *invariantes de Aronhold* nulo; se os *invariantes* S e T forem nulos, teremos uma cúspide e o caso do contato entre uma cônica e sua tangente é representado pelas expressões $\frac{dT}{da} = 0, \frac{dT}{db} = 0$ e $S = 0$ são exemplo dessa conexão com resultados geométricos.

Dessa forma, é possível afirmar que a Sylvester propõe essa abordagem sistemática da teoria dos invariantes e o estudo das formas associadas como uma nova abordagem para problemas de natureza geométrica, de modo que fosse possível tanto generalizar os mesmos para dimensões superiores, quanto lidar com objetos algébricos com uma perspectiva da geometria. Essas características se mostram mais claras na nota final do artigo, onde ele afirma o objetivo de investigar curvas de 6º grau ou superiores (Sylvester, 1852c).

A seção que trata das características dos *combinantes*, a última das sete que foram anunciadas, foi publicada no *CDMJ* em 1853. Entretanto, Sylvester publicou uma nota em um número anterior do periódico, na qual apresentou algumas reflexões sobre o desenvolvimento da pesquisa com os *invariantes*. Nesse pequeno texto, o autor destaca as conexões da teoria com trabalhos de matemáticos do continente.

> Essa *covariante* fornece, se nos agrada, funções simétricas em relação às duas extremidades de uma equação para determinar o número de suas raízes reais e imaginárias. As funções sturmianas ordinárias, é bem conhecido, não têm essa simetria. Como outro exemplo da aplicação bem-sucedida dos novos métodos a assuntos que há muito tempo se encontravam perante o mundo matemático e que se supunha estarem esgotados, posso notar que obtenho sem esforço, com a ajuda deles, um método muito mais simples, prático e completo da solução da questão da transformação simultânea de duas funções quadráticas, ou a transformação ortogonal de uma dessas funções, do que qualquer dada anteriormente, mesmo pelos grandes mestres Cauchy e Jacobi, que trataram desta questão[27] (Sylvester, 1853a, p. 62).

Aqui encontramos uma intersecção importante com as discussões sobre o teorema de Sturm, assunto que já despertara o interesse de Sylvester no final da década de 1830 e início da década de 1840, por meio de seus trabalhos com teoria de eliminação. Quando se refere a uma *covariante* específica, o autor trata das formas associadas a polinômios homogêneos binários de grau qualquer que, por meio da prática dos *combinantes*, se assemelham ao determinante hessiano.

A possibilidade de determinar o número de raízes reais e imaginárias apresenta relação com investigações sobre a equação que ajuda a determinar as desigualdades seculares dos movimentos dos planetas, que ficou conhecida como equação secular. Esse mesmo problema foi tratado pelos famosos matemáticos Cauchy e Jacobi, além de já fazer parte dos interesses de Sylvester nessa época, uma vez que o encontramos em publicações em 1852 e na década seguinte. Outra conexão apontada pelo autor é lei da reciprocidade demonstrada por Hermite, o qual representaria um papel importante no desenvolvimento das ideias do matemático inglês: “Esse teorema da reciprocidade numérica promete desempenhar um papel tão importante na

27 No original: “This covariant furnishes, if we please, functions symmetrical in respect to the two ends of an equation for determining the number of its real and imaginary roots. The ordinary Sturmian functions, it is well known, have not this symmetry. As another example of the successful application of the new methods to subjects which have been long before the mathematical world and supposed to be exhausted, I may notice that I obtain without an effort, by their aid, a much more simple, practical, and complete solution of the question of the simultaneous transformation of two quadratic functions, or the orthogonal transformation of one such function, than any previously given, even by the great masters Cauchy and Jacobi, who have treated this question”.

teoria das formas quanto o célebre teorema da reciprocidade de Legendre na dos números"[28] (Sylvester, 1853a, p. 64).

Retornando aos *combinantes*, o artigo "*On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants*" traz uma descrição do conceito, que trata da busca por *concomitantes* estendida para além das substituições lineares realizadas sobre as variáveis, mais especificamente, para combinações lineares das funções envolvidas nos sistemas. Essa ideia remete ao cálculo das resultantes como pode ser visto em nota do artigo.

> Um método semelhante será posteriormente aplicado à representação da resultante de duas equações cúbicas como uma função de *combinantes* tendo relações com as *invariantes* quadráticas e cúbicas de uma função quártica de x e y, precisamente análogas àquelas que as *Combinantes* que entram na solução acima mencionada têm para suportar os *invariantes aronholdianos* de uma função cúbica[29] (Sylvester, 1853b, p. 256; destaques nossos).

Mais uma vez, os *invariantes de Aronhold* formam a base dos métodos de Sylvester. É importante ressaltar que essas bases servem como ponto de partida para o trabalho de generalização, uma vez que a teoria dos *combinantes*, como o próprio autor a denomina, lida com um número genérico de polinômios e graus deles.

Os *combinantes* são divididos em simples, os quais são indecomponíveis em expressões *invariantes*, e complexos, que o autor considera como *invariantes de invariantes*. A partir daí, considera-se uma coleção de polinômios e as combinações lineares possíveis deles. Sendo assim, a resultante do sistema formado pelos *invariantes*, que se revelam nas combinações lineares citadas acima, será também um *invariante*.

Esse artigo também se destaca por ser o primeiro trabalho no qual encontramos a expressão teoria dos invariantes. Por fim, os artigos sobre o cálculo das formas cunham termos e apresentam as práticas que são a base da geração das formas associadas, agora sob novo nome. Além disso, esses trabalhos trazem uma nova abordagem para problemas de outros matemáticos britânicos e do continente.

Um aspecto importante da obra de Sylvester nesse período é a formação de um vocabulário. O artigo "*On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure*" publicado na *Transactions* da *Royal Society* em 1853, traz a lista de termos propostos pelo autor para serem utilizados na teoria dos invariantes (Sylvester, 1853c, p. 558).

Esse trabalho de 1853 trata diretamente do famoso teorema e destaca sua relação com a lei de inércia para formas quadráticas, enunciada pelo matemático inglês um ano antes. Sendo assim, a análise desse artigo se mostra importante, uma vez que ele traz uma abordagem algébrica do teorema sobre a natureza das raízes de polinômios. Essa abordagem se relaciona com as investidas a respeito do que ficou conhecido como problema da equação secular.

28 No original: "This theorem of numerical reciprocity promises to play as great a part in the Theory of Forms as Legendre's celebrated theorem of reciprocity in that of Numbers".

29 No original: "A similar method will subsequently be applied to the representation of the resultant of two cubic equations as a function of Combinants bearing relations to the quadratic and cubic invariants of a quartic function of x and y, precisely analogous to those which the Combinants that enter into the solution above alluded to bear to the Aronholdian invariants of a cubic function".

Esse problema surgiu pela primeira vez nos textos de Sylvester em 1852, por meio da enunciação da lei de inércia que, de acordo com Sinaceur (1991), resolve o problema da natureza das raízes do polinômio característico associado a uma forma quadrática. Essa resolução é diretamente ligada ao famoso teorema de Sturm, interesse do autor nas décadas de 1840 e 1850.

A divulgação de Sylvester no continente

A relevância desse trabalho de Sylvester se confirma por meio do modo como seus resultados foram apresentados na França e na Alemanha, dois centros importantes da produção de conhecimento matemático no século XIX. Essa repercussão tem início já em 1852 no jornal de Liouville, por intermédio de Faà di Bruno, que se dedica a demonstrar a possibilidade de reduzir polinômios homogêneos de grau ímpar em duas variáveis a sua forma canônica (Bruno, 1852). O autor ressalta que o matemático inglês já havia demonstrado o teorema, embora essa demonstração fosse inacessível para leitores que não conheciam as formas adjuntivas e os *hyperdeterminantes*.

Apesar de Faà di Bruno ter publicado um livro texto sobre os *invariantes* em 1876, as manifestações apresentadas no parágrafo anterior não destacavam Sylvester como um personagem central do desenvolvimento da teoria, mas como um matemático algebrista, em razão do resultado divulgado nos jornais franceses. A apresentação do inglês como o responsável pela delimitação dos conceitos dos *invariantes* ocorre em 1854 no jornal do Crelle (Hermite, 1854, p. 307). No ano seguinte e no mesmo jornal, Cayley faz referência aos menores determinantes apontados por Sylvester como forma de investigar os pontos de contatos de curvas e superfícies de segunda ordem (Cayley, 1855, p. 316). Esse texto faz parte de uma série de sete artigos publicados no periódico alemão que tinham como objetivo divulgar suas ideias sobre as propriedades das transformações lineares. Esse fator posiciona Sylvester como um autor que atribui ideias gerais a problemas de geometria e a teoria dos invariantes começa a ser apresentada como elo dessas investigações.

De volta ao jornal de Liouville, encontramos uma primeira menção à expressão "teoria dos invariantes" em texto do matemático Édouard Combescure (1824-1889). Nesse trabalho, o autor discute o modo como Sylvester se propõe a gerar *concomitantes* nos artigos sobre o cálculo das formas. Mais uma vez, é possível perceber que a teoria britânica é vista como uma abordagem importante para problemas de áreas diversas, como o estudo de movimentos de rotação (Combescure, 1855, p. 340).

Esse tipo de repercussão consolida o personagem central de nosso artigo como um dos pioneiros da teoria dos invariantes. Junto a essa perspectiva, a divulgação que apresentamos até aqui revela diferentes características do trabalho de Sylvester, como a abordagem algébrica e as aplicações das práticas na mecânica. É importe destacar trabalhos como Brioschi (1856) e Spottiswoode (1856), que se dedicam a relatar propriedades dos determinantes, uma vez que esses passam a ser objetos cada vez mais comuns das pesquisas em matemática (Spottiswoode, 1856, p. 209). Nesse contexto, as relações entre a teoria dos invariantes e geometria são ressaltadas nesses trabalhos, com destaque para a lei de inércia para formas quadráticas, cuja autoria é reconhecida em Brioschi (1856, p. 138).

Outro exemplo da divulgação das ideias de Sylvester no jornal do Crelle são as publicações de Cayley em 1857. No texto "*Mémoire sur la forme canonique des functions binaires*", publicado no volume 53 do jornal, o autor destaca o protagonismo do amigo nas investigações sobre as formas canônicas de polinômios homogêneos (Cayley, 1857a, p. 48).

> Na memória sobre a forma canônica de funções binárias (página 48 deste volume), eu disse que o Sr. Sylvester também estendeu sua teoria para funções binárias de graus pares 4 e 6; eu deveria ter dito, mesmo graus 4, 6 e 8. Também deixei de apontar que os termos canonizante e lambdaico pertenciam ao Sr. Sylvester. Finalmente, ao citar na nota as memórias do Sr. Sylvester que se relacionam com essa teoria, omiti a citação da memória 'Sobre o cálculo das formas, em outras palavras, a Teoria dos Invariantes', §. VIII (*Camb. and Dublin Math. Journal*, t. IX, p. 93) seção que leva o título 'Sobre a redução de uma função sêxtica de duas variáveis para a forma canônica'[30] (Cayley, 1857b, p. 292).

Nessa citação vemos uma breve nota sobre a forma canônica de polinômios homogêneos em duas variáveis. O autor apresenta os textos sobre os cálculos das formas, nos quais ele concentra suas reflexões sobre os *concomitantes*. Destacamos que esses artigos de 1857 apresentam o caráter generalizador da obra de Sylvester. O mesmo ocorre em 1860, quando Cayley apresenta os *combinantes* que ele desenvolveu com o amigo com os nomes de intermutantes e permutantes. Esses artigos, juntamente com a correspondência trocada pelos matemáticos no período de 1851 a 1853, identificam as características britânicas da teoria dos invariantes.

Considerações finais

Os artigos que tratamos aqui revelam o caráter unificador da teoria dos invariantes, uma vez que temáticas como teoria de eliminação, propriedades geométricas e transformações lineares ganham novo significado a partir do momento que passaram a ser investigadas pela perspectiva da nova teoria britânica. Esse fator se torna explícito quando analisamos a obra de Sylvester considerando a periodização proposta na introdução deste trabalho.

O período de 1840 a 1847 é caracterizado pelas iniciativas de Cayley e Boole, com aplicações do que viria a se tornar uma teoria que identifica a produção matemática em meados do século XIX. Nesse intervalo, o trabalho de Sylvester foi marcado por sua natureza algébrica e se modifica a partir do advento das coordenadas homogêneas, o que culmina na publicação dos artigos sobre contatos das cônicas. Seguindo a cronologia, entre 1850 e 1851, percebemos como as práticas geométricas delimitam a sistematização da busca pelos *invariantes*. Os textos sobre problemas de contato, com base nas coordenadas homogêneas de Plücker, evoluíram para investigações sobre a relação entre os polinômios homogêneos e formas associadas, de modo que as publicações entre 1851 e 1853 se modificam mais uma vez e produzem as ideias que se tornariam as bases da teoria dos invariantes, como é o caso das propriedades dos

30 No original: "Dans le mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires (pag. 48 de ce volume) j'ai dit que M. Sylvester avait en outre etendu sa theorie aux fonctions binaires des degres pairs 4 et 6; j'aurais dû dire, des degrés pairs 4, 6 et 8. J'ai aussi omis de faire observer que les termes canonisant et lambdaique appartenaient a M. Sylvester. Enfin en citant dans la note les memoires de M. Sylvester qui ont rapport a cette theorie j'ai omis de citer le memoire 'On the calculus of forms otherwise the Theory of Invariants', §. VIII (*Camb. and Dublin Math. Journal*, t. IX, p. 93) section qui porte le titre 'On the reduction of a sextic function of two variables to the canonical form'".

concomitantes (*covariantes* e *contravariantes*), a lei de inércia, a invariância das resultantes e os operadores que se tornaram comuns no cenário britânico.

Ressaltamos algumas conexões importantes com outros autores. Algumas inspirações são naturais, como são os casos dos trabalhos de Jacobi e Boole, os quais lidam diretamente com as substituições lineares. Uma diferença fundamental desses trabalhos para o de Sylvester reside no fato de ele ter se concentrado nas propriedades das técnicas que desenvolvem as *formas invariantes*, fator que fica na comparação com as iniciativas de Cayley. A adequação das ideias de Plücker, a relação com os determinantes de Hesse e o interesse por problemas associados a questões da mecânica, como o caso da equação secular, também são características que demonstram a especificidade do trabalho do personagem central deste artigo.

A correspondência com Cayley, aliada às publicações de anos posteriores, nos mostra um Sylvester retratado como um produtor de ideias básicas da teoria dos invariantes. É importante destacar que os textos "*On linear transformations*" e "*On the principles of calculus of forms*", se diferenciam em um aspecto crucial. O primeiro se propõe a buscar *invariantes*, enquanto o segundo se propõe a estruturar as técnicas utilizadas nessa busca. Essa diferença faz com que os artigos vistos em nossas análises ganhem o *status* de base organizadora.

Entendemos que os textos analisados neste artigo revelam características da centralidade de Sylvester no desenvolvimento da teoria dos invariantes, que se mostra em sua elaboração dos conceitos-chave e na delimitação de uma nova área de pesquisa em meados do século XIX. Desde a preocupação com os termos utilizados nas investigações, passando por técnicas próprias e chegando às ligações com temas de interesse de outros matemáticos do continente, as leituras nos mostram a identidade algébrica que permeou as discussões sobre a nova teoria britânica.

Quando olhamos para as produções de matemáticos não britânicos, percebemos que o trabalho de Sylvester, entre 1851 e 1853, se mostra capaz de colocar as iniciativas que surgem, tanto na ilha quanto no continente, sob a mesma perspectiva. Esse aspecto se reflete na tentativa de estabelecimento de um vocabulário para a teoria. Além disso, as práticas mobilizadas nesses artigos ressignificaram ideias que, nos jornais franceses e alemães, tratavam de temáticas geométricas, aritméticas e/ou mecânicas. Esse processo de reconstrução de significados revela a importância que foi atribuída à própria teoria dos invariantes e a Sylvester.

Referências bibliográficas

Fontes primárias

ARONHOLD, S. Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1850, n. 40, p. 140-159, 1850.

BOOLE, G. Exposition of a general theory of linear transformations. *Cambridge Mathematical Journal*, v. 3, p. 106-119, 1841.

BRIOSCHI, F. Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair ; et sur les déterminants binaires. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 52, p. 133-141, 1856.

BRUNO, F.F. Démonstration d'un théorème relatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 17, p. 193-201, 1852.

BRUNO, F.F. *Théorie des formes binaires*, par le chev. F. Faà de Bruno. [S.l.]: Brero, 1876.

CAYLEY, A. Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions. *Cambridge Mathematical Journal.* v. 4, p. 119-127, 1844.

CAYLEY, A. On linear transformations. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 1, p. 104-122, 1845.

CAYLEY, A. Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 50, p. 313-317, 1855.

CAYLEY, A. Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 54, p. 48-58, 1857a.

CAYLEY, A. Addition au mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 54, p. 292-292, 1857b.

COMBESCURE, É. Sur divers points de la théorie des invariants. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 20, p. 337-358, 1855.

HALSTED, G.B. Biography: James Joseph Sylvester. *The American Mathematical Monthly*, v. 4, n. 6/7, p. 159-168, 1897.

HERMITE, C. Extraits de lettres de m. ch. hermite à m. Jacobi sur différents objects de la théorie des nombres. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1850, n. 40, p. 261-278, 1850.

HERMITE, C. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1854, n. 47, p. 307-312, 1854.

HESSE, O. Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1844, n. 28, p. 68-96, 1844.

MANSION, P. Notice sur les travaux de Jules Plücker. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, v. 5, p. 313-319, 1873.

PLÜCKER, M. Sur les points singuliers des courbes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 2, p. 11-15, 1837.

SALMON, G. *Lessons introductory to the modern higher algebra*. [S.l.]: Hodges, Figgis, 1885.

SPOTTISWOODE, W. Elementary theorems relating to determinants. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 51, p. 209-271, 1856.

SYLVESTER, J.J. On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination, 1839-40. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 15, p. 428-435, 1839.

SYLVESTER, J.J. On a linear method of eliminating between double, treble, and other systems of algebraic equations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 31, p. 425-435, 1841.

SYLVESTER, J.J. An account of a discovery in the theory of numbers relative to the equation $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 31, n. 207, p. 189-191, 1847a.

SYLVESTER, J.J. On the equation in numbers $Ax^3 + By^3 + cz^3 = dxyz$, and its associate system of equations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 31, p. 293-296, 1847b.

SYLVESTER, J.J. On the general solution, in certain cases, of the equation $x^3 + y^3 + z^3 = Mxyz$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 31, p. 467-471, 1847c.

SYLVESTER, J.J. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 5, n. 262-282, p. 162, 1850a.

SYLVESTER, J.J. On a new class of theorems in elimination between quadratic functions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 37, n. 249, p. 213-218, 1850b.

SYLVESTER, J.J. Sketch of a memoir on elimination, transformation, and canonical forms. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 6, p. 186-200, 1851a.

SYLVESTER, J.J. On the general theory of associated algebraical forms. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 6, p. 289-293, 1851b.

SYLVESTER, J.J. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 4, n. 23, p. 138-142, 1852a.

SYLVESTER, J.J. On the principles of the calculus of forms (part 1). *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 7, p. 52-97, 1852b.

SYLVESTER, J.J. On the principles of the calculus of forms (part 2). *Cambridge and Dublin* Mathematical Journal, v. 7, p. 179-217, 1852c.

SYLVESTER, J.J. Note on the calculus of forms. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 8, p. 62-64, 1853a.

SYLVESTER, J.J. On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, v. 8, p. 256-269, 1853b.

SYLVESTER, J.J. On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, n. 143, p. 407-548, 1853c.

Fontes secundárias

BRECHENMACHER, F. *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930): formes de représentation et méthodes de décomposition*. PhD thesis (Doctorat d'Histoire des Sciences) – École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 2006.

BRECHENMACHER, F. Lagrange and the secular equation. *Lettera Matematica*, v. 2, n. 1, p. 79-91, 2014.

CRILLY, T. The rise of Cayley's invariant theory (1841-1862). *Historia Mathematica*, v. 13, n. 3, p. 241-254, 1986.

CRILLY, T. *Arthur Cayley*: Mathematician laureate of the Victorian Age. [S.l.]: Johns Hopkins University Press, 2006.

DIAS, L.; GRIMBERG, G. Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Felix Klein. *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 12, n. 2, p. 207-224, 2019.

PARSHALL, K.H. *Toward a history of nineteenth-century invariant theory*. In: Ideas and their reception. [S.l.]: Elsevier, 1989. p. 155-206.

PARSHALL, K.H. *James Joseph Sylvester:* Life and work in letters. [S.l.]: Oxford University Press, 1998.

PARSHALL, K.H. *James Joseph Sylvester*: Jewish mathematician in a Victorian World. [S.l.]: JHU Press, 2006a.

PARSHALL, K.H. The British development of the theory of invariants (1841-1895). *BSHM Bulletin*, v. 21, n. 3, p. 186-199, 2006b.

SINACEUR, H. *Corps et modèles*: essai sur l'histoire de l'algèbre réelle. [S.l.]: Vrin, 1991.

Recebido em 21/06/2023

Aceito em 02/09/2024