

## A CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS POR GEORG CANTOR<sup>1</sup>

DENISE SILVA VILELA

*Resumo: Apresenta-se aqui uma tradução comentada do artigo de G. Cantor "Sobre uma propriedade do sistema de todos os números algébricos reais", publicado originalmente em 1874.*

*Nesse artigo Cantor 'enumera' os números algébricos e verifica a impossibilidade de fazer o mesmo com os números reais. Com isso ele chega a encontrar de "modo claro a diferença entre um sistema contínuo de números e um sistema da espécie daquele formado pelo conjunto de todos os números algébricos reais". Essa distinção entre conjuntos infinitos foi a base para o desenvolvimento de sua 'famosa' teoria dos Números Transfinitos, de 1895.*

*Para efetuar esta tradução foi necessário indicar o contexto da época da publicação, no que diz respeito ao desenvolvimento da matemática, destacando-se aí a definição rigorosa dos números reais, até então tratada de forma intuitiva.*

*Abstract: This paper presents a translation of Georg Cantor's article "On a property of the collection of all real algebraic numbers" first published in 1874.*

*In this article Cantor enumerates the algebraic numbers and realizes the impossibility of doing the same with real numbers. Then he finds "clear difference between a continuum system of numbers and a system of species formed by the set of all real algebraic numbers". Such distinction between infinite sets was basic for the development of his 'famous' theory of transfinite numbers, in 1895.*

*To proceed this translation it was necessary understanding the context of the period, on mathematics development. Stand out the rigors definition of real numbers, wich were intuitively conceived.*

### 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma tradução e analisar o artigo de Georg Cantor (1845-1912) "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", publicado em 1874 na revista conhecida como "Crelle's Journal". Essa tradução e análise foram feitas através de uma tradução do artigo de Cantor, revisada por ele, intitulada "Sur une Propriété du Système de Tous les Nombres Algébriques Réels", publicada na revista *Acta Mathematica* em junho de 1883<sup>2</sup>.

Cantor nesse artigo demonstra que se pode corresponder um a um os números algébricos aos números inteiros positivos. Em seguida, mostra que o mesmo não ocorre com os números reais. E assim Cantor encontra "de modo claro a diferença que há entre um sistema contínuo de números e um sistema de números da espécie daquele formado pelo conjunto de todos os números algébricos" (Cantor, 1874, p. 306).

1 Este trabalho foi elaborado sob a orientação do prof. Roberto Martins, durante Curso de Especialização em História da Ciência na Unicamp para apresentação no 3º Seminário Nacional de História da Ciência em 1991.

2 A referência a esta publicação manterá a data original: (CANTOR, 1874, p....)

A questão números reais favorece penetrar no espírito da época por ser um tema tratado também por importantes matemáticos contemporâneos de Cantor. Essas considerações relativas ao contexto serão rapidamente esboçadas na primeira parte deste trabalho.

Destaca-se nesse período o rigor na definição de números reais, que marca uma mudança profunda na análise matemática. Aqui, esta transformação será observada através da análise de alguns manuais disponíveis do período anterior à divulgação desses desenvolvimentos. Os manuais utilizados têm um papel ilustrativo, não pretendendo, portanto, ser uma mostra estatística significativa.

Em seguida apresenta-se uma tradução do artigo com comentários, através dos quais considera-se o rigor matemático conforme a época e reconstrói-se os procedimentos indicados no artigo. Nessa reconstrução utiliza-se a notação atual por ser mais simplificada do que a utilizada por Cantor e seus contemporâneos, procurando, entretanto, não deturpar o conteúdo que caracteriza os desenvolvimentos da época. Destaca-se nesta etapa o método de reconstrução utilizado.

Com isso, pretende-se distinguir os resultados novos e as contribuições do artigo no período em que foi publicado. É o que está colocado por último, com algumas considerações finais a respeito da estrutura e conteúdo do artigo obtidas através desta análise, e com apoio das feitas por comentadores.

## 2 CONTEXTO

Os números irracionais constituíam um tema com o qual se ocupavam os matemáticos contemporâneos de Cantor, e também um tema importante que caracteriza, até hoje, os desenvolvimentos da análise matemática do século XIX. Tentaremos a seguir traçar um esboço desse desenvolvimento, com ênfase no rigor que se instalou a partir desse período.

É expressiva a mudança na forma de apresentação, no que diz respeito ao rigor, do conteúdo matemático desenvolvido nesse período. Ilustra-se isso através de uma rápida análise de livros e manuais da época, nos quais o número irracional está definido como grandeza incomensurável tal qual Eudoxo (408-355 a.C.) propôs. Apresentamos um pequeno trecho do livro *Elementos de Aritmética*, de João José Luiz Viana, como uma ilustração da forma como o tema era abordado:

“Noções Preliminares

3-As grandezas se classificam em contínuas e descontínuas. A grandeza é contínua se ela pode crescer ou diminuir por graus tão pequenos quanto se quera; e descontínua quando só pode crescer ou diminuir por graus determinados. Assim, o peso de um corpo, o calor, o tempo, a luz são grandezas contínuas; uma reunião de ovelhas, de homens, de navios são grandezas descontínuas.” (Viana, 1892, p.5).

Essa definição ilustra o caráter intuitivo e pouco rigoroso na maneira de algumas noções do ponto de vista atual.

É certo que muito já havia sido feito nessa área, visto que matemáticos célebres como Fourier (1768-1830), Riemann (1826-1866), Cauchy (1789-1857), Gauss (1777- 1855) já haviam deixado suas contribuições. Em alguns livros de análise e álgebra publicados no século XIX<sup>3</sup> pode-se observar extensos capítulos sobre convergência de séries, teoria de funções de variáveis reais ou complexas, assim como o já apurado cálculo diferencial e integral.

Ocorria, entretanto, uma falha ou imperfeição em todos esses temas citados acima, que dependem essencialmente da definição de números irracionais. Em 1869, H.C.R. Méry (1835-1911) publicou um artigo apontando “a séria falha de raciocínio que os matemáticos vinham cometendo desde os tempos de Cauchy” (Boyer, 1974, p. 409). A introdução do número irracional foi até então, explícita ou implicitamente, geométrica. Na Introdução de *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Jourdain explica como a visão de número com uma base geométrica foi tomada por Newton e a maioria de seus sucessores. Olhando o século XIX, observa-se que Cauchy, por exemplo, explicitamente adotou a mesma visão<sup>4</sup>.

3 LACROIX, S. *Elements d'algebre*, Paris, 1836.

4 Ver JORDAIN, 1915, p. 15-17.

Uma vez identificada essa falha, tanto tempo dissimulada pela intuição, Weierstrass foi o primeiro a elaborar uma rigorosa definição de número irracional, utilizando-se de “números de racinais”<sup>5</sup>, a qual não foi publicada na época, mas difundida entre seus alunos.

Cantor publicou sua definição de número irracional no artigo “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen” (*Mathematische Annalen*, 5, 1872)<sup>6</sup>.

Entretanto, uma das definições mais difundidas é de seu contemporâneo R. Dedekind (1831-1916)<sup>7</sup>, a qual é equivalente à forma descrita a seguir, na qual pode-se notar maior abstração e rigor contrastando com as definições de Viana, descrita acima:

“Um corte de Dedekind é um par ordenado  $(A, B)$  onde  $A$  e  $B$  são sub- conjuntos não vazios de números racionais  $[\ ]$ , tais que  $A$  não possui elemento máximo,  $AB = ; e$ , dados  $x \in A$  e  $y \in B$  quaisquer , tem-se  $x < y \dots$  Se  $f$  é o conjunto dos cortes de Dedekind então, existe uma bijeção  $f: \dots$ ” (Lima, 1982, p. 74).

Partindo dessa definição, demonstra-se a existência de um número que separa as duas classes de modo que se obtém 3 casos entre os quais, de um deles resulta o que se define como número irracional.

A geometria, nessas definições, já não era o recurso que garantia a existência de números reais. Ao contrário, a identidade entre os números reais e a reta foi tomada como axioma: ‘a cada grandeza numérica corresponde um determinado ponto e cada ponto relacionado como coordenada numérica é igual a uma grandeza numérica’ (Jourdain, 1915, p.30).

Ao acompanhar as definições de números irracionais, nota-se que mesmo “densidade” não é uma característica suficiente para o preenchimento da reta. Possivelmente, nesse sentido, Cantor começa a refletir sobre a natureza do “contínuo” e prova a natureza não enumerável dos números reais, que diferem dos números racionais e algébricos, os quais podem ser colocados em correspondência um a um com os números naturais.

Através das cartas entre Cantor e Dedekind poder-se-ia afirmar que tais métodos ou caracterizações de enumerabilidade utilizadas por Cantor não haviam sido destacadas até então. Isso parece implícito na dúvida de Cantor quanto à relevância da questão:

“...eu não posso achar a razão [da não enumerabilidade dos reais], e enquanto eu dou uma grande importância a isto a razão pode ser uma coisa muito simples”(Cantor, apud. Dauben 1979, p. 49)<sup>8</sup>.

É dentro desse contexto de “aritmética da análise” que Cantor publica em 1874 seu artigo, que é tema deste estudo. O conteúdo dele é uma versão mais elaborada de uma demonstração contida numa carta de Cantor a Dedekind que data de 23 de Dezembro de 1873. J. Dauben (Dauben, 1975, p. 50), Jourdain (Jourdain, 1915, p. 38) e Dechen (Dechen, 1971, p.54) concordam que o objetivo desse artigo é caracterizar os números reais como um “contínuo linear”.

### 3 Tradução Comentada

#### SOBRE UMA PROPRIEDADE DO SISTEMA DE TODOS OS NÚMEROS ALGÉBRICOS REAIS

por

G. CANTOR - Halle

(tradução de um artigo publicado no jornal editado por Borchardt, v. 77, p. 258)

Denominamos, em geral, *número algébrico* real um número real de uma equação não idêntica de forma:

5 Essa definição foi publicada originalmente em 1872. Ver JORDAIN, 1915, p. 18-21.

6 Também em francês na revista *Acta Mathematica*, 2, 1883.

7 Uma tradução para o inglês de parte do artigo onde consta essa definição pode ser encontrada em: SMITH, David E.A *Source book in mathematics*, p.35-45

8 Ver também em p.26 MESCHKOWSKI, *Probleme des Undeliche*. /Carta a Dedekind, 29/11/1873.

$$(1) a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

onde  $n, a_0, a_1, \dots, a_n$  são números inteiros; nós podemos supor que os números  $n$  e  $a_0$  são positivos, que os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  não possuem um divisor comum e que a equação (1) é irredutível; essas suposições sendo feitas, resulta dos teoremas fundamentais da aritmética e da álgebra que a equação (1) que admite por raiz um número algébrico real é uma equação inteiramente determinada; inversamente a uma equação da forma (1) correspondem no máximo tantos números algébricos, raízes da equação, quanto é o grau  $n$  da equação<sup>9</sup>.

Os números algébricos constituem no seu conjunto um sistema de números que designamos por  $(\omega)$ ; como resulta de considerações elementares, esse sistema  $(\omega)$  de números é de tal natureza que existe uma infinidade de números de  $(\omega)$  cuja diferença com um número qualquer  $\alpha$  é menor que uma quantidade dada, por menor que seja<sup>10</sup>. Essa observação torna muito mais marcante, à primeira abordagem, a propriedade seguinte: pode-se fazer corresponder um a um os números do sistema  $(\omega)$  aos números  $v$  pertencentes à série dos inteiros positivos, seqüência que designaremos por  $(v)$ , de modo que a cada número algébrico real  $\omega$  corresponda um número inteiro positivo determinado  $v$ , e inversamente a cada número inteiro positivo  $v$  corresponda um número algébrico real  $\omega$  completamente determinado; em outras palavras, pode-se imaginar os números do sistema  $(\omega)$  colocados de acordo com uma certa lei em uma seqüência infinita

$$(2) \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_v, \dots$$

na qual figuram todos os números da categoria  $(\omega)$ , cada um deles sendo encontrado na série (2) em um lugar determinado indicado pelo índice correspondente<sup>11</sup>. Uma vez que se encontre uma lei que permita colocar assim os números de  $(\omega)$ , poderão dela ser deduzidas outras [formas de enumerar] por

9 A última parte desta afirmação "a uma equação da forma (1) correspondem no máximo tantos números algébricos reais, raízes da equação, quanto é o grau  $n$  da equação" é exatamente o que se denomina "teorema fundamental da álgebra"

O "inverso" pode ser enunciado, de acordo com as "suposições feitas", da seguinte maneira: dado  $\alpha$  algébrico existe uma única equação irredutível, com coeficientes primos entre si, que tenha  $\alpha$  como raiz. Conforme indica Cantor, utiliza-se o teorema fundamental da aritmética na demonstração deste teorema:

1 - Seja  $\alpha$  um número algébrico. Por definição de número algébrico existe  $P(x)$  tal que  $P(\alpha)=0$

2 - Seja  $A$  o conjunto de todos os polinômios  $f(x)$  tal que  $f(\alpha)=0$

3 -  $A$  não é vazio por (1). Tome então,  $g(x)$ , um polinômio de menor grau de  $A$ .

Basta mostrar que:

I -  $g(x)$  é irredutível

II - todo polinômio de  $A$  se escreve como produto de  $g(x)$ , isto é,  $g(x)$  é o único polinômio irredutível que tem  $\alpha$  como raiz.

Demonstração de I

Se  $g(x)$  é redutível, então pelo Teorema fundamental da aritmética  $g(x)=f(x).h(x)$  com  $\text{gr } f(x) < \text{gr } g(x)$  e

$\text{gr } h(x) < \text{gr } g(x)$

$g(\alpha)=f(\alpha).h(\alpha) \Rightarrow 0=f(\alpha).h(\alpha) \Rightarrow f(\alpha)=0$  ou  $h(\alpha)=0$

o que contraria a hipótese de ser  $g(x)$  o menor polinômio de  $A$ .

Logo  $g(x)$  é irredutível.

Demonstração de II:

Todo polinômio que anula  $\alpha$  é múltiplo de  $g(x)$  pois, se existe  $h(x) \mid h(\alpha)=0 \Rightarrow h(x)=q(x).g(x)+r(x)$ , mas como  $h(\alpha)=0$  e  $g(\alpha)=0 \Rightarrow r(\alpha)=0$ .

Sabemos que  $\text{gr } g(x) > \text{gr } r(x)$  ou  $r(x)=0$

10 Esta afirmação equivale a dizer que os números algébricos são densos em  $\mathcal{R}$ . A demonstração é trivial: o conjunto dos números algébricos contém todos os racionais, como os racionais são densos (basta tomar quaisquer dois números racionais e dividir por 2), com mais razão os números algébricos são densos.

11 Está colocada explicitamente neste trecho a definição de enumerabilidade, que é equivalente à definição atual: um conjunto  $X$  é enumerável se existe uma bijeção  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  de modo que se escreve, a fim de identificar tal enumeração,  $f(1)=x_1, f(2)=x_2, \dots, f(n)=x_n, \dots$  (Lima, 1980, p.38).

modificações que se pode escolher à vontade. Será suficiente indicar, como o faremos no §1, o modo de classificação que nos parece repousar sobre o menor número de considerações.

Para dar uma aplicação dessa propriedade [enumerabilidade] do sistema de todos os números algébricos reais, acrescento ao §1 o §2 no qual mostro que quando se considera uma seqüência qualquer de números reais dada sob a forma (2), pode-se determinar, em cada intervalo  $(\alpha...B)$  dado, os números  $\eta$  não contidos na seqüência (2)<sup>12</sup>. Combinando as proposições contidas nos §§ 1 e 2, obtém-se assim uma nova demonstração do teorema demonstrado pela primeira vez por Liouville (Journal de Mathématique Pure et Appliquée, 1ª série, v. XVI, 1851): em cada intervalo  $(\alpha...B)$  dado, há uma infinidade de números transcendententes, isto é, números reais não algébricos<sup>13</sup>. Além disso o teorema do §2 dá o motivo pelo qual não se pode fazer corresponder um a um aos números inteiros da série  $(v)$  os números reais que formam um sistema contínuo de números, quer dizer, por exemplo, todos os números reais que são  $\geq 0$  e  $\leq 1$ . Assim, cheguei a achar de modo claro a diferença essencial que há entre um sistema contínuo de números e um sistema de números da espécie daquele formado pelo conjunto de todos os números algébricos reais<sup>14</sup>.

#### §1

Voltemos à equação (1) a qual satisfaz um número algébrico real  $\omega$  e que, a partir das suposições anteriormente colocadas, é uma equação inteiramente determinada; chamamos *altura* do número  $\omega$  a soma dos valores absolutos dos coeficientes aumentada do número  $n-1$ , sendo  $n$  o grau da equação; designando essa altura por  $N$  e aplicando uma notação conhecida para designar os valores absolutos dos números, tem-se conseqüentemente,

$$(1) \quad N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Essa altura  $N$  é, por conseguinte, para cada número algébrico real, um número inteiro positivo determinado; inversamente, a um número inteiro positivo dado,  $N$  só corresponde um número limitado de números algébricos reais que possuem altura  $N$ <sup>15</sup>, seja  $\varphi(N)$  este número: ter-se-á, por exemplo,  $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 4$ . Os números do sistema  $(\omega)$ , isto é todos os números algébricos reais, podem portanto ser arranjados na seguinte ordem: toma-se como primeiro número  $\omega_1$ , o único número de altura  $N = 1$ ; escreve-se em seguida por ordem de valores crescentes dos dois números algébricos de altura  $N = 2$  e designam os mesmos por  $\omega_2$  e  $\omega_3$ ; depois, na seqüência e por ordem de valores crescentes, serão escritos os quatro números de altura  $N=3$ ; de uma maneira geral, após ter contado e classificado assim os números da categoria  $(\omega)$  até uma altura  $N=N_1$ , serão ordenados em seguida, por ordem de grandeza crescente, os números algébricos reais de altura  $N=N_1+1$ <sup>16</sup>. Obtém-se assim o sistema de todos os números algébricos reais sob a forma:

12 Ressalto que aqui está a definição implícita de conjunto não enumerável.

13 De fato os parágrafos 1 e 2 contêm uma demonstração do teorema de Liouville:

-todo número real ou é algébrico ou é transcendente;

-no parágrafo 1 tem-se que os números algébricos são enumeráveis;

-supondo que os números transcendententes são enumeráveis poderíamos, por exemplo, enumerar os números reais da seguinte forma  $f:N \rightarrow \mathfrak{R}$  tq  $f(2n+1)=\omega_n$  e  $f(2n)=t_n$  onde  $\omega$  representa um número algébrico e  $t$  um número transcendente;

-mas isso contradiz o fato de  $\mathfrak{R}$  ser não enumerável. Logo, os números transcendententes são números não enumeráveis. E isso equivale ao teorema demonstrado por Liouville em 1851 pela definição de não enumerabilidade dada acima.

14 Cantor enfatiza seu propósito de caracterizar  $\mathfrak{R}$  como grandeza contínua. E também sua definição de enumerabilidade e não enumerabilidade estabelece uma classificação dual e exclusiva de ser todo conjunto ou discreto ou contínuo, como diríamos hoje.

15 De fato, a cada altura  $N$  corresponde no máximo:  $1 + 2(n-1)^2 + n^{n+1}$ .

16 Pode-se notar aqui que Cantor utiliza apenas a noção de "infinito potencial".

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_v, \dots$ <sup>17</sup>

e pode-se, reportando a essa classificação, falar do  $v$ -ésimo número algébrico real, sem omitir nenhum número do sistema ( $\omega$ ).

## §2

Quando se tem uma seqüência infinita de números reais diferentes uns dos outros, sucedendo-se segundo uma lei determinada qualquer

(4)  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_v, \dots$

pode-se em cada intervalo ( $\alpha \dots \beta$ ) dado, determinar um número que não se acha na seqüência (4); e existe, por conseguinte, uma infinidade de tais números. Eis a demonstração deste teorema<sup>18</sup>.

Partamos do intervalo dado ( $\alpha \dots \beta$ ) e seja  $\beta$ ; designemos por  $\alpha'$  e  $\beta'$  os dois primeiros números da seqüência da (4), diferentes entre si, que sejam distintos de  $\alpha$  e  $\beta$  e que se encontram dentro do intervalo, e seja  $\alpha < \beta$ ; designamos da mesma forma  $\alpha''$  e  $\beta''$  os dois primeiros números de nossa seqüência, diferentes entre si e que se encontram dentro do intervalo ( $\alpha' \dots \beta'$ ) e seja  $\alpha'' < \beta''$ ; com base na mesma lei, formamos o intervalo seguinte ( $\alpha''' \dots \beta'''$ ), e assim por diante<sup>19</sup>. Segundo essa definição, os números  $\alpha', \alpha'', \dots$  são números determinados  $u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}, \dots, u_{kv}$  da nossa seqüência (4) cujos índices  $K_v$  crescem constantemente, e a mesma coisa vale para os números  $\beta', \beta'', \dots$ ; além disso, os números  $\alpha', \alpha'', \dots$  são de valores crescentes, os números  $\beta', \beta'', \dots$ , de valores decrescentes; cada um dos intervalos ( $\alpha \dots \beta$ ), ( $\alpha' \dots \beta'$ ), ( $\alpha'' \dots \beta''$ ) compreende todos aqueles que o seguem. Não se pode então conceber senão dois casos.

Ou o número de intervalos que se pode formar desse modo é finito; seja ( $\alpha^v \dots \beta^v$ ) o último dentre eles; como neste intervalo se acha, no máximo, um número da seqüência (4), pode-se tomar deste intervalo um número que não pertence à seqüência (4), e o teorema está assim demonstrado nesse caso<sup>20</sup>.

Ou o número de intervalos assim formados é infinito; então, como os números  $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$  crescem constantemente, mas sem crescer ao infinito, eles possuem um certo limite  $\alpha^\infty$ ; da mesma forma os números  $\beta, \beta', \beta'', \dots$  que decrescem constantemente têm, um certo limite  $\beta^\infty$ <sup>21</sup>. Se  $\alpha^\infty = \beta^\infty$  (o que ocorre

17 Eis a relação dos primeiros números algébricos ( $\omega_v$ ) e suas respectivas equações ( $e_v$ ) obtidas através do procedimento indicado acima, onde a condição da irredutibilidade da equação é imprescindível para que não haja repetição de termos:

$$(N=1) \omega_1=0$$

$$(N=2) \omega_2=-1 \quad \omega_3=1$$

$$(N=3) \omega_4=-2 \quad \omega_5=1/2 \quad \omega_6=1/2 \quad \omega_7=2$$

$$(N=4) \omega_8=-3 \quad \omega_9=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \omega_{10}=-\sqrt{2}$$

$$\omega_{11}=\sqrt{1/2} \quad \omega_{12}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \omega_{13}=-1/3$$

$$\omega_{14}=1/3 \quad \omega_{15}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \omega_{16}=1/\sqrt{2}$$

$$\omega_{17}=\sqrt{2} \quad \omega_{18}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \omega_{19}=3$$

$$e_1: \omega=0$$

$$e_2: \omega+1=0 \quad e_3: \omega-1=0$$

$$e_4: \omega+2=0 \quad e_5: 2\omega+1=0 \quad e_6: 2\omega-1=0$$

$$e_7: \omega-2=0 \quad e_8: \omega+3=0 \quad e_9, e_{15}: \omega^2+\omega-1=0$$

$$e_{10}, e_{17}: \omega^2-2=0 \quad e_{11}, e_{16}: 2\omega^2-1=0$$

$$e_{12}, e_{18}: \omega^2-\omega-1=0 \quad e_{13}: 3x+1=0 \quad e_{14}: 3x-1=0 \quad e_{19}: \omega-3$$

18 Nesta demonstração é necessário utilizar-se da definição recém-elaborada de números reais, onde está também estabelecida sua ordenação.

19 Essa construção utiliza o axioma da escolha, até então não identificado.

20 A densidade é condição suficiente para essa conclusão.

21 O critério de "convergência de seqüência" utilizado neste ponto foi demonstrado por Dedekind em 1858. (e daí que apareceu para Dedekind a necessidade da definição aritmética rigorosa, de número real). (Lima, 1980, p.86).

sempre aplicando este método ao mesmo sistema ( $\omega$ ) dos números algébricos reais), assegura-se facilmente, voltando à definição dos intervalos, que o número  $n = \alpha^\infty = \beta^\infty$  não pode estar compreendido na mesma seqüência; pois se este número  $n$  estivesse na nossa seqüência, ter-se-ia  $n = u_p$ ,  $p$  sendo um índice determinado; mas isso não é possível, pois  $u_p$  não se acha dentro do intervalo  $(\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$ , enquanto que o número  $n$  encontra-se de acordo com sua definição<sup>22</sup>. Se, ao contrário,  $\alpha^\infty < \beta^\infty$ , todo número  $n$  contido no intervalo  $(\alpha^\infty \dots \beta^\infty)$ , ou igual a um dos limites, preenche a condição requerida de não pertencer à seqüência (4).

Os teoremas que acabamos de demonstrar podem ser generalizados de diferentes maneiras; nós indicaremos aqui apenas a proposição seguinte: "Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$  uma seqüência finita ou infinita de números linearmente independentes, quer dizer, de números tais que não existe entre eles nenhuma equação da forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

sendo os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  inteiros que não são todos nulos ao mesmo tempo; concebemos o sistema ( $\Omega$ ) de todos os números  $\Omega$  que podem ser representados por funções racionais com coeficiente inteiros dos números dados  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ ; então, em todo intervalo  $(\alpha \dots \beta)$  há uma infinidade de números que não estão contidos no sistema ( $\Omega$ )"

De fato, vê-se, com a ajuda de considerações análogas às que foram empregadas no §1, que os números da categoria ( $\Omega$ ) podem ser colocados em uma seqüência da forma:

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v, \dots$$

de onde resulta o teorema em questão a partir da proposição demonstrada no §2<sup>23</sup>.

M. B. Miningerade demonstrou, por redução aos princípios de Galois, um caso muito particular do teorema que acabamos de indicar, a saber, o caso no qual os números  $v_1, v_2, \dots, v_v$  são em número finito

Se chamamos de seqüência monótona uma seqüência crescente ( $u_1 < u_2 < u_3 \dots$ ), ou decrescente ( $u_1 > u_2 > u_3 \dots$ ), podemos enunciar da seguinte maneira o critério de convergência: Toda seqüência monótona limitada é convergente. Sabemos que uma seqüência é limitada se todos os seus termos pertencem a um intervalo  $(\alpha, \beta)$ . Pelo teorema acima fica garantida a existência dos limites  $\alpha^\infty$  e  $\beta^\infty$ .

22 Esclarecendo, se  $\eta = u_p$ , para um índice suficientemente grande,  $u_p$  estaria excluído de todos intervalos situados entre  $(\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)})$ . Mas ao mesmo tempo, por construção  $\eta$  pertence ao intervalo  $(\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)})$ .

23 O procedimento sugerido está indicado abaixo por partes, separadas de acordo com as dificuldades encontradas:

1)  $\Omega$  é número que pode ser representado por função racional com coeficientes inteiros:

$$f = a_0 v_1^{k11} v_2^{k12} \dots v_n^{k1n} + a_1 v_1^{k21} v_2^{k22} \dots v_n^{k2n} + \dots + a_{j-1} v_1^{kj1} v_2^{kj2} \dots v_n^{kjn}$$

$$g = b_0 v_1^{p11} v_2^{p12} v_3^{p13} \dots v_n^{p1n} + \dots + b_{m-1} v_1^{pm1}$$

$$\Omega = f/g$$

A "altura  $N$ ", definida no parágrafo 1, foi utilizada para ordenar os números algébricos. Não há, entretanto, nenhuma indicação para o cálculo da "altura" de uma função racional como mencionado no artigo de Cantor. Obviamente a "altura" de  $\Omega$  não é a "altura de  $f$ " dividida pela "altura de  $g$ ", pois a "altura é um número inteiro positivo". Poder-se-ia pensar em definir a "altura" de  $\Omega$  como a "altura de  $f+g$  ou  $f.g$ " ou, ainda, de qualquer outra forma que mantenha "limitado o número" de números  $\Omega$  relativos a cada "altura". De qualquer modo, não há no parágrafo 1 uma dificuldade análoga que nos indique o possível caminho seguido por Cantor.

2) Devido às considerações acima, seja  $\Omega$  um número representado por uma função polinomial e  $v_i = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  um conjunto finito de números linearmente independentes. Neste caso, considerando  $\Omega$  um número representado por uma função polinomial, devido à consideração 1) acima, enumera-se  $\Omega$  por um procedimento análogo ao descrito no parágrafo 1, a menos pela forma de combinar os  $v_i$ s. Também pela mesma razão indicada no parágrafo 1, a cada altura corresponde um número finito de  $\Omega$ 's, que estão sendo ordenados por ordem de valores crescentes.

3) Considere agora  $\Omega$  uma função polinomial e  $v_i$  é um conjunto infinito de termos linearmente independentes. Nesse caso não é possível enumerar ( $\Omega$ ) por um procedimento análogo ao descrito no parágrafo 1.

Isso ocorre porque não haveria maneira de passar da altura  $N = 1$  para  $N = 2$ , etc. Isto é, para  $N = 1$  teríamos  $\Omega_1 = v_1 \Omega_2 = v_2 \dots, \Omega_n = v_n, \dots$  e não chegará nunca o momento de passar para a altura  $N = 2$ , já que  $N = 1$  não esgota.

e no qual o grau das funções racionais, que servem para formar os números da categoria ( $\Omega$ ) é dado de antemão (Ver *Math. Annalen* de Clebsch E Neumann, v. III, p.497).

Berlin, 23 de dezembro de 1873

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destaca-se no artigo de 1874 de Cantor a caracterização dos números reais, conforme o tema em voga na época. Essa caracterização é feita através da comparação dos números reais com o conjunto dos números algébricos. O conjunto dos números reais é denominado “contínuo”, enquanto que o conjunto dos números algébricos recebe atualmente a denominação de ‘enumerável’ ou, como disse Cantor, um conjunto onde é possível estabelecer uma correspondência um a um com os números inteiros positivos e vice-versa (uma correspondência biunívoca entre os números e os números algébricos).

Claramente tal comparação indica que conjuntos infinitos podem ser distintos ‘quantitativamente’ uns dos outros, ou seja, o conjunto dos números reais, por exemplo, tem ‘mais’ elementos que o conjunto dos números algébricos que, por sua vez, tem tantos elementos quanto o conjunto dos números naturais. Além disso, Cantor enfatiza essa propriedade na parte final do artigo onde enuncia um teorema que afirma que o conjunto dos números que podem ser representados por funções de números linearmente independentes, ou seja, um conjunto ainda mais amplo que o conjunto dos números algébricos, não compreende ainda todos os números reais, pois contém também tantos elementos quanto os algébricos ou os naturais. A distinção entre os ‘tamanhos’ de conjuntos infinitos é a base da Teoria dos Números Transfinitos, teoria desenvolvida nos artigos de 1883, 1895 e 1897.

Existem evidências que indicam ser esta distinção entre conjuntos infinitos original, conforme indica o trecho da carta de Cantor a Dedekind, citado aqui no item 2, e todo o contexto da Matemática na época. Tal distinção não é absolutamente intuitiva e não poderia ser enunciada sem a definição rigorosa, e recém-elaborada, de números reais.

O texto de Cantor se apresenta de forma clara e matematicamente rigorosa. O uso de “procedimentos infinitos” se restringe ao infinito potencial e a única impossibilidade de proceder conforme indicado no artigo ocorreu em relação ao último teorema enunciado, para o caso de um conjunto infinito de números. Alguns textos que comentam esse artigo de 1874<sup>24</sup> não mencionam esse problema aqui identificado.

Não identificamos nesse artigo a demonstração da enumerabilidade dos números racionais, às vezes mencionada<sup>25</sup>. Na verdade, esse resultado está implícito no parágrafo 1, mas em nenhum momento é explicitado ou indicada qualquer intenção de estabelecê-lo ali.

---

24 \*JORDAIN, 1915, p.38-40. DAUBEN, 1983, p.115-116. DAUBEN, 1979, p. 48-53.

25 BOYER, 1974, p.414.DAUBEN, 1983, p. 116.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYER, C.** *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- CANTOR, G.** Sur une propriété du système de tous les nombres algebriques réels (1874). *Acta Mathematica*, v.2, p. 305-310, jun. 1883.
- \_\_\_\_\_. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v.77, p. 258-262, 1874.
- DAUBEN, J.** *Georg Cantor his mathematics and philosophy of the infinite*. Londres: Harvard, 1979.
- \_\_\_\_\_. George Cantor and the origins of transfinite set theory. *Scientific American*, v.248, n.6, p. 122-31, 1983.
- DECHEN, H., CABONIS, P. Cantor, G.** In: *Dictionary of scientific biography* (ed. Charles Coulston Gillispie). New York: Scribner's Sons, 1971. v.3, p.52-58
- GILBERT, P.** *Cours d'analyse infinitésimale*. Paris: Gauthier, 1878.
- JOURDAIN, P.** "Introduction" In: *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover, 1955, p. 1-82.
- LACROIX, S.** *Elements d'algèbre*. Paris: Gauthier, 1868.
- LEROY, F.** *Cours d'analyse et 'algèbre*. Paris: Flammarion, 1936.
- LIMA, E.** *Curso de análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 1980. v.1.
- MESCHKOWSKI, H.** *Probleme des Unendlichen*. Braunschweig: Vieweg, 1967.
- PASCAL, E.** *Repertorio di matematiche superiori*. Milão: Ulrico Hoepli, 1898. v.1.
- SMITH, D.** *A Source book in mathematics*. New York: Dover, 1959. v.1.
- VIANA, J.** *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro: Alves, 1892.

---

DENISE SILVA VILELA é Especialista em História da Ciência e Mestranda em filosofia, ambos pela Unicamp.  
Endereço: Rua Clóvis Bevilacqua 526/32A. Campinas, S.P. 13074-040

Revista da SBHC, n.10, p.85-94, 1993