SOBRE O MÓDULO DE YOUNG

Ernesto Guilherme Walter*

RESUMO – O artigo comenta, inicialmente, a observação de Galileu sobre as vantagens da língua matemática no trato das coisas da Natureza, única língua na qual podem ser revelados seus segredos mais bem guardados. Exemplifica comparando a expressão da chamada lei de Hooke traduzida na língua cotidiana e na língua matemática, evidenciando a formidável capacidade de síntese desta última. Mostra, em seguida, a evolução de certos conceitos atualmente corriqueiros e como foi difícil e demorado que se tornassem exatamente corriqueiros. Como, freqüentemente, sábios eminentes sentiram a necessidade desses conceitos para resolver e desenvolver seus raciocínios sobre um determinado assunto, passavam perto deles e não os vislumbravam Os conceitos de momento de inércia e de módulo de elasticidade foram dois desses tropeções. Finalmente, mostra como Young definiu o módulo de elasticidade de modo extremamente confuso e como várias interpretações do módulo podem ser elaboradas, com suas respectivas "dimensões".

As observações de ordem didático/históricas que a seguir faremos são daquelas que, eventualmente, podem ser consideradas como dispensáveis, em especial àquelas mentes objetivas e práticas. A estas pevenimos logo que, de fato, pouco proveito guardarão do artigo. Àquelas mentes mais à-toa, porém, pelas primeiras ditas avoadas, é possível que essas observações ocupem-lhes o tempo como um desenfado interessante[1]. Assim estimulados os sutis e corretamente alertados os geométricos, eis do que se trata.

Num famoso ensaio, publicado em 1901 na revista *The International Monthly*, intitulado "A Matemática e os Metafísicos", Bertrand Russell (1872-1970) saiu-se com a seguinte proposição: "A matemática pode ser definida como a matéria na qual jamais sabemos do que estamos falando, nem se o que dizemos é verdade". Não satisfeito com o espanto causado, arrematou: "Espero que aqueles que se assombraram com os começos da matemática encontrem consolo nesta definição e que concordem com sua precisão". Como Bertrand foi um notório irreverente, muita gente apressada tomou a definição como mais uma de suas invectivas espirituosas. Espirituosa ela realmente é, mas é também lapidar e concisa.

Acertando a diferença entre a matemática pura e a matemática aplicada, disse ainda Russell, no mesmo artigo:

> A matemática pura consiste inteiramente de uma série de asserções de que, se tal ou qual proposição é verdadeira em relação a qualquer coisa, então tal ou qual proposição é verdadeira em relação a uma coisa dada. É essencial não discutir se a primeira proposição é realmente verdadeira, e não mencionar o que é *qualquer coisa*, que se supõe ser verdade. Ambos esses detalhes pertenceriam à matemática aplicada. (RUSSELL, 1957, p. 88).

Neste trecho do ensaio, convenhamos, Russell é ainda conciso, todavia menos concessivo.

Galileu Galilei (1564-1642), na sua obra *Il Saggiatori* (O Ensaiador), dada a conhecer em 1623, adverte que o grande livro da natureza está sempre aberto diante de nossos olhos e a verdadeira filosofia está escrita nele. Em suas próprias palavras:

> A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto. (GALILEU, 1973, p. 119).

* Professor do Instituto de Arquitetura da Universidade de Brasília.

1. "Those who dream by day are cognizant of many things which escape those who dream only by night." Edgar Allen Poe. – "Escrevo somente para vós, homens sem idéias preconcebidas, que sabeis verdadeiramente filosofar, que procurais a ciência não apenas nos livros, mas nas próprias coisas." William Gilbert.

Revista da SBHC, n. 6, p. 45-58, 1991

Somando as observações de Russell e de Galileu, cabe explicitar os significados profundos de ambas assertivas, e o que delas se pode colher. Preleções sobre a filosofia da matemática têm, de imediato, a vantagem de descerrar os horizontes do pensamento abstrato, entendido aqui como **exercícios de criatividade.**

Imaginamos como amostra das características da língua matemática, uma dissertação sobre sua extraordinária capacidade de expressar de forma sintética as mais complexas informações, quando comparada com outros modos de comunicação. E o corolário maior dessa vocação de síntese, que é a **decodificação** de mensagens não explícitas, pelo re-arranjo dos termos da mensagem original.

Para ilustrar, podemos fazer uma análise da chamada **Lei de Hooke,** que relaciona deformações e tensões em peças submetidas a esforços. Na sua versão original, em latim – **ut tensio sic vis** – são "gastos" 14 símbolos gráficos (letras) para expressar a lei. Em português, já se fazem necessários 30 desses símbolos: **a deformação é proporcional à força.** Expressando a lei na língua matemática, evidencia-se de pronto o menor consumo de símbolos:

d = k.P (1), apenas 5 deles !

Considerando o princípio desejável de que quanto mais complexa a informação a transmitir, mais simples deve ser a linguagem usada na sua transmissão, é fácil entender porque Galileu preveniu ser indispensável o conhecimento da língua matemática, para bem acompanhar a leitura do livro da natureza.

Essa extraordinária capacidade de síntese não é, como já frisamos, a maior das virtudes da matemática. Mais importante ainda é o corolário a que também já nos referimos atrás, isto é, permitir a **decodificação** de mensagens embutidas mas não aparentes na mensagem primeira. Re-ordenando os termos de uma oração matemática, seja invertendo-a de oração direta em oração indireta, seja passando-a de principal a subordinada; manipulando com os predicados da frase, seja tornando-os de referentes ao sujeito a relacionados ao objeto, seja ainda passando-os de verbais a nominais; enfim, jogando inteligentemente com as regras da sintaxe matemática, chega-se não só a um sujeito diferente de dizer a mesma coisa, o que seria uma simples questão de estilo, mas chega-se contingentemente a **descobrir** facetas da realidade do mundo físico, **não vislumbrados pela observação direta que gerou a locução original.**

O que estamos querendo dizer com essas demazias verbais, fica mais doméstico se apelarmos mais uma vez para a lei de Hooke. A locução original completa, resultado de experimentações sobre hastes, é expressa em língua matemática assim:

d = K.P.L/A (2); 9 símbolos representando:

"d" = deformação total da haste
"L" = comprimento original da haste
"A" = seção original da haste
"P" = carga causadora da deformação
"K" = uma constante, relacionada com a substância de que é feita a haste (Fig. 1).

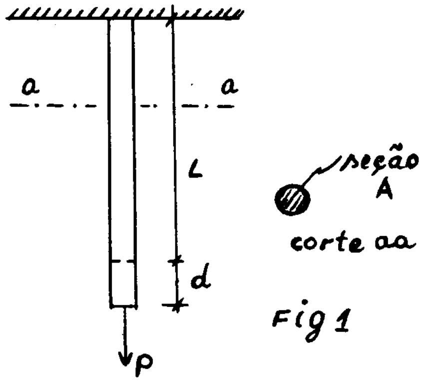


Fig 1

A leitura da mensagem matemática de Hooke nos informa que: alterando **P** ou **L**, em uma certa proporção, mantendo fixo o valor de **A**, a deformação **d** altera na mesma proporção; alterando **A**, permanecendo fixos **P** e **L**, o valor de **d** se altera de um modo inversamente proporcional. Vale dizer: se dobrarmos a carga, mantendo fixas as dimensões (**L** e **A**), dobra-se a deformação; se reduzirmos à metade o comprimento **L**, conservando inalterados os valores de **P** e **A**, a deformação **d** reduz-se à metade; se alterarmos a seção **A**, aumentando ou diminuindo de 1/3 por exemplo, permanecendo fixos **P** e **L**, a deformação **d** diminuirá ou aumentará de 1/3: finalmente, se repetirmos esses testes com outro material os resultados serão outros.

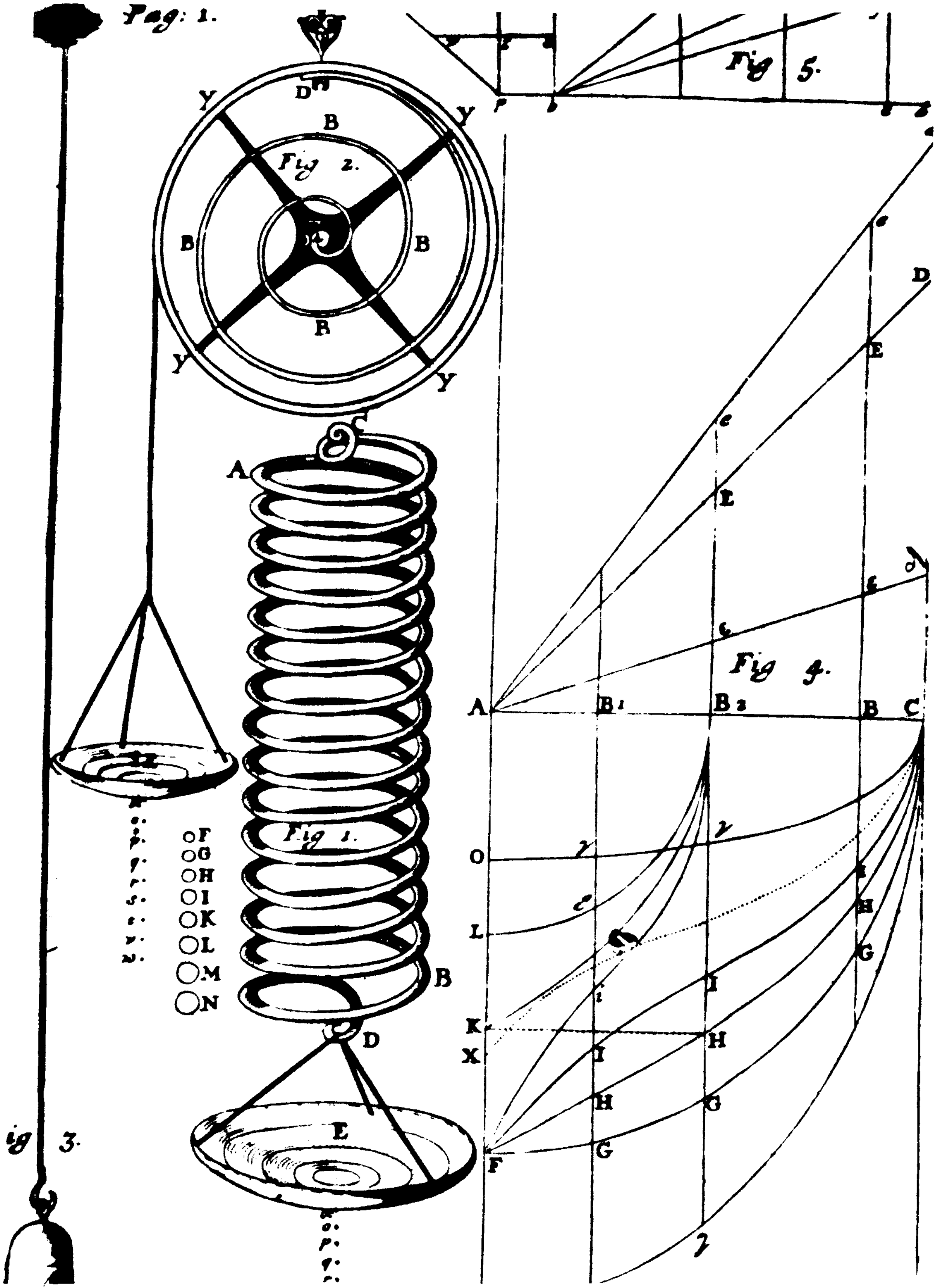


Gráfico da deformação da mola, apêndice à Micrografia de Hoot.

Obs.: se traduzirmos a frase (2) em língua portuguesa, para dizer a mesma coisa "gastaríamos" mais ou menos 190 símbolos ! ao invés dos 9 conseguidos para exprimi-la em língua matemática: "tracionando uma haste, a deformação sofrida por ela é diretamente proporcional ao seu comprimento original e à força causadora de deformação; é inversamente proporcional à seção original e depende do material de que é feita". (Um bom exercício de concisão é tentar exprimir a lei de Hooke num número de símbolos gráficos menor do que os 187 da nossa frase...).

Fazendo uma pequena modificação de estilo na frase de Hooke, acertamos em um resultado curioso: trocando o sujeito da oração primitiva – **deformação total** – para **deformação unitária** = **d/L**; e em seguida manipulando os predicativos – dividindo o produto **P** pela deformação unitária (d/L), constata-se que este quociente dá sempre o mesmo resultado, em cada espécime que se prova. Ou seja, este quociente é uma **constante**:

$$P/(d/L) = K_B \quad (3)$$

Em outras palavras, o valor de K_B não depende mais dos valores nem de **P** nem de **L**; depende apenas da seção **A** da haste e da substância de que é feita.

Cerca de 150 anos após essas elocubrações estilísticas, que Robert Hooke (1635-1703) poderia ter feito mas não fez, o cientista francês Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) dispôs-se a dedicar à locução matemática original de Robert, mais vigílias elocubratórias. Destas resultou uma descoberta muito importante sobre a realidade física das substâncias, relacionada ao comportamento delas quando sujeitas à ação de forças. Claude Louis descobriu uma **constante física** dos materiais, **à qual não se tem acesso direto por meio de experimentações** (TIMOSHENKO, 1953, p. 74)[2].

De se notar é que, apesar de serem operações algébricas elementares, século e meio se passaram antes que alguém tenha tido a iniciativa de fazê-las. Mais notável ainda quando nos lembramos que **sábios** da estatura de um Jacob Bernoulli (1654-1705), de um Leonhard Euler (1707-1783), de um Louis Lagrange (1736-1813) e de um Charles de Coulomb (1736-1806), neste ínterim, estudaram e preocuparam-se muito com esses assuntos. Este intervalo histórico é um apoio ao postulado antropológico-cultural sugerindo que verdades hoje comuns a uma coletividade, ou a um subgrupo desta coletividade, não aparecem logo e espontaneamente como óbvias. Carecem de um certo tempo de amadurecimento no seio do coletivo no qual virão a se inserir como verdades, antes de serem reconhecidas como tais; é o tempo durante o qual passam do estágio de indícios subjetivos, alertados somente por alguns indivíduos, à condição de necessidades objetivas de toda a coletividade. Por isto ou por aquilo, diga-se de passagem, tão logo essas verdades novas incorporam-se ao patrimônio comum de toda a coletividade, ou mesmo a subgrupos dessa coletividade, aqueles indivíduos raros que as alertaram passam a ser mui festejados. Por isso ou por aquilo, aquilo podendo ser a ânsia de heróis das coletividades, dos quais sentem falta.

As alterações de estilo promovidas por Navier foram as seguintes:

– frase original de Hooke: $d = K.P.L/A$
– 1ª alteração: $\varepsilon = d/L$ = deformação unitária
– 2ª alteração: $\sigma = P/A$ = tensão
– 3ª alteração: $E = 1/K$
– frase de Navier: $\varepsilon = \sigma/E$ ou $E = \sigma/\varepsilon$ (4)

Pois bem, o que se revela da natureza dos materiais, como uma especificidade própria de cada um deles, assim como a densidade, por exemplo, é também uma especificidade, é que o valor de **E** é uma constante, não depende nem das dimensões (**L** e **A**), nem da força **P** que provoca a deformação.

"E" é função só somente, como diria o Padre Oskar von Bittner, **da substância de que é feita**. Como está relacionada com deformações provocadas nos corpos e de modo especial à capacidade destes corpos de se refazerem dessas deformações, a essa constante foi dado o nome muito apropriado de **constante**

2. Comentando a participação de Navier no que diz respeito ao módulo de elasticidade, Timoshenko informa: "Nos dois primeiros artigos do livro o autor discute compreensão simples e tração simples de barras prismáticas e indica que, para especificar as características do material, não é suficiente dar sua resistência última, mas é necessário também estabelecer seu módulo de elasticidade E, o qual ele define como a relação da carga da unidade de área seção pela deformação unitária produzida." E acrescenta, em nota de rodapé: "O módulo de elasticidade foi primeiramente introduzido na mecânica dos corpos elásticos por Thomas Young. Mas ele o definiu de modo diferente. A definição de Navier é agora geralmente ceita."

ou módulo de elasticidade, pois, como muito bem define o professor Francisco da Silveira Bueno – **Elasticidade**, s.f.: propriedade dos corpos que lhes permite recuperar a sua forma quando cessa a causa que dela os desviou (BUENO, 1957, p. 378).

Na frase (4) acima, ou fórmula (4) se soar-lhes melhor,

$E = \sigma/\varepsilon$

σ é uma tensão, medida por exemplo em **Kgf/cm²**. Sendo ε adimensional conclui-se que E tem também a dimensão de uma **tensão**. Guardem este detalhe, os que chegaram firmes até aqui e estão animados a seguir. Voltaremos oportunamente a comentar sobre ele.

O importante a ressaltar nisso tudo, agora, é que foi burilando a oração matemática, escrita a partir de resultados aos quais se chegou experimentalmente, que trouxemos ao nosso conhecimento certos **"modos de ser"** das substâncias, que as experiências não haviam revelado como resultado direto delas. Esses "modos de ser" das substâncias, que integram suas realidades, sem excitar receptores sensoriais nossos – visão, tato, ouvido, etc. – são as **realidades conceituais**, nem por serem conceituais menos realidades pois, como já disse alguém, "nada mais real do que uma alucinação". É mais freqüente do que se imagina a disposição da natureza em revelar-se dessa **forma indireta**, dissimulando-se ardilosa e provocante, fazendo-se acessível só depois que lhe cantamos versos, rimados na língua matemática.

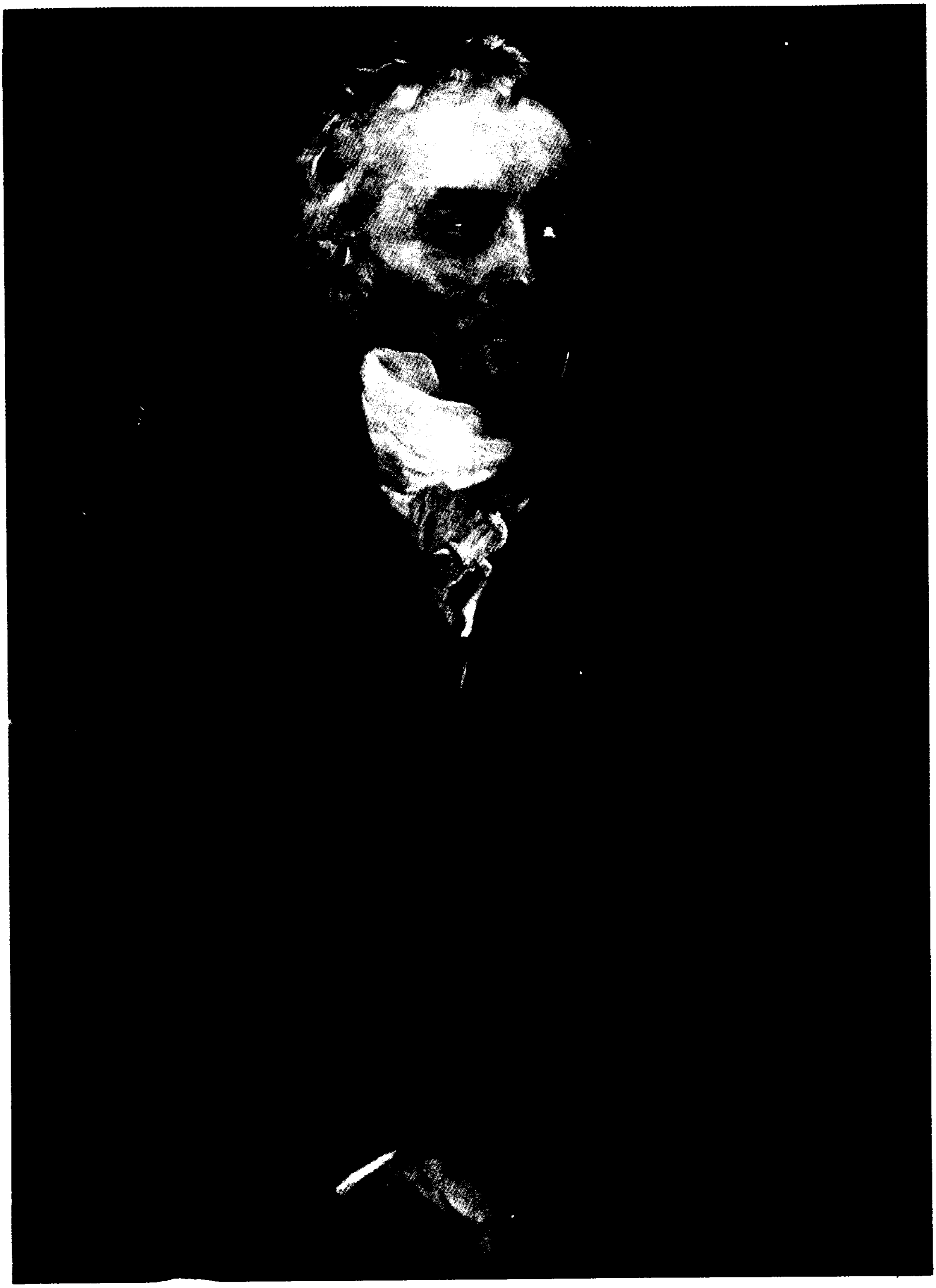
A recíproca é verdadeira. No universo do microcosmos, por exemplo, tentando conciliar os princípios e respectivas equações da mecânica quântica com a teoria especial da relatividade, Paul Dirac (1902-1984) concluiu pela necessidade matemática da existência de uma partícula com massa igual àquela de um eléctron, **mas com carga positiva** ! Isso em 1928. Como conta o professor George Gamow (1976, p. 537): "O artigo de Dirac não foi tomado muito a sério até três anos mais tarde." Isto porque, como diz outro professor, George W. Gray (1943, p. 371): "Dirac desenvolveu uma análise em que todas as entidades físicas de nosso mundo material converteram-se em símbolos matemáticos, e, há que dizê-lo, **nada mais que isso**." "Então, em 1932", continua o professor Gamow, "um físico americano, Carl Anderson, confirmou por **observação direta** a existência de eléctrons carregados positivamente, correspondentes aos "buracos" preditos pela teoria de Dirac. Essas partículas, transportando uma carga positiva e uma massa positiva igual àquela do eléctron, estão atualmente bem estabelecidas, e são **chamadas anti-eléctrons ou pósitrons**."

Observe-se, pois, a maneira caprichosa com que a Natureza **"despe-se"** para mostrar suas realidades, ora exibindo-as concretamente aos nossos órgãos sensoriais, ora revelando-as apenas conceitualmente à nossa curiosidade. O gesto final e eloqüente, comum aos dois momentos, é proporcionado **pela matemática** !

E daí?! Poderia alguém, de muita convicção, Arquiteto, "interjectivar". Que tenho Eu a usufruir dessas eloqüências retóricas de matemática?!

Muito! diríamos nós, tão convictos quanto. Da mesma forma como tem muito a usufruir, quem sabe? com as **torciduras** topológicas ou com as geometrias **não-euclidianas**. "Não há ramo da matemática", diz Nicolai Lobatchevski (1792-1856), "por mais abstrato que seja, que algum dia não terá aplicação a fenômenos do mundo real" (COXETER, 1973, p. vi/vii). Essas geometrias ou aquelas torciduras, são estudadas pelos matemáticos como abstrações puras, despidas de quaisquer ornatos materiais. Como especialistas, os matemáticos não assumem compromisso de que suas abstrações se façam presentes excitando receptores sensoriais. Se isto pode ser promovido, não é obrigação deles descobrir, como é aliás da natureza da matemática, disse-o lapidarmente Russell. Se alguém está capacitado a transformar essas abstrações em realidades concretas, esse alguém é o **Arquiteto**. Se não por outras razões, pelo seu condicionamento psico-profissional, isto é, alguém que, como militante, precisa concretizar suas criações espaciais. Nessa postura, abstração espacial não realizada é sorte branca.

Mas... é possível imaginar abstrações, impossíveis de representatividade, senão concretas pelo menos por imagens? Claro que não deixaremos, neste artigo, que nosso barco enverede ao léu pelo mar tempestuoso dessa dúvida. Não por uma questão de recuo intelectual. Antes porque: (a) respeitamos a paciência do leitor, que nos distingue com sua companhia e (b) porque nos desviaríamos demais do assunto ao qual nos propusemos, que deu inclusive o título a esses escritos. **Mas que a dúvida existe, existe!**



Retrato de Young, por M. Biggs, acervo do British Museum, Londres.

Abel Rey (1873-1940), por exemplo, acha que:

> Não pode haver pensamento sem imagens, e a mecânica é melhor adaptada a prover imagens ou modelos de fenômenos físicos (COHEN, 1978, p. 215).

David Hilbert (1862-1943), no entanto, radicaliza ao contrário, mais ou menos na linha de Lobatchevski, admitindo que se um conjunto de axiomas não leva a contradições, deve existir algum conjunto de objetos que o satisfaça. Registre-se desde logo que Hilbert é tido entre seus pares como um matemático formalista. Para ele a "**existência**" é um conceito metafísico superado, que de há muito já deveria ter sido substituído pelo conceito mais preciso de "**não-contradição.**"[3] Cabe lembrar, a esse propósito e à guisa de brio, o que adverte Russell:

> Não existe limite para a quantidade de sistemas de axiomas não contraditórios que se pode inventar... (RUSSELL, 1948, p. 8).

Supondo, só para fabular, que essas hipóteses todas são pistas certas, **EIA**!

Que de mundos não seriam a nós
Revelados,
Pelos modos de os olhos verem
Espaços,
Ascendidos em tempos de abstrações
Evanescentes.

Seria dado, então, atentar ao Poeta:

"Os espaços, um a um deveríamos
Com jovialidade percorrer,
Sem nos deixar prender a nenhum deles..."

* * *

No caso de **E** preparamos um **Quadro**, pelo qual pode notar-se que, ao submetermos materiais a esforços, as diversas variáveis envolvidas na experiência guardam entre si relações, das quais duas no Quadro são constantes, não dependendo nem das dimensões da peça testada, nem das forças atuantes. **Dependem exclusivamente da substância em análise.** São por isso constantes físicas dessa substância, no sentido atrás definido pelo professor Francisco da Silveira Bueno, isto é, são constantes ou módulos de elasticidade, porque estão relacionados com o comportamento elástico das substâncias. Assim como pela densidade se pode determinar o peso de um certo volume de um certo material, assim mesmo, *mutatis mutandis*, pelo módulo de elasticidade desse material podemos saber dentro de certos limites, como se comportará quando submetido a esforços.

Como dissemos aos firmes, linhas atrás, a dimensão do módulo **E** é aquela de uma **tensão**, historicamente, no entanto, o valor desse módulo nem sempre teve esta dimensão. Do jeito como Hooke espôs suas conclusões sobre a reação de molas à ação de forças – que ele generalizou mais tarde para formas outras que não molas e materiais outros que não só os metálicos – não se poderia inferir de imediato que o valor constante que relacionava as variáveis envolvidas na experiência dependesse unicamente do material de que era feita a mola.

De fato, a primeira vez que Hooke informou alguma coisa sobre os resultados de suas pesquisas nesses assuntos, por volta de 1660, ele o fez apresentando-os sob a forma de um anagrama – 14 letras alinhadas na ordem alfabética:

c e i i i n o s s s t t u v

Por razões particulares (ele mesmo é quem o diz), só revelou os resultados escondidos no anagrama de 1678, deixando, pois, seus colegas da Royal Society intrigados por 18 anos! Ouçamo-lo diretamente: "...About two years since I printed this theory in an anagram at the end of my book of the descriptions of the helioscopes,

viz. ceiiinosssttuv, id est, ut tensio sic vis

that is, the power of any spring is in the same proportion with the tension thereof." (MAGIE, 1963, p. 93/94).

Traduzindo: "...Cerca de dois anos desde que publiquei esta teoria em um anagrama, no fim do meu livro de descrições sobre helioscópios, viz. ceiiinosssttuv, id est, ut tensio sic vis, isto é, a força de qualquer "mola" está na mesma proporção com a extensão da dita cuja."

No texto decifrado – ut tensio sic vis – o termo latino **tensio**, variante de **extensio**, Hooke traduziu em inglês como "tension", com o significado evidente de **extension**, igual ao nosso português extensão, pois o termo latino

3. Abel Rey, positivista, atualmente é pouco lembrado. "Passou", como se diz. Mas aí pelos inícios do século teve sua vez e voz. Lenine, no seu livro *Materialismo e Empiriocriticismo*, no capítulo sobre "a crise da física contemporânea", dedica-lhe várias páginas, com aquela veemência tipicamente eslava!

vis é **força**. Acrescente-se ainda que ele usa o substantivo "**spring**" no sentido lato de "qualquer coisa capaz de sofrer deformação". Observe-se finalmente a maliciosidade sutil de Hooke, antecedendo seu anagrama pela abreviatura **viz** do advérbio "videlicit", que no latim tem o significado intencional de frisar que "o que se segue, é fácil de entender..." Ironias de sábios!

Hooke é minucioso na descrição que faz das suas experiências. Diz até como devemos executar os ganchos para pendurarmos os espécimes, bem assim como, se o teste for feito sobre mola espiral, como construí-la, pivotá-la, etc. É de se compreender. Afinal, Robert Hooke, além da fama de excêntrico, também era famoso maquetista e exímio construtor de aparelhos de laboratório, tendo trabalhado algum tempo para seu igual de nome, mas desigual de origem, Sir Robert Boyle, Conde de Cork (1627-1691). Foi um pioneiro em diferentes áreas de conhecimento, tendo seu nome ligado aos primórdios da geologia, da micrografia, da meteorologia, enfim, como registra o verbete que a ele dedica a Enciclopédia Britânica: "As realizações de Hooke teriam sido provavelmente mais notáveis se tivessem sido menos variadas."

Mas, curioso, não lhe ocorreu fazer engendrações sobre a fórmula matemática que traduz os resultados de suas experiências sobre "molas", quando as submetia a forças de tração ou de compressão, esforços aos quais denominava, respectivamente, **rarefaction** e **condensation**. Limitou-se a registrar com pormenores que "if one power stretch or bend it one space, two will bend it two, three will be it three, and so forward" (MAGIE, 1963, p. 94) (se uma força distende ou encurva um espaço, duas encurvação dois, três encurvarão três, e assim por diante).

Não lhe ocorreu, por quê?, tentar variantes de sua frase matemática original (vide fórmula 2 acima), nem mesmo aquela que praticamos em seguida e que gerou a constante K_B (vide fórmula 3). No entanto, sabe-se hoje (TRUESDELL, 1968, p. 103), valer-se da esperteza de trabalhar com a relação **d/L** ao especular sobre o comportamento de materiais submetidos a esforços, já fora intuido por Isaac Beeckman (1570-1637), amigo e mistagogo de Descartes nos assuntos da filosofia natural, cerca de 40 anos antes de Hooke fazer seus experimentos (TRUESDELL, 1968, p. 124, 318)[4].

Gerações de pesquisadores foram se sucedendo a Robet Hooke. Jacob Bernoulli deduziu a equação da linha elástica (1705); Leonhard Euler, aí por volta de 1727, tentando estabelecer a equação da elástica a partir das pesquisas de Hooke, tropeçou com a exigência matemática de introduzir a medida da elasticidade. Em 1744, publica sua importante obra *Methodus Inveniendi lineas curvas...*, no qual se encontra um estudo detalhado de curvas elásticas. Aplicando suas deduções a um balanço, com vão **L** e carga **P** na extremidade (fig. 2) chega a uma fórmula para a flecha igual a

$$f = P.L^3/3C$$

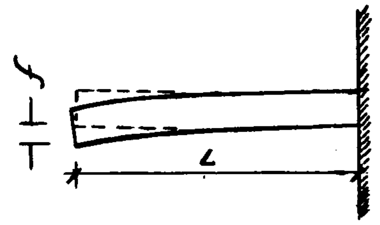


Fig 2

na qual aparece a constante **C**, que Euler não explicita, embora comente que ela depende das propriedades elásticas do material, denominando-a de **elasticidade absoluta** (TIMOSHENKO, 1953, p. 32). Ainda na mesma obra publicou a notável fórmula da carga crítica dos pilares, relativa à flambagem, válida até hoje:

$$P = C.\pi^2/4L^2$$

"Vemos que, duzentos anos atrás, Euler estabeleceu a fórmula da flambagem da estabilidade elástica das estruturas de engenharia" (TIMOSHENKO, 1953, p. 34)[5]. Na fórmula

4. Enquanto Beeckman viu que era a relação (mudança de comprimento/comprimento), ou deformação unitária, que deveria entrar na lei elástica, Hooke contentou-se em medir a variação do comprimento como uma função da força de distensão.

5. Euler não discute o significado físico da constante C, à qual ele chama "elasticidade absoluta", meramente estabelecendo que ela depende das propriedades elásticas do material e que, no caso das vigas retangulares, ela é proporcional à largura e ao quadrado da altura h. Vemos que Euler estava enganado assumindo que c é proporcional a h^2, ao invés de h^3. (TIMOSHENKO, 1953, p. 32).

persiste a constante **C**, que Euler de novo não explicita nem desata nos dois fatores EJ como fazemos atualmente. Mas já em 1757 chegou muito perto, tanto do módulo de elasticidade **E** quanto do conceito de **momento de inércia J**. Genial e prolífico como era, nesse ano publica outro trabalho sobre flambagem, concluindo que a misteriosa constante **C** deveria ter a dimensão de uma força multiplicada por uma área[6] (TIMOSHENKO, 1953, p. 36). Dir-se-ia ou dar-se-ia que o sub-coletivo dos sábios, a essa altura, estava ainda imaturo para receber **E**?!

O tempo vai passando: Lagrange publicou, em 1771, um interessante artigo sobre molas e sobre peças fletidas; Coulomb analisou de forma quase definitiva as forças atuantes em uma seção transversal de um balanço (1773). Todos esbarrando com a falta de uma constante vinculada à elasticidade.

Até que, em 1807, quase 130 anos depois do ensimesmado Hooke ter decifrado seu anagrama para os colegas da Royal Society, o sábio inglês Thomas Young (1773-1829) deu sua interpretação para o módulo de elasticidade. Fê-lo, porém, expondo quase do mesmo modo enviesado de Hooke, trocando apenas o misterioso anagrama pelo viés mais comum da frase circunloquial, de efeito circunsonante. Embora reconhecido unanimente como sábio universal – desde os tempos de estudante era apelidado "phenomenon Young" – era unânime também a fama da ininteligibilidade de suas lições. Seus discípulos respeitavam-no como gênio, mas fugiam desanimados de suas preleções e de seus escritos, o que aliás o magoava muito. A ponto de ocultar-se atrás de pseudônimos, nos artigos que escreveu regularmente para a Enciclopédia Britânica, entre os anos 1816-1825. Como diz Todhunter:

> Entre seus vastos talentos em ciência e em línguas, aquele de expressar-se claramente no dialeto comum da matemática não estava, infelizmente, incluído. (TODHUNTER, 1960, p. 82-3)[7].

Só por curiosidade vamos transcrever *ipsis verbis*, a definição original de Young para o **módulo de elasticidade:**

> ...We may express the elasticity of any substance by the weight of a certain column of the same substance, which may be denominated the modulus of its elasticity, and of which the weight is such, that any addition to it would increase it in the same proportion as the weight added would shorten, by its pressure, a portion of the substance of equal diameter (MAGIE, 1963, p. 96).

Traduzindo... "Podemos exprimir a elasticidade de qualquer substância pelo peso de uma certa coluna da mesma substância, que pode ser denominado módulo de sua elasticidade, e da qual o peso é tal que, qualquer acréscimo nele o aumentaria na mesma proporção que o peso somado diminuiria, pela sua pressão, uma parcela da substância de igual diâmetro."

Mais clara que esta definição do "phenomenon Young" para o módulo de elasticidade, só encontramos mesmo uma outra, de outro "phenomenon", coincidentemente contemporâneo de Thomas, Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), definindo a **Idéia Absoluta**:

> a idéia, como unidade da idéia subjetiva e objetiva, é a noção da Idéia – uma noção cujo objeto é a Idéia como tal, e para a qual o objetivo e Idéia – um objeto que abrange todas as características em sua unidade (RUSSELL, 1956, p. 20).

Analisando esta definição de Hegel da "Idéia Absoluta", Bertrand Russell adverte que seria deplorável qualquer comentário que viesse a estragar a luminosa clareza da sentença. Adverte, mas não resistindo à tentação, faz o co-

6. As primeiras noções sobre momento de inércia aparecem quando da tentativa de estabelecer analogias entre movimentos de translação e movimentos de rotação em torno de um eixo. Em 1765, oito anos após seu trabalho sobre flambagem, Euler dá uma primeira solução ao estabelecimento dessas analogias, "definindo" o momento de inércia como aquela entidade, nos movimentos rotacionais, análoga à massa da fórmula $f = m.a$ dos movimentos translacionais. ($f = m.a$ é a tradução em língua matemática da 2ª lei de Newton, onde f é a força, m é a massa inercial e a é a aceleração, na direção da força). A definição de Euler, publicada no seu trabalho *Theoria Motus Corporum Solidorum et Rigidorum*, embora escrita em latim, soa quase familiar: "Momentum inerciae corporis respectu cujuspiam axis, est summa omnium productorum, quae oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur." Interessante é que essa noção de momento de inércia, no caso de superfícies planas, "aparece" muito espontaneamente ao se deduzir a fórmula da flexão $M/\sigma = J/c$, sem necessidade de qualquer consideração de analogias, isto é, estabelecimento dos pontos de semelhança de coisas diferentes.

7. A obra do Dr. Isaac Todhunter, editada e completada pelo professor Karl Pearson, em três volumes, apesar de leitura relativamente trabalhosa, devido à grande quantidade de informações, várias vezes cruzadas, é no entanto indispensável a quem se propõe abordar um tema como este que estamos desenvolvendo, no "tom" que imprimimos ao artigo. Outra dificuldade diz respeito à terminologia e às notações, apesar da "enxugada" e das "uniformizações" feitas pelo professor Pearson nos originais colecionados pelo Dr. Todhunter.

mentário, explicando que a Idéia Absoluta de Georg Wilhelm "é o pensamento puro pensando o pensamento puro". E como ele, Georg Wilhelm, com satisfação pretendia já ter provado que toda realidade é pensamento, deduz-se que o pensamento não pode pensar em outra coisa senão nele próprio, já que não há outra coisa em que pensar (RUSSELL, 1957, p. 20, 21, 295).

Não resistindo também à tentação, o mesmo faremos nós em relação à sentença de Young, comentando-a, embora lamentando igualmente estragar a luminosa clareza do seu texto original.

Para que da definição de **módulo de elasticidade** proposta por Young, resulte uma **constante**, independente tanto das dimensões do espécime testado quanto da força que provoca a deformação, **e supondo que seu intento era definir um valor constante neste sentido**, temos que entender seu módulo com a dimensão de um **comprimento**!, e não com a dimensão de uma força, como uma leitura mais ligeira de seu texto poderia sugerir, e nem também com a dimensão de um volume, como quer Todhunter (TODHUNTER, 1960, p. 82).

Se o leitor percebeu, como nós, nas entranhas de seu entendimento, qualquer ânimo hostil em digerir o conceito de Young com o paladar de um **comprimento**, sirva-lhe de péptico a informação de que outros ilustres, que também arriscaram provar da definição, igualmente sofreram da mesma dispepsia. Companheiro nosso, nessa má digestão, foi por exemplo Sir William Thomson, o famoso Lorde KELVIN (TODHUNTER, 1960, p. 82), ninguém menos do que um dos co-descobridores da 2ª lei da Termodinâmica, aquela lei desagradável que nos assegura estar o universo se deteriorando e que, finalmente, "não será possível, em parte alguma, sobreviver nada que represente o mínimo interesse." Outro ilustre foi o professor Peter Guthrie Tait, distinto o suficiente para escrever com Lord Kelvin um *Treatise on Natural Philosophy*, na Parte II do qual, segundo Todhunter, sentiram dificuldade em "interpretar" o texto de Young como significando um **volume**(!?), interpretação esta que é a do próprio Isaac Todhunter. É já que tentaremos mostrar que quem acabou se emaranhando na "clareza" do texto de Young foi justamente este último dos Isaac que aparece em nosso enredo. Os que acompanharem nossos raciocínios em detalhes, lendo inclusive as notas, ficarão convencidos de que não estamos aqui a levantar falsos juízos sobre Todhunter, a quem aliás respeitamos e devemos muito.

Resumindo essas especulações, vamos a uma leitura do **Quadro** de que já fizemos referência. Nele chamamos de

E_B – mod. homenagem a Beeckman (dimens.–força)
E_T – mod. como o entendeu Todhunter, interpretando Young (dimens.–volume)
E_Y – mod. definido por Young, como o interpretamos nós (dimens.–comprimento)
E – mod. familiar nosso (dimens.–tensão)
F – força atuante, em Kgf
L – comprimento original do espécime em cm
A – área transversal do espécime, em cm^2
d – deformação total, em cm
ε – deformação unitária, adimensional ($e = d/L$)
σ – tensão, em Kgf/cm^2
ρ – peso específico

Note-se que os valores das colunas 11 e 12, relativos respectivamente aos módulos E_Y e E são constantes, independentes tanto das dimensões do espécime testado quanto da força que provoca a deformação. Dependem só somente da substância. Os outros dois módulos que aparecem no Quadro, E_B e E_T seriam mais propriamente **parâmetros**, no sentido de que são constantes enquanto não variamos a seção do corpo de prova.

Note-se ainda que os dois módulos E_Y e E têm **dimensões** completamente diferentes, o primeiro a dimensão de um **comprimento**, e o segundo a dimensão de uma **tensão**. Que o "phenomenon" Young pensava no seu módulo com essa dimensão **comprimento** atesta-o inclusive seu próprio texto, onde se lê: "The height of the modulus is the same for the same substance, whatever its breadth and thickness may be". (A altura do módulo é a mesma para a mesma substância, qualquer que seja sua extensão ou sua espessura). E dá como exemplo o módulo do aço: "for the steel nearly 1500 miles"! (para o aço aproximadamente 1500 milhas).

O nosso Quadro indica para o módulo E_Y do aço **2.675.159,24m**, ou seja, considerando a milha terrestre com 1609m, pelo cálculo de Young nosso módulo acusa 1662 milhas (90% de aproximação); se considerarmos, porém, que Thomas era inglês, é até certo ponto justificável

QUADRO DOS MÓDULOS DE ELASTICIDADE

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		δ	L	P	A	D	ε	σ	P/AL	E_B (kg)	E_T (m^3)	E_γ (m)	E	Variando
AÇO	$\gamma = 7850$	46	50	250	166	036	0,0072	1504	6980	348999,5	44,458539	2.675.159,24	2.100.000	γ
		46	100	250	166	072	0,0072	1504	3490	348999,5	44,458539	2.675.159,24	2.100.000	L
		46	50	150	166	021	0,0043	903	6980	348999,5	44,458539	2.675.159,24	2.100.000	P
		60	50	250	283	021	0,0042	884	11875	593761,0	75,63845	2.675.159,24	2.100.000	δ
ALUMÍNIO	$\gamma = 2700$	46	50	250	166	107	0,0215	1504	2327	116333,2	43,086361	2.592.592,59	700.000	γ
		46	100	250	166	214	0,0215	1504	1164	116332,2	43,086361	2.592.592,59	700.000	L
		46	50	150	166	064	0,0129	903	2328	116332,2	43,086361	2.592.592,59	700.000	P
		60	. 50	250	283	063	0,0126	884	3958	197920,3	73,303828	2.592.592,59	700.000	δ
COBRE	$\gamma = 8940$	60	50	250	283	0,040	0,0008	884	6220	311017,7	34,789449	1.230.425,05	1.100.000	γ
		60	100	250	283	0,080	0,0008	884	3110	311017,7	34,789449	1.230.425,05	1.100.000	L
		60	50	150	283	0,024	0,0005	530	6220	311017,7	34,789449	1.230.425,05	1.100.000	P
		80	50	250	503	0,023	0,0005	497	11058	552920,3	61,847909	1.230.425,05	1.100.000	δ
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

UNIDADES: δ – cm, L – cm, P – kg, γ – kgf/m^3, EB – kg, ET – m^3, EY – m, E – kg/cm^2

OBS.: Os cálculos foram executados com a máxima aproximação de uma máquina HP-97. Daí eventuais pequenas discrepâncias, se verificações forem feitas com os valores do quadro.

imaginarmos que ele estava referindo-se a "nautical mile". Com esta hipótese, e tomando a milha marítima com 1852m, nosso valor indica que Young avaliou o módulo de elasticidade do aço com 96% de aproximação, ou seja, pelos nossos roteiros chegaríamos a 1444 milhas. Lembremo-nos, em apoio a Young, que ele apenas estimou o módulo – "nearly 1500 miles" – isso em 1807.

Thomas Young foi um daqueles "raros" em meio à sua coletividade, particularmente no sub-grupo a que se integrava mais de perto, aquele dos sábios, como eram denominados naquele então. Como Hooke, também ele foi versátil em diversas áreas. Mas, igualmente como Hooke, "era uma pessoa carregando um ressentimento", como diz Maurice Pope:

> Após um primeiro estágio brilhante, concluído no Emmanuel College, Cambridge, onde foi apelidado "phenomenon Young", fez contribuições originais em diversos assuntos, tais como teoria do seguro, história natural, medicina, física e, acima de tudo, na história da tecnologia, mas nunca alcançou a primeira posição em qualquer deles, exceto talvez em **ótica**, em seu trabalho sobre interferência da luz (POPE, 1975, p. 66).

Da citação de Pope fizemos questão de frizar o detalhe de que Young foi particularmente brilhante em **ótica**, isto é, foi quem, juntamente com Fresnel, retomou a teoria ondulatória da luz, proposta anteriormente por Huygens. Este, por sua vez, ao propor a natureza ondulatória da propagação da luz, viu nesta uma analogia com a propagação do som (WARREN, 1979, p. 407). Pois bem, **a raiz quadrada do módulo E_Y, no sistema MKS, indica a velocidade de propagação de uma onda, como a sonora, deslocando-se num meio sólido.** Ou seja, se quisermos, por exemplo, saber a velocidade do som em uma barra de aço, basta calcular a raiz quadrada do produto de E_Y de nosso Quadro pelo valor da aceleração da gravidade, em **m/s**:

$$= \sqrt{2.675.159{,}24 \times 9{,}81} = 5122{,}82\text{m/s}$$

Ocorre-nos a observação: será que Thomas, ágil como era, estudando várias coisas ao mesmo tempo, ao definir "seu" módulo de forma tão hieroglífica, estava pensando em atender ao mesmo tempo, de um lado às carências objetivas de uma constante elástica em diferentes tópicos da "filosofia da natureza", e de outro às suas próprias, subjetivas, deixando seus confrades inseguros com sua definição?! Como dedicou-se também a decifrar a antiga escrita dos egípcios, como era um magoado ao jeito de Hooke, e como no seu tempo já havia passado a moda dos **anagramas**...

Um outro tópico onde é aplicável a constante E_Y, além daquele relativo à velocidade de propagação do som, é no cálculo da deformação de uma viga, provocada por exemplo pelo seu peso próprio (Fig. 3). Como amostra, escolhemos o primeiro perfil **I de 10"**, do catálogo da CSN – Cia. Siderúrgica Nacional, que indica uma **área = 48,1cm²**, **um peso = 37,7 kg/m** e um momento de inércia **J_x = 5140cm⁴**:

$$f = 5\text{x}48{,}1\text{x}400^4 \;/\; (384\text{x}267515924\text{x}5140) = $$
$$= 0.012\text{cm}$$

$$(f = 5\text{x}0.377\text{x}400^4 \;/\; (384\text{x}2100000\text{x}5140) = $$
$$= 0.012\text{cm})$$

OBS.: se quizermos calcular a flecha para uma carga qualquer (fig. 3b), usando o módulo E_Y, teríamos que entrar na fórmula correspondente com o valor do peso específico do material. Coisas do Thomas! (Eis aí um dos motivos porque preferiu-se usar o módulo E, como definido por Navier, tão logo este o apresentou em suas lições sobre resistência dos materiais, em 1826).

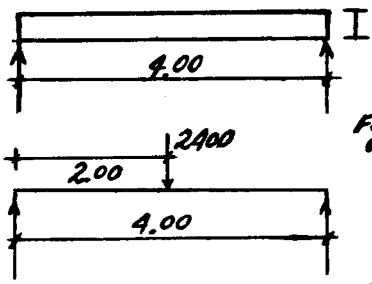


Fig 3a

Fig 3b

Adotamos o peso específico = 7850 kgf/m³

$$f = 2400\text{x}400^3 \;\div$$
$$\div\; (48\text{x}267515924\text{x}5140\text{x}0.00785) = 0{,}296\text{cm}$$

$$(f = 2400\text{x}400^3 \;\div$$
$$\div\; (48\text{x}2100000\text{x}5140) = 0{,}296\text{cm})$$

Para encerrar esse artigo, que já leva mais tempo do que, sinceramente, tínhamos intenção de fazer o leitor tolerante gastar com ele, damos a seguir as diferentes relações que existem entre as 4 constantes do nosso Quadro:

$E_B = P/(d/L)$ – deduzido na pág. 3 (parâmetro)
$E_T = E_B/\rho$ – é o "volume" de Todhunter (parâmetro)
$E_Y = E_T/A$ – é a "pressão" de que fala Young na sua definição
$E = E_Y . \rho$ – derivado das especulações de Young
$E = \sigma/\varepsilon$ – definido por Navier

LISTA BIBLIOGRÁFICA

BUENO, Francisco da Silveira. *Dicionário escolar da língua portuguesa*. 2. ed. Rio de Janeiro: Ministério da Educação e Cultura, 1957.

COHEN, Morris R. *Reason and nature*. New York: Dover Publications, 1978.

COXETER, H. S. M. *Regular polytopes*. 3. ed. New York: Dover Publications, 1973.

GALILEI, Galileu. *O Ensaiador*. São Paulo: Abril, 1973. Trad. e Notas de Helda Barraco.

GAMOW, George. *Physics*. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

GRAY, George W. *Nueva imagen del universo*. Buenos Aires: Libreria Hachette, 1943. Trad. por Nelly y Raquel Navarro Viola.

MAGIE, William Francis. *A source book in physics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1963.

POPE, Maurice. *Decipherment*. London: Thames and Hudson, 1975.

RUSSEL, Bertrand. *Ensaios impopulares*. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1956. Trad. de Brenno da Silveira.

————. *História da filosofia ocidental*. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1957. Livro 3. Trad. de Brenno Silveira.

————. *Los principios de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe Argentina, 1948. Trad. del ingles por Juan Carlos Grimberg.

————. *Misticismo e lógica*. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1957. Trad. de Wilson Veloso.

TAYLOR, L. W. *Physics*. Cambridge (Mass.): Houghton Mifflin Co., 1941.

TIMOSHENKO, Stephen. *History of strength of materials*. New York: McGraw-Hill, 1953.

TODHUNTER, Isaac. *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials*. New York: Dover Publications, 1960. V. 1.

TRUESDELL, C. *Essays in the history of mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1968.

WARREN, Mashuri L. *Introductory physics*. San Francisco (USA): W. H. Freeman and Company, 1979.

ABSTRACT – This paper comments on Galileo's observation on the advantages of the mathematical language to deal with things of Nature – unique language in which its most guarded secrets can be disclosed. The daily and mathematical languages are compared, the latter exhibiting its tremendous synthesis ability. The evolution of a number of common concepts is presented, displaying how difficult it was and long it took to turn them common. Eminent scholars passed by these concepts, although they needed them to solve and develop a certain subject. Moment of inercia and elasticity modulus are two of these concepts. The obscure way Young defined the elasticity modulus is shown indicating he thought it was a length, different from the currently dimension, a tension. Several ways of interpreting the modulus are worked out with their dimensions.

(Recebido em 18/02/91)