LA MÉTHODE DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE DE *WILLIAM ROWAN HAMILTON* : PRÉDICTION ET DÉCOUVERTE DES RÉFRACTIONS CONIQUES

DOMINIQUE FLAMENT

RESUME : Dans le questionnement suivi depuis quelques années au sein de l'équipe REHSEIS sur les différents types d'applications propres aux mathématiques, l'analyse de l'œuvre de Hamilton se révèle très délicate.

Dans la partie publiée de son vivant, les applications sont extrêmement rares ; la situation est inverse dans les manuscrits (dont une partie seulement a vu le jour), les applications sont nombreuses et diversifiées.

Ainsi, nous nous trouvons confrontés à un autre choix, celui du mode d'application : retenir le calcul icosien inventé par lui en 1856, une préfiguration de la théorie des graphes, et son application en un jeu dérisoire ; l'Algèbre comme la "Science du Temps Pur" et les idées liées au passage d'une "foundation science" à une "suggesting science" ; la théorie des quaternions et leurs nombreuses incidences en physique ; les recherches sur l'éther lumineux et la "dynamics of darkness" ou "skotodynamics", qui bien que peu probante et vite délaissée par Hamilton, aura cependant quelques retombées significatives ; l'invention de l'hodographe qui devait permettre de décrire plus aisément les orbites planétaires ; ...

Le choix retenu ici s'inscrit dans le contexte de la "théorie des fonctions caractéristiques" et concerne un mode d'application exceptionnel : celui de la "prédiction", à partir d'une théorie "purement" mathématique, d'un phénomène physique alors jamais observé, la réfraction conique dans les cristaux biaxes.

1 - Introduction

"I hope that it may not be considered as unpardonable vanity or presumption on my part, if, as my own taste has always led me to feel a greater interest in methods than in results, so it is by METHODS, rather than any THEOREMS, which can be separately quoted, that I desire and hope to be remembered."

La théorie des fonctions caractéristiques constitue, à côté de la justification "arithmético-algébrique" des nombres imaginaires par des couples algébriques et la découverte paradoxale des quaternions qui s'en suivie, un des temps forts de la production originale et novatrice de Hamilton; elle constitue l'élément le plus illustratif d'une entreprise mathématique versée dans la recherche de méthodes générales, qui exclue *a priori* ouvertement les problèmes particuliers.

Lorsque l'on se restreint à la seule théorie des fonctions caractéristiques, la difficulté n'est pas complètement circonscrite, plusieurs types d'applications s'imposent encore à nous et qui mériteraient chacun une analyse plus spécifique : La théorie des aberrations et la conception pratique d'instruments optiques de révolution (le microscope, le télescope,...); "On the Application to Dynamics of a General Mathematical Method previously applied to Optics"(1834) donnant lieu à une dynamique mathématique initialement trop étroitement liée à l'optique[1]; The Method of Principal Relations, le problème des trois corps, les orbites presque circulaires (1836) et la Théorie de la lune[2] (1837); le problème de l'analogie entre optique et dynamique et, plus généralement, le formalisme hamiltonien et son utilisation.

Le type d'application dans l'œuvre de Hamilton qui nous semble le plus notable à cause de son caractère exceptionnel est la prédiction, à partir d'une théorie "purement" mathématique, d'un phénomène physique jamais observé. En effet, Hamilton à partir de sa théorie des fonctions caractéristiques appliquée à l'optique prédit, faisant siens l'hypothèse ondulatoire de la propagation de la lumière et les principes de Fresnel, l'existence des réfractions coniques interne et externe dans un cristal à deux axes; une prédiction qui sera peu après totalement confirmée par les expériences de H.Lloyd.

2 - UN APERÇU DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

A. Préliminaires: le principe de moindre action reconsidéré; l'optique mathématique.

> "Whether we adopt the Newtonian or the Huygenian, or any other physical theory, for the explanation of the laws that regulate the lines of luminous or visual communication, we may regard these laws themselves, and the properties and relations of these linear paths of light, as an important separate study, and as consisting a separate science, called often mathematical optics. This science of the laws and relations of luminous rays, is, however, itself a branch of another more general science, which may perhaps be called the Theory of Systems of Rays."[3]

Sans chercher à multiplier les exemples de l'imperfection de l'optique mathématique ou déductive, Hamilton invite à remonter à la source de l'imperfection, le manque d'une méthode générale, d'une idée fondamentale ("presiding idea") "qui guide et aide la déduction". Si une telle méthode générale existe en optique déductive, elle doit découler d'un principe ou d'une loi plus général. Hamilton propose un principe qu'il reconsidère entièrement, le principe connu sous le nom de Loi de moindre action.[4] Le problème général en optique sera pour lui la recherche de toutes les conséquences mathématiques de la loi de moindre action : une loi générale dans laquelle sont comprises toutes les conditions particulières de réflexion et de réfraction, graduelle et soudaine, ordinaire et extraordinaire.

Sa loi dite de l'action déterminée ["Law of Stationary action"] et celle qui en est déduite, qu'il appelle par analogie la loi de l'action variable [Law of varying action"], paraissent offrir une méthode "... telle qu'on peut la désirer (...), l'une de ces lois est en quelque sorte le dernier pas dans l'échelle ascendante d'induction pour la trajectoire linéaire de la lumière, tandis que l'autre peut être employée avec avantage comme le premier pas dans la voie descendante ou de déduction (...)"[5]

Dans cette reconsidération unificatrice de l'optique géométrique (on parlera par la suite, et plus encore dans le contexte "plus particulier" de la dynamique, de formalisation), outre l'évidente influence reconnue de Lagrange, les raisons profondes qui conduisirent Hamilton sur la piste de la fonction caractéristique restent obscures[6]. Il écrit peu à ce sujet : dans sa note On a View of Mathematical Optics l'invention de la fonction caractéristique (définie plus loin) est comparée à celle de la géométrie analytique de Descartes[7]. Cette découverte ne se fera qu'entre 1823 et 1827 : absente du mémoire On Caustics et des textes manuscrits connus de l'époque[8], une ébauche de la fonction caractéristique V se présente dans le premier texte sur la Theory of Systems of Rays (communiqué[9] en 1827).

C'est en 1832, dans le Third Supplement to an essay on the Theory of Systems of Rays, que se trouve l'exposé le plus complet de l'optique mathématique de Hamilton; une présentation très générale qui peut se suffire à elle-même.[10]

Dans son optique mathématique (dite encore optique algébrique ou Application of Analysis to Optics), dans la relation considérée par Hamilton,

> "les choses reliées sont généralement au nombre de huit .: ... six sont les éléments de position de deux points variables de l'espace, considérés comme visuellement reliés; le septième est un indice de couleur; le huitième, que j'appelle la FONCTION CARACTÉRISTIQUE - parce que je trouve que dans sa manière de dépendre des sept précédentes sont contenues toutes les propriétés du système - , est l'action entre les deux points variables; ..."[11]

A la "variation" de cette fonction caractéristique, qui correspond à des "variations infinitésimales" quelconques des positions dont elle dépend, est associée une formule fondamentale;

> "...je considère comme réductibles à l'étude de cette fonction caractéristique, au moyen de cette formule fondamentale, tous les problèmes de l'optique mathématique(...)"[12]

Ses recherches porteront essentiellement sur les conséquences de la loi de moindre action, sur les propriétés des systèmes optiques et sur les systèmes de rayons en général[13]

Le point initial se retrouve donc dans le Troisième Supplément sur un même plan que le point final, il devient lui aussi variable; et V, prise comme l'action intégrale

$$\int vds \text{ (ou chemin optique)}$$

entre les points initial et final, doit être maintenant considérée comme une fonction explicite des six coordonnées de ces points[14]. On peut également signaler que les fonctions W et T, nouvellement reconsidérée pour la première et définie pour la seconde, ne reçoivent pas dans ce texte d'interprétations géométriques explicites. Enfin, c'est à partir de l'apparition de l'indice chromatique que la théorie de la fonction caractéristique atteindra son plus haut degré de généralité.

Pour résumer ce à quoi parvient Hamilton dans la théorie générale de l'optique géométrique, disons qu'en traitant l'action optique entre deux points comme une fonction de ces points, et pas simplement comme un moyen de calculer les équations des rayons à partir du principe de moindre action (en fait, reconnaissent à juste titre les éditeurs de ses œuvres d'optique, en supposant courageusement que le problème variationnel avait été résolu et l'action trouvée), Hamilton était à même de présenter toute la théorie de l'optique géométrique sous une forme extrêmement concise; si concise, ajouteront plusieurs de ses commentateurs, que les applications apparaissaient comme pratiquement impossibles[15].

B. La formule fondamentale des systèmes optiques.

La méthode de Hamilton combine les principes du calcul des variations (récemment élaboré par Euler et complètement établi par Lagrange) et les principes qui régissent les équations aux dérivées partielles.

Soit $$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

l'élément de rayon parcouru par la lumière se propageant suivant la loi de moindre action ou de plus rapide propagation [16] avec une vitesse moléculaire[16] ou une lenteur ondulatoire [16] v.

Dans le cas général, v est fonction de la nature du milieu, de la position et de la direction de ds et de la couleur de la lumière : $v=v(x,y,z,\alpha,\beta,\delta,\chi)$, où x,y,z sont les coordonnées ou marques de position, $\alpha = \frac{dx}{ds}, \beta\frac{dy}{ds}, \gamma\frac{dz}{ds}$ les rapports différentiels ou cosinus de direction et χ l'indice chromatique ou mesure de couleur. Soit

$$\delta v = \frac{\delta v}{\delta x}\delta x + \frac{\delta v}{\delta y}\delta y + \frac{\delta v}{\delta z}\delta z + \frac{\delta v}{\delta \alpha}\delta\alpha + \frac{\delta v}{\delta \beta}\delta\beta + \frac{\delta v}{\delta \gamma}\delta\gamma + \frac{\delta v}{\delta \chi}\delta\chi$$

la "variation"[17] de la fonction v.

Si à l'aide de la relation $\partial^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, on détermine $\frac{\delta v}{\delta\alpha}, \frac{\delta v}{\delta\beta}, \frac{\delta v}{\delta\gamma}$, en sorte de satisfaire la condition $\alpha\frac{\delta v}{\delta\alpha} + \beta\frac{\delta v}{\delta\beta} + \gamma\frac{\delta v}{\delta\gamma} = v$ à savoir, en faisant de v une fonction homogène de "première dimension" par rapport à , on sait[18] alors que la "variation" de l'intégrale définie $V = \int vds$, c'est-à-dire la "variation" de l'action, ou du temps, pris par la lumière d'une couleur quelconque pour aller d'un point variable à un autre, est

$$\delta v = (\delta\int v ds =)\frac{\delta v}{\delta\alpha}\delta x - \frac{\delta v'}{\delta\alpha'}\delta x' + \frac{\delta v}{\delta\beta}\delta y - \frac{\delta v'}{\delta\beta'}\delta y' + \frac{\delta v}{\delta\gamma}\delta z - \frac{\delta v'}{\delta\gamma'}\delta z'. \qquad (A)$$

[Équation dite aussi Équation de la Fonction Caractéristique [19]]

Cette formule fondamentale "include the whole of mathematical optics".[20]

Selon Hamilton, le problème fondamental auquel se réduisent tous les autres problèmes de l'optique mathématique consiste en

> "...la détermination, pour n'importe quelle combinaison de milieux proposée, de la loi de dépendance des deux directions extrêmes d'un rayon courbe ou polygonal, ordinaire ou extraordinaire, avec les positions des deux points extrêmes qui sont visuellement liés par ce rayon, et la "couleur" de la lumière".[21]

Le problème trouve sa solution en utilisant la formule fondamentale (A); ou les six équations (B) suivantes en lesquelles se résout (A), et qui exprime la loi cherchée :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta x}=\frac{\delta v}{\delta\alpha}; \quad \frac{\delta V}{\delta y}=\frac{\delta v}{\delta\beta} \quad \frac{\delta V}{\delta z}=\frac{\delta v}{\delta\gamma}; \\ -\frac{\delta V}{\delta x'}=\frac{\delta v'}{\delta\alpha'}; \quad -\frac{\delta V}{\delta y'}=\frac{\delta v'}{\delta\beta'}; \quad -\frac{\delta V}{\delta z'}=\frac{\delta v'}{\delta\gamma'}; \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Hamilton poursuit alors en faisant remarquer que, quelque soit la nature du milieu final, c'est-à-dire quelque soit la relation de v avec la position, la direction et la couleur, on a supposé (lors de l'établissement de la formule générale (A)) que l'expression de cette dépendance a été préparée en sorte de rendre v homogène de "première dimension" relativement aux cosinus directeurs α, β, γ; par conséquent, les dérivées partielles $\frac{\delta v}{\delta\alpha}, \frac{\delta v}{\delta\beta}, \frac{\delta v}{\delta\gamma}$, de cette fonction homogène, sont homogènes, mais de "dimension zéro"; c'est-à-dire que ce sont des fonctions de $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$, qui, en général, renferment aussi les coordonnées x, y, z, et l'indice.

Faisant alors disparaître $\frac{\alpha}{\gamma}$ *et* $\frac{\beta}{\gamma}$ d'entre les trois premières équations (B), et $\frac{\alpha'}{\gamma'}$ *et* $\frac{\beta'}{\gamma'}$ d'entre les trois dernières équations de (B), Hamilton parvient à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, entre la fonction caractéristique V et les coordonnées et la couleur, suivantes[22] :

$$\left.\begin{aligned} 0&=\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x},\frac{\delta V}{\delta y},\frac{\delta V}{\delta z},x,y,z,\chi\right), \\ 0&=\Omega'\left(-\frac{\delta V}{\delta x'},-\frac{\delta V}{\delta y'},-\frac{\delta V}{\delta z'},x',y',z',\chi\right), \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Posant pour simplifier :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta x}=\sigma, \frac{\delta V}{\delta y}=\tau, \frac{\delta V}{\delta z}=v, \\ -\frac{\delta V}{\delta x'}=\sigma', -\frac{\delta V}{\delta y'}=\tau', -\frac{\delta V}{\delta z'}=v', \end{aligned}\right\} \qquad (D)[23]$$

les équations (C) s'écrivent alors sous la forme

$$\left.\begin{aligned} 0=\Omega(\sigma,\tau,v,x,y,z,\chi), \\ 0=\Omega'(\sigma',\tau',v',x',y',z',\chi). \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

Elles peuvent donc être obtenues, dit Hamilton, par différentiation et élimination, à partir de la seule fonction caractéristique V ; fonction qui, montrera-t-il par la suite, permet aussi de déterminer les formes de v et v', c'est-à-dire, les propriétés des milieux extrémités. Par conséquent, il montrait ainsi que le problème général de l'optique mathématique dont on vient de faire état pouvait se réduire à l'étude de la seule fonction caractéristique V.

C. Autres fonctions caractéristiques

Il introduira encore, pour simplifier ses calculs, des fonctions dites auxiliaires: on a vu que la formule (A) prenait la forme

$$\delta V = \sigma\delta x - \sigma'\delta x' + \tau\delta y - \tau'\delta y' + \nu\delta z - \nu'\delta z' + \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \qquad (A')$$

(utilisant pour se faire les définitions (D), et introduisant la variation de couleur χ; où x,y,z et x',y',z' sont, respectivement, les coordonnées finales et initiales d'un rayon); on a alors aussi les deux transformations générales suivantes :

$$\delta W = x\delta\sigma + y\delta\tau + z\delta\nu + x'\delta\sigma' + y'\delta\tau' + z'\delta\nu' - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \qquad (B')$$

et

$$\delta T = x\delta\sigma - x'\delta\sigma' + y\delta\tau - y'\delta\tau' + z\delta\nu - z'\delta\nu' - \frac{\delta V}{\delta\chi}\delta\chi, \qquad (C')$$

dans lesquelles[24]

$$W = -V + x\sigma + y\tau + z\nu, \qquad (D')$$

et

$$T = W - x'\sigma' - y'\tau' - z'\nu', \qquad (E')$$

D. De la théorie à la pratique

Hamilton mettra explicitement très peu l'accent sur la mise en pratique de sa théorie. Il a été largement répandu que le seul intérêt de Hamilton avait été dans l'élaboration de méthodes générales pour aborder les problèmes, non dans l'investigation des questions particulières; une façon de voir qui est très largement confirmée par les textes publiés. Hamilton, avait sans doute un esprit doué d'une excessive généralité, mais ses manuscrits, publiés ou non, montrent qu'il pouvait aussi appliquer ses théories les plus générales à des cas particuliers (certains d'entre d'eux seront publiés seulement en 1931 et en 1940 dans ses *Mathematical Papers*, d'autres restent encore manuscrits); les exemples d'applications abordés sont très nombreux.

Notre intention n'étant pas de faire l'inventaire, bien que nécessaire et urgent, de toute cette richesse laissée en grande partie pour compte, on se limitera tout simplement à en évoquer ici quelques aspects saillants : Hamilton peut être considéré à juste titre comme un des principaux artisans de la théorie des aberrations géométriques des systèmes optiques, les nombreuses études qu'il a consacré à celles-ci[25] (c'est principalement la fonction caractéristique T qui est concernée par ces recherches) témoignent de résultats qui devancent en grande partie ceux que l'on attribue ordinairement à Seidel[26]. La fonction auxiliaire T est considérée dans l'étude d'instruments d'optique de révolution; ainsi par exemple, Hamilton s'occupe du télescope[27] et du microscope, de combinaisons de lentilles[28] et consacre un volumineux mémoire à l'amélioration du "Double Achromatic Object Glass"[29]. Dans ses "*Optical investigations*" (1831)[30], on a, entre autres calculs significatifs, une approximation de l'équation aux dérivées partielles $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2=\mu^2$, et un développement de la fonction auxiliaire W.

Dans le but de faire apprécier toute la pertinence et le bien fondé du travail de Hamilton, Steward[31] proposera au début des années 1930 une méthode générale qui prendra totalement appui sur les fonctions caractéristiques. Son exposé, centré sur l'étude du système optique symétrique, prend plus spécifiquement en considération la fonction caractéristique auxiliaire T; il montre qu'on peut l'écrire sous la forme $T(\xi,\eta,\zeta)=u(\zeta)+F(\xi,\eta,\zeta)$, où z est une fonction linéaire des trois variables $\alpha 2+\beta 2$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'$, $\alpha'^2+\beta'^2$ (prises en raison de la symétrie axiale du système à la place des six cosinus antérieurs; les axes des z et des z' coïncident et sont pris pour axe de symétrie du système optique; la lumière est monochromatique). La fonction T incarne selon lui le comportement de n'importe quel système de rayons optiques passant par un système optique de révolution; la fonction $\Phi(\xi,\eta,\zeta)$ (l'aberration-function) résume toutes les aberrations d'un système symétrique.

Grâce au principe de la fonction caractéristique de nombreux résultats ont pu être obtenus. Certes ils concernent en grande partie on l'a vu les instruments optiques de révolution, mais, aux dires de Hamilton, ce principe est aussi applicable à chaque partie de l'optique mathématique, et peut être de l'optique physique; une fonction ainsi qu'une méthode analogues peuvent être introduites dans d'autres sciences, particulièrement en Astronomie dynamique.

L'application la plus étonnante, peut être la mieux connue de nos jours, concerne l'avènement de la mécanique hamiltonienne ou, plus généralement, du formalisme dit de Hamilton-Jacobi. Sans chercher à aller plus loin que la simple évocation, disons que Hamilton avec ses deux volumineux articles "On a General Method in dynamics" publiés en 1834 et 1835, calque son approche de la dynamique exactement sur celle de l'optique géométrique. On observe qu'il a bien l'intention en partant d'une "méthode générale mathématique" déjà construite, "appliquée" à l'optique (définissant ce faisant ce qu'il appelait l'optique mathématique), de l'"appliquer" à nouveau, cette fois à la dynamique; ce qui le conduira à la dynamique mathématique. En appliquant sa méthode à la dynamique, Hamilton sera amené à mettre en valeur une nouvelle fonction S, dite fonction principale. Cette fonction, plus spécifique à la dynamique et de forme plus générale, remplacera dans le mémoire de 1835 la fonction caractéristique V. Sa forme étant complètement connue, elle devait permettre, grâce à ses coefficients différentiels partiels, d'obtenir toutes les intégrales finales et intermédiaires des équations du mouvement. Le problème est donc la recherche de la fonction inconnue S à laquelle est réduite la dynamique mathématique. Hamilton se démarque de l'approche de Lagrange, en disant que la fonction de ce dernier "pose" le problème, alors que la sienne le "résoudrait"; la première sert à former les équations "différentielles", la seconde "donnerait" leurs "intégrales"[32]. Plus loin[33], il parlera de la "perfection pratique" de sa méthode, et que peu lui manque pour la rendre plus facile et plus rapide dans les applications[34].

Se référant à l'optique, James Southall[35] admet que, la fonction caractéristique d'un système étant connue, il est alors en théorie possible d'en déduire toutes les propriétés optiques du système; il reconnaît volontiers que dans certains cas comparativement simples, ce procédé nous permet d'obtenir les résultats avec une facilité presque magique. Cependant, bien que l'on puisse être naturellement fasciné par la généralité de cette méthode, il conçoit qu'elle est difficile à appliquer parce que renfermant selon lui "les théories de la géométrie analytique la plus élevée", et exige par conséquent un savoir et une adresse mathématiques peu communs.

On l'a vu[36], Lanczos relève des difficultés de même nature en dynamique, mais il observe aussi que la valeur philosophique de ces méthodes, la compréhension entièrement nouvelle qu'elles procurent pour les problèmes de mécanique les plus profonds, resteront sans écho, à l'exception d'un petit nombre de savants frappés par l'extraordinaire beauté des développements hamiltoniens (Jacobi, Helmholtz, Lie, Poincaré[37], De Broglie, Schrödinger, ...); un "monde entièrement nouveau au-delà des découvertes de Lagrange fut ouvert par les recherches de Hamilton. Les équations différentielles de Hamilton (du premier ordre, fonctions des coordonnées de position et des moments pris comme variables indépendantes) représentent la forme la plus simple et la plus attendue sous laquelle peuvent être mises les équations différentielles d'un problème variationnel" (d'où leur nom d'équations canoniques suivant lequel Hamilton et Jacobi les désignèrent; des équations qui feront leur "première apparition" dans le second mémoire On a General Method in dynamics)[38] .

A ces difficultés s'en ajoutaient d'autres en dynamique. En généralisant sa méthode optique à la dynamique, "by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function", faisant d'elle une sorte d'optique, en construisant la dynamique mathématique telle une branche de l'optique mathématique, Hamilton introduira des contraintes propres à l'optique, naturelles dans ce contexte, qui se révéleront être d'inutiles limitations ou complications en dynamique; c'est principalement grâce à Jacobi que la dynamique de Hamilton doit ne pas avoir connu le même sort que son optique.[39]

3 - Un type d'application : la prédiction des réfractions coniques

A. L'importance toute relative de cette révélation

Dans les deux premières pages qui servent d'introduction au Troisième Supplément de la théorie des systèmes de rayons[40], la part qui revient aux réfractions coniques est la plus importante.

Des principaux résultats, écrit-il, la théorie de la réfraction conique interne et externe, déduite par les méthodes générales des principes de Fresnel, "pourra probablement être considérée comme la moins indigne d'attention" (c'est précisément ce résultat théorique qu'il communique à l'Académie Royale d'Irlande le 22 octobre 1832).

C'est à la fin de ce même article qu'est présentée en quelques pages la découverte de la réfraction conique, un résultat qui a parfois été perçu comme le "point culminant" de sa théorie; cependant, selon le propre point de vue de Hamilton, cette découverte ne doit être regardée (aussi longtemps que la fonction caractéristique est concernée) que comme la simple application[41] d'une méthode purement mathématique. Malgré cette évidence scientifique *a posteriori* et de bon aloi, il est difficile de ne pas en faire état ici : ce résultat marginal de la théorie de Hamilton constitue un événement de première importance[42]; d'une part, parce qu'il s'agit en fait d'une admirable prédiction[43], et, d'autre part, d'un test qui devait permettre de convaincre les plus indécis en faveur de la théorie des ondulations. Les expériences menées par Humphrey Lloyd à la demande de Hamilton, "vérifieront" brillamment deux mois après avoir été énoncées les assertions théoriques de Hamilton et "sauveront" les principes de Fresnel.[44] Plus encore si on retient les propos excessifs de l'Abbé Moigno[45] :

> "Ces curieuses expériences ont été répétées partout à l'exception peut-être de la France, qui cependant devrait prendre d'autant plus d'intérêt à ces recherches qu'elles étaient le plus beau fleuron de la couronne de Fresnel. Il est triste de voir qu'au lieu de déposer généreusement les armes, les partisans du système de l'émission soient presque parvenus à oublier et à faire oublier une des plus belles conquêtes de la science moderne.
> (...) Si le système de l'émission est vrai, si la théorie de Fresnel est une chimère, la surface de l'onde est imaginaire; il n'existe pour elle ni point singulier, ni cône lieu géométrique d'une infinité de tangentes, ni plan tangent qui la rencontre suivant un cercle. Il sera absurde même de penser que le rayon émergent s'épanouisse suivant un cône dont les arêtes n'existent pas; la réfraction conique, en un mot, sera une absurdité; et cependant elle a été constatée, et l'épanouissement de lumière a été observé par tous ceux qui ont voulu le voir; donc le cône et le plan tangent sont des faits, donc la surface de l'onde est réelle, donc le système de l'émission est une assertion gratuite incompatible avec des phénomènes certains, donc le système des ondulations est seul vrai, et mérite seul d'occuper un esprit raisonnable."[46]

C'est en 1834 que Hamilton, Master Spirit aux yeux de ses collègues de la British Association, reçu la Cunningham Medal de la Royal Irish Academy et en 1835 la Royal Medal [47] de la Royal Society, en récompense de sa découverte de la Réfraction Conique, "one of the most remarkable scientific predictions that was ever made - one which announced, on the foundation of our mathematical calculation, a physical phenomenon which was suggested by no analogy, and seemed beyond the boudaries of probability".

Hamilton, déjà célèbre et reconnu parmi les plus grands mathématiciens de son époque, sera fait Chevalier par le Lord Lieutenant le 15 août 1835. Deux ans plus tard il deviendra Président de la Royal Irish Academy, poste à vie auquel il renoncera[48] en 1845. Humphrey Lloyd ne sera pas oublié : on l'invitera à donner la conférence générale de synthèse sur l'optique devant la British Association en 1834; peu après, il sera élu à la Royal Society de Londres et d'Edimburgh, il deviendra Provost du prestigieux Trinity College de Dublin et enfin sera lui aussi élu Président de la R.I.A. Autant de détails qui, si besoin en était, soulignent que cette découverte de 1832 constitua un événement d'une grande importance, tant historique que scientifique[49]. Dans leur *Principes d'Optique*[50] Max Born et Emil Wolf reconnaissent la valeur de la contribution hamiltonienne aux progrès de l'optique géométrique et n'hésitent pas à déclarer que cette découverte doit être reçue comme une importante déduction résultant de la construction de Fresnel; d'autres[51] encore parleront aussi de "classic vindication of the scientific method".

Si on se reporte aux différentes biographies de Hamilton, ainsi qu'aux manuscrits, on observe qu'au cours de ses années de collège, c'est-à-dire entre 1823 et 1827, il reçoit un enseignement et apprend l'optique principalement à partir des livres de Coddington, Wood et Stack (pour ne citer que les plus connus) : tous expliquent les phénomènes optiques au moyen de la théorie émissive. Hamilton n'explique pas clairement sa conversion, on sait que le mérite de son optique géométrique, un mérite qu'il souligne et qui fait une partie de son succès, est de ne pas présumer de la nature de la lumière (il le dit souvent, il n'a pas besoin de cette hypothèse); par la suite il développe des calculs qui mettent plus en avant l'aspect corpusculaire de la lumière; enfin dans le dernier supplément de sa théorie des systèmes de rayons, après avoir clairement fait jouer des rôles symétriques aux deux théories lumineuses (toujours dans le but de montrer la généralité de sa méthode), il manifeste beaucoup plus d'intérêt pour les principes développés par Young et Fresnel. En 1832 il est ouvertement un ondulationiste convaincu.

B. La démonstration [52] de Hamilton

Il reprend les hypothèses de Fresnel concernant l'éther, ainsi retient-il que l'on a affaire à un milieu incompressible, qui previent et resiste à toute vibration normale; les forces "tangentielles" ou transversales résultent de l'élasticité de l'éther combinée à cette resistance normale. De plus, le milieu éthéré présente trois élasticités inégales principales, qui correspondent aux déplacements dans les directions de trois axes d'élasticité rectangulaires. Hamilton prend dans un premier temps ceux-ci comme axes des coordonnées; ce faisant, un déplacement $\gamma l=(\delta x,\delta y,\delta z)$ produit une force élastique $-E\delta l=(-a^2\delta x,-b^2\delta y,-c^2\delta z)$ "which has not in general the same direction as the displacement dl, nor a direction exactly opposite to that." La lumière, polarisée dans un plan P, est supposée correspondre aux vibrations perpendiculaires à ce plan, et se propager sans changement de direction. Afin qu'une vibration puisse conserver sa direction, tandis que l'onde plane (ou wave-element) à laquelle elle appartient se propage avec une vitesse normale w, "it is necessary and sufficient" que la force élastique, une fois combinée à la resistance normale due à l'incompressibilité de l'éther, produise une force tangentielle $-\omega 2\delta l=(-\omega^2\delta x,-\omega^2\delta y,-\omega^2\delta z)$, dont la direction est opposée au déplacement δl.

On doit donc, observe-t-il, avoir les équations suivantes :

$$\frac{1}{\sigma}(\omega^2-a^2)\delta x=\frac{1}{\tau}(\omega^2-b^2)\delta y=\frac{1}{\nu}(\omega^2-c^2)\delta z \tag{1}$$

dans lesquelles sont les composantes de la lenteur normale[53]; de sorte que l'équation de l'onde élémentaire contenant la vibration transversale considérée est

$$\sigma\delta x+\tau\delta y+\nu\delta z=0 \tag{2}$$

"These equations... suffice in general to determine, on Fresnel's principles, the velocities of propagation and the planes of polarisation for any given wave-element in any known crystallised medium."[54].

On élimine ensuite dx, dy, dz, d'entre (1) et (3), pour obtenir une law of the normal velocity w (qui dépend de s, t, n) :

(3) $$\frac{\sigma^2}{\omega^2-a^2}+\frac{\tau^2}{\omega^2-b^2}+\frac{\nu^2}{\omega^2-c^2}=0$$

B1. Direction et vitesse d'un rayon pour une direction et une vitesse normales données, compatibles avec (3).

Hamilton part de l'identité[55]

(4) $$\omega^2=\frac{(\Omega+1)^2}{\sigma^2+\tau^2+\nu^2},$$

(où Ω est la forme considérée dans (E) ci-dessus (p.10)). Après avoir comparé la différentielle de Ω à la relation suivante (i.e. la condition d'homogénéité de la fonction du milieu final v, compte tenu de la définition (D) et des relations (B) précédentes),

$$v=\alpha\frac{\delta v}{\delta\alpha}+\beta\frac{\delta v}{\delta\beta}+\gamma\frac{\delta v}{\delta\gamma}=\alpha\sigma+\beta\tau+\gamma\nu \qquad [(G)]$$

et à sa différentielle,

$$\alpha\delta\sigma+\beta\delta\tau+\gamma\delta\nu=\frac{\delta v}{\delta x}\delta x+\frac{\delta v}{\delta y}\delta y+\frac{\delta v}{\delta z}\delta z+\frac{\delta v}{\delta\chi}\delta\chi \qquad [(H)]$$

il trouve[56]

$$\frac{\alpha}{v}=\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma},\frac{\beta}{v}=\frac{\delta\Omega}{\delta\tau},\frac{\gamma}{v}=\frac{\delta\Omega}{\delta\nu} \qquad [(I)]$$

et

$$-\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\delta\Omega}{\delta x},\quad -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta y}=\frac{\delta\Omega}{\delta y},\quad -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta z}=\frac{\delta\Omega}{\delta z},\quad -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta\chi}=\frac{\delta\Omega}{\delta\chi} \qquad [(K)]$$

De ces préliminaires résultent les relations suivantes pour les composantes de la vitesse du rayon

(5) $$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{v}=\dfrac{\delta\Omega}{\delta\sigma}=\dfrac{\sigma\omega^2}{\Omega+1}\dfrac{\lambda^2-a^2}{\omega^2-a^2},\\[2ex]\dfrac{\beta}{v}=\dfrac{\delta\Omega}{\delta\tau}=\dfrac{\tau\omega^2}{\Omega+1}\dfrac{\lambda^2-b^2}{\omega^2-b^2},\\[2ex]\dfrac{\gamma}{v}=\dfrac{\delta\Omega}{\delta\nu}=\dfrac{\nu\omega^2}{\Omega+1}\dfrac{\lambda^2-c^2}{\omega^2-c^2},\end{cases}$$

où

(6) $$\lambda^2=\frac{\left(\dfrac{a^2\sigma}{\omega^2-a^2}\right)^2+\left(\dfrac{b^2\tau}{\omega^2-b^2}\right)^2+\left(\dfrac{c^2\nu}{\omega^2-c^2}\right)^2}{\left(\dfrac{a\sigma}{\omega^2-a^2}\right)^2+\left(\dfrac{b\tau}{\omega^2-b^2}\right)^2+\left(\dfrac{c\nu}{\omega^2-c^2}\right)^2}.$$

B2. Law of the velocity 1/v du rayon en fonction de sa direction (i.e. en fonction des cosinus directeurs a,b,g,)

Suivant sa méthode, Hamilton fait disparaître d'entre les expressions (5) pour en déduire la relation entre les trois composantes de vitesse $\frac{\alpha}{v},\frac{\beta}{v},\frac{\gamma}{v}$; des équations (5), d'après (6), résultent

$$\frac{a^2\alpha^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{c^2\gamma^2}{\lambda^2-c^2}=0 \tag{7}$$

les équations (5) donnent aussi, considérant (3),

$$\left(\frac{\alpha}{v}\right)^2+\left(\frac{\beta}{v}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{v}\right)^2=\lambda^2; \tag{8}$$

ce faisant l est donc la vitesse du rayon, ou le rayon vecteur de l'onde unité ["unit-wave"] courbe, se propageant dans toutes les directions à partir de l'origine des coordonnées au cours d'une unité de temps. A la suite, des expressions (7) et (8), Hamilton déduira l'équation de l'onde en coordonnées rectangulaires x, y, z (parallèles aux axes d'élasticité a,b,c) :

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0. \tag{9}$$

Soit encore, faisant disparaître les fractions[57], l'expression

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\&-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(c^2+a^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0\end{aligned} \tag{10}$$

Au passage Hamilton n'hésitera pas à signaler que sa méthode pour déterminer l'équation des ondes de Fresnel paraît plus simple que celle proposée par l'illustre découvreur lui même, et plus simple que celles proposées depuis par d'autres savants. En fait, beaucoup plus tardivement, en 1841 il reconnaîtra[58] ne pas avoir eu connaissance d'une méthode publiée par Fresnel en 1827 dans son "Calcul très simple qui conduit de l'équation d'un ellipsoïde à celle de la surface des ondes".[59]

B3. (réciproque)*Vitesse et direction normales* en fonction de la *direction* et la *vitesse* d'un rayon compatibles avec cette forme de l'onde. (c'est-à-dire, pour α,β,γ,λ quelconques vérifiant la relation (7))

On remplace λ dans cette relation par sa valeur en (8), et on trouve (sachant que[60] $\frac{\delta v}{\delta\alpha}=\sigma,\frac{\delta v}{\delta\beta}=\tau,\frac{\delta v}{\delta\gamma}=\nu$)

$$\begin{cases}\sigma=\dfrac{\delta v}{\delta\alpha}=\dfrac{\alpha}{v}.\dfrac{1-a^2v^2}{\lambda^2-a^2},\\ \tau=\dfrac{\delta v}{\delta\beta}=\dfrac{\beta}{v}.\dfrac{1-b^2v^2}{\lambda^2-b^2},\\ \nu=\dfrac{\delta v}{\delta\gamma}=\dfrac{\gamma}{v}.\dfrac{1-c^2v^2}{\lambda^2-c^2},\end{cases} \tag{11}$$

où a été posé pour simplifier

$$v^2=\frac{\left(\frac{\alpha}{\lambda^2-a^2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\lambda^2-b^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\lambda^2-c^2}\right)^2}{\left(\frac{a\alpha}{\lambda^2-a^2}\right)^2+\left(\frac{b\beta}{\lambda^2-b^2}\right)^2+\left(\frac{c\gamma}{\lambda^2-c^2}\right)^2}. \tag{12}$$

La valeur de ν ainsi déterminée est la lenteur normale, ou l'inverse de ω, les expressions (11) conduisant, d'après (7), à la relation

(13) $$\sigma^2+\tau^2+\nu^2=V^2$$

les mêmes expressions donnant aussi, d'après (12),

(14) $$\frac{\sigma^2}{1-a^2\nu^2}+\frac{\tau^2}{1-b^2\nu^2}+\frac{\nu^2}{1-c^2\nu^2}=0$$

soit la loi (3) déduite de la forme de l'onde de Fresnel.

B4. Équation polaire de l'inverse du rayon vecteur de l'onde.

Hamilton reprend les équations (7) et (8), et obtient

(15) $$\begin{aligned}0&=\nu^4-\nu^2\{\alpha^2(b^{-2}+c^{-2})+\beta^2(c^{-2}+a^{-2})+\gamma^2(a^{-2}+b^{-2})\}\\&+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2b^{-2}c^{-2}+\beta^2c^{-2}a^{-2}+\gamma^2a^{-2}b^{-2}),\end{aligned}$$

d'où le carré de la lenteur ν :

(16) $$\begin{aligned}\nu^2&=\frac{1}{2}(c^{-2}+a^{-2})(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\&+\frac{1}{2}(c^{-2}-a^{-2})\{A'A''\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-A'^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-A''^2}\},\end{aligned}$$

avec, pour simplifier,

(17) $$\begin{cases}A'=\alpha\sqrt{\dfrac{b^{-2}-a^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}}+\gamma\sqrt{\dfrac{c^{-2}-b^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}},\\ A''=\alpha\sqrt{\dfrac{b^{-2}-a^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}}-\gamma\sqrt{\dfrac{c^{-2}-b^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}}.\end{cases}$$

Supposant a2> b2> c2, l'équation polaire de l'onde peut se mettre sous la forme

(18) $$\rho^{-2}=\frac{1}{2}(c^{-2}+a^{-2})+\frac{1}{2}(c^{-2}-a^{-2})\cos.((\rho\rho')\pm(\rho\rho'')),$$

où r est le rayon vecteur (ou vitesse) et ($\rho\rho'$) et ($\rho\rho''$) les angles que r fait avec deux rayons constants ρ', ρ'', déterminés par les cosinus suivants de leurs inclinaisons sur les demi-axes des x, y, z, ou des a, b, c (supposés pour l'instant confondus) :

(19) $$\rho'_a=\rho''_a=\sqrt{\frac{b^{-2}-a^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}},\ \rho'_b=\rho''_b=0,\ \rho_c=\rho''_c=\sqrt{\frac{c^{-2}-b^{-2}}{c^{-2}-a^{-2}}},$$

Hamilton, remarque à ce stade que rien de vraiment nouveau n'a été obtenu; la forme (18) n'est pas nouvelle on la retrouve dans l'œuvre de Fresnel; celui-ci a de plus observé qu'une telle expression donnait toujours lieu à deux vitesses distinctes, sauf lorsque la direction de ρ coïncide avec l'une des quatre directions $\pm\rho'$, $\pm\rho''$(deux-à-deux opposées et situées dans le plan ac); il a également montré que toute direction normale donnée correspond à deux vitesses normales distinctes, exception faite des quatre directions particulières, $\pm\omega'$, $\pm\omega''$, déterminées par les cosinus de direction suivants :

(20) $$\omega'_a=-\omega''_a=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ \omega'_b=\omega''_b=0,\ \omega'_c=\omega''_c=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}};$$

Hamilton donne aussi l'expression analogue à (18), pour la double valeur du carré de la vitesse normale :

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) + \frac{1}{2}(a^2 - c^2)\cos.((\omega\omega') \pm (\omega\omega'')), \tag{21}$$

qui ne peut se réduire à une seule valeur, sauf si ω coïncide[61] avec ω' ou ω'' .

B5. L'onde de Fresnel a quatre points coniques[62] (en les extrémités des Lines of Single Ray-Velocity) **et quatre cercles de contact**[63], **chacun contenu dans un plan tangent** (of Single Normal-Velocity)[64].

La première chose que fait Hamilton est de remarquer que les raisonnements précédents, qui supposent la coïncidence des axes de coordonnées et des axes d'élasticité, peuvent être étendus au cas plus général d'axes de coordonnées quelconques. Nous ne reviendrons pas sur cette observation, qui résulte de calculs développés par lui dans un précédent paragraphe[65] de son mémoire; précisons seulement, que Hamilton se limitera à considérer deux transformations remarquables qui conduisent selon lui à de nouvelles propriétés de l'onde de Fresnel et à de nouvelles conséquences de sa théorie.

Soit la forme suivante de l'équation polaire (18) :

$$1 = \frac{1}{2}(c^2 + a^{-2})\rho^2 + \frac{1}{2}(c^{-2} - a^{-2})\{r'r'' \pm \sqrt{\rho^2 - r'^2}\sqrt{\rho^2 - r''^2}\} \tag{22}$$

où

$$r' = A'\rho = x\rho_a' + z\rho_c' \quad , \quad r'' = A''\rho = x\rho_a'' + z\rho_c'', \tag{23}$$

(r' et r'' sont donc les projections de ρ sur ρ' et ρ''); prenant de nouvelles coordonnées rectangulaires $x_/, y_/, z_/$, de telle sorte que le plan $x_/z_/$ coïncide encore avec le plan ac des axes d'élasticité, mais que le demi-axe positif des $z_/$ coïncide avec ρ', on utilise alors les formules de transformation suivantes :

$$x = x_/\rho'_c + z_/\rho'_a \quad , \quad y = y_/ \quad , \quad z = -x_/\rho'_a + z_/\rho'_c \ , \tag{24}$$

elles donnent

$$\rho^2 = x_/^2 + y_/^2 + z_/^2 \ , \ r' = z_/ \ , \ r'' = x_/\sin.(\rho'\rho'') + z_/\cos.(\rho'\rho''). \tag{25}$$

L'équation d'onde (22) s'écrit alors

$$\begin{aligned} 1 = b^{-2}z_/^2 + \frac{1}{2}z_/x_/(c^{-2} - a^{-2})\sin.(\rho'\rho'') + \frac{1}{2}(c^{-2} + a^{-2})(x_/^2 + y_/^2) \\ \pm \frac{1}{2}(c^{-2} - a^{-2})\sqrt{x_/^2 + y_/^2}\sqrt{\{z_/\sin.(\rho'\rho'') - x_/\cos.(\rho'\rho'')\}^2 + y_/^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Grâce à elle on peut plus facilement examiner la forme de l'onde au voisinage de l'extrémité du rayon ρ', c'est-à-dire, au voisinage du point dont les nouvelles coordonnées sont

$$x_/ = 0 \quad , \quad y_/ = 0 \quad , \quad z_/ = 0\,; \tag{27}$$

en effet, elle prend au voisinage de ce point la forme approchée

$$z_/ = b - \frac{1}{2}b^2\sqrt{c^{-2} - b^{-2}}\sqrt{b^{-2} - b^{-2}}(x_/ \pm \sqrt{x_/^2 + y_/^2}), \tag{28}$$

qui montre qu'en ce point l'onde a un point conique, et est touchée non par un seul plan tangent déterminé, mais par un cône tangent du second degré d'équation (28).

Pour Hamilton, il s'agit d'un résultat nouveau (bien qu'il ait été déjà en partie observé par Airy; cf. plus haut, note 37) qui semble avoir complètement échappé à la sagacité de Fresnel; en effet, ce dernier, pensait qu'en l'extrémité de ρ' l'onde était simplement touchée par deux lignes droites, contenues dans le plan ac (celui que l'on a retenu depuis le début), c'est-à-dire, par les tangentes à un cercle et une ellipse, les intersections de l'onde avec ce plan (cf. fig. 1) : mais, reconnaît-il, "il est évident" d'après la transformation précédente que toute autre section de l'onde, faite par un plan contenant ρ', est touchée, en l'extrémité de ce rayon, par deux lignes tangentes, situées sur le cône (28).

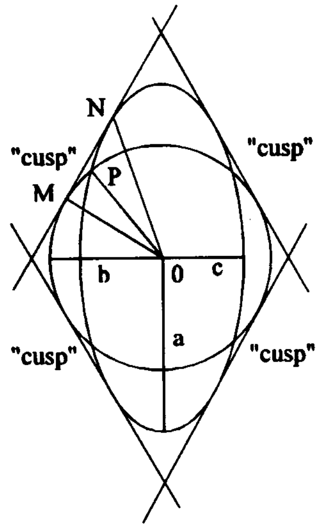


Fig.1

Il est "évident" aussi qu'il n'y a que quatre[66] tels points coniques (en les extrémités des quatre lines of single ray-velocity, ±ρ', ±ρ"). Ces points sont déterminés par les coordonnées suivantes (rapportées aux axes d'élasticité a, b, c),

(29) $$x = \pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = \pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}};$$

ce sont les quatre intersections du cercle et de l'ellipse de Fresnel, dans le plan ac, dont les équations dans ce plan sont :

(30) $$x^2 + z^2 = b^2 \quad , \quad a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2.$$

Si, par un calcul analogue au précédent, on utilise cette fois les formules de transformation suivantes :

(31) $$x = x_{//}\omega_c' + z_{//}\omega_a' \quad , \quad y = y_{//} \quad , \quad z = -x_{//}\omega_a' + z_{//}\omega_c'$$

le nouveau système de coordonnées rectangulaires étant tel que le plan x// z// coïncide avec le plan ac, et le demi-axe positif des z// avec ω' (line of single normal velocity), se présente alors une nouvelle équation d'onde sous la forme

(32) $$(x_{//}^2 + y_{//}^2 + x_{//}z_{//}b^{-2}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2})^2 = Q(1 - z_{//}^2 b^{-2}),$$

où pour simplifier a été posé

(33) $$Q = (a^2+c^2)\rho^2 + (a^2-c^2)r'r'' - a^2c^2(1 + z_{//}^2 b^{-2}),$$

ce faisant, il est donc "facile" de démontrer que le plan

$$z_{//} = b, \tag{34}$$

"which is perpendicular to the line w' at its extremity, touches the wave in the whole extent of a circle"[67], dont l'équation est :

$$x_{//}^2 + y_{//}^2 + x_{//}b^{-1}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2} = 0 \tag{35}$$

Hamilton en conclut :"it is evident that there are four such circles of contact at the ends of the four lines $\pm\omega$ ', $\pm$ ω, of single normal-velocity."[67]; tous égaux entre eux, ils ont $b^{-1}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}$ pour grandeur commune de leurs diamètres.[68]

Ces cercles de contact, pour les mêmes raisons liées aux points coniques, ne furent pas relevés par Fresnel(une situation paradoxale qui mériterait une analyse précise). Ce sont précisément ceux-ci et les points coniques qui amenèrent Hamilton à prédire l'existence des réfractions coniques interne et externe dans les cristaux biaxes.

B6. Nouvelles conséquences des principes de Fresnel. Dans un cristal de "sufficient Biaxal Energy"[69] il est possible de mettre en valeur deux sortes de réfraction conique, l'une interne, l'autre externe; au Cusp-Ray correspond un cône de rayons externe; à la Normal of Circular Contact correspond un cône de rayons interne

Hamilton reconsidère, pour le réflexion ou la réfraction, ordinaire ou extraordinaire, les formules générales déduites de sa fonction caractéristique V ; elles se réduisent à

$$\Delta\sigma = 0 \ , \ \Delta\tau = 0 \ , \tag{36}$$

lorsque l'on prend pour plan xy le plan tangent à la surface de réflexion ou de réfraction; grâce à elles, on voit que les composantes de lenteur normale parallèles à ce plan tangent restent inchangées; un résultat qui, aux yeux de Hamilton, constitue une nouvelle forme générale pour les lois de réflexion et de réfraction.

Il est "facile", dit-il, combinant ce théorème général avec la loi de vitesse de Fresnel, de déduire de nouvelles conséquences pour les cristaux à deux axes. Hamilton, pour se faire, exprime le théorème sous la forme suivante[70] :

$$0 = \Delta\left(a_1\frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_1\frac{\delta v}{\delta\beta} + c_1\frac{\delta v}{\delta\gamma}\right), \tag{37}$$

Pour calculer la réfraction de la lumière provenant du vide à son entrée dans le cristal, limité par une face plane, on désigne par les cosinus des inclinaisons du rayon extérieur ou incident sur deux lignes rectangulaires s, t de la face considérée, et sur la normale intérieure; on aura alors les deux équations de réfraction suivantes (la vitesse de la lumière dans le vide étant égale à 1)

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_s\frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_s\frac{\delta v}{\delta\beta} + c_s\frac{\delta v}{\delta\gamma}(=\sigma a_s + \tau b_s + v c_s), \\ \beta_0 = a_1\frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_1\frac{\delta v}{\delta\beta} + c_1\frac{\delta v}{\delta\gamma}(=\sigma a_1 + \tau b_1 + v c1); \end{cases} \tag{38}$$

elles renferment les relations voulues entre α_0, β_0, γ_0, et α, β, γ, c'est-à-dire, entre les directions extérieure et intérieure. Ce faisant, on trouve en général deux rayons incidents pour un rayon réfracté, et deux rayons réfractés pour un rayon incident; en effet, à un système donné de valeurs de α, β, γ, c'est-à-dire, à une direction donnée du rayon intérieur, correspondent en général deux systèmes de valeurs des composantes intérieures σ,τ,v et donc deux systèmes de valeurs α_0, β_0, γ_0, soit deux directions extérieures; tandis que, réciproquement, à un système donné de deux relations linéaires entre σ,τ,v, déduit par (38) d'une direction extérieure donnée, correspondent en général deux directions du rayon intérieur.

On peut compléter cette situation classique, reconnaît Hamilton, et c'est là un nouvel élément original de sa contribution, en relevant l'existence de "two remarkable exceptions, connected with the two sets of lines of single velocity, and with the conoidal cusps and circles of contact on Fresnel's Wave."[71] On a vu qu'en un point conique le plan tangent à l'onde était indéterminé, il est donc "évident" qu'un ray-cusp doit correspondre à une infinité de systèmes de composantes σ,τ,ν, à l'intérieur d'un cristal à deux axes, et ce faisant correspondre aussi à une infinité de systèmes de cosinus directeurs $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$, du rayon extérieur; d'où, conclut-il, "this one internal cusp-ray must correspond to an internal cone of rays, according to a new theoretical law of light, which may be called EXTERNAL CONICAL REFRACTION."

De plus, l'onde a un plan tangent commun à tous les points d'un cercle de contact, et donc la infinité de rayons intérieurs qui correspondent à ces points ont en commun une normal of circular contact (cf. ci-dessus, note 61). Tous ces rayons intérieurs ont en commun à l'intérieur du cristal un système de composantes σ,τ,ν, et donc correspondent à un seul rayon extérieur commun; d'où "this one external ray is connected with an internal cone of rays, according to an another new theoretical law of light, which may be called INTERNAL CONICAL REFRACTION."

Soit encore, plus explicitement :

Cas de la réfraction conique externe : équation du cône extérieur.

L'équation (28), dans le système de coordonnées x/, y/, z/, donne pour un "rayon voisin" l'expression suivante de la lenteur ondulatoire[72] v :

(39) $$\nu = b^{-1}\gamma_{\prime} + r_{\prime}(\alpha_{\prime} \pm \sqrt{\alpha_{\prime}^2 + \beta_{\prime}^2}),$$

où

(40) $$r_{\prime} = \frac{1}{2} b\sqrt{c^{-2} - b^{-2}}\sqrt{b^{-2} - a^{-2}};$$

elle donne par conséquent, "d'après notre méthode générale", dit-il, les composantes suivantes (dans le même système coordonné x/, y/, z/,) de la lenteur normale :

(41) $$\begin{cases} \sigma\rho_c' - \nu\rho_a' = \sigma_{\prime} = \dfrac{\delta\nu}{\delta\alpha_{\prime}} = r_{\prime} \pm \dfrac{r_{\prime}\alpha_{\prime}}{\sqrt{\alpha_{\prime}^2 + \beta_{\prime}^2}}, \\ \sigma = \tau_{\prime} = \dfrac{\delta\nu}{\delta\beta_{\prime}} = \pm \dfrac{r_{\prime}\beta_{\prime}}{\sqrt{\alpha_{\prime}^2 + \beta_{\prime}^2}}, \\ \sigma\rho_a' + \nu\rho_c' = \nu_{\prime} = \dfrac{\delta\nu}{\delta\gamma_{\prime}} = b^{-1}, \end{cases}$$

les expressions de σ/, et τ/ "becoming indefinitely more accurate as α, β, diminish, that is, as the near internal ray approaches to the cusp-ray"[73] (l'expression de v/ étant "rigoureuse") :

"the relations between the components of normal slowness σ,τ,ν, of the cusp-ray ρ'[73] sont par conséquent

(42) $$(\sigma\rho_c' - \nu\rho_a')^2 + \tau^2 = 2r_{\prime}(\sigma\rho_c' - \nu\rho_a') \ , \ \sigma\rho_a' + \nu\rho_c' = b^{-1},$$

et "the equation (in α0, β0) of the external cone of rays corresponding to the one internal cusp-ray ρ' is to be found by eliminating these three internal components σ,τ,ν between the two relations [(42)] and the two equations of refraction [(38)]."[74]

Un exemple déterminant.

Si le cusp-ray ρ' intérieur coïncide avec la normale intérieure de la face de réfraction du cristal, prenant à la place de s et t sur cette face, la projection de a et le demi-axe d'élasticité b, les équations de réfraction (38) deviennent alors

(43) $$\alpha_0 = \sigma\rho_c' - \nu\rho_a' \quad , \quad \beta_0 = \tau,$$

d'où, d'après (42), l'équation polaire du cône extérieur suivante :

(44) $$\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 2r_/\alpha_0.$$

En coordonnées rectangulaires, on obtient l'équation du quatrième degré

(45) $$(x_0^2 + y_0^2)^2 = 4r_/x_0^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

Hamilton admet que ce cône[74] est presque circulaire dans tous les cristaux biaxes connus, le coefficient r/ étant "petit", d'après (40), lorsque l'énergie biaxe est faible[75]; "rigoureusement", rajoute-t-il, le cône extérieur (45) rencontre la sphère concentrique de rayon unité en une courbe contenue sur un cylindre de rayon = r/ , un côté de ce cylindre coïncidant avec un rayon du cône.

Cas de la réfraction conique interne : équation du cône intérieur.

L'équation du cône intérieur correspondant à la normal of circular contact ', est toujours, d'après (34) et (35),

(46) $$x_{//}^2 + y_{//}^2 + 2r_{//}x_{//}z_{//} = 0, \quad si \quad r_{//} = \frac{1}{2}b^{-2}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2},$$

en les coordonnées rectangulaires x//, y//, z//, (d'après la transformation (31)); suivant les coordonnées rectangulaires "plus simples" x, y, z, parallèles aux axes d'élasticité, l'équation du cône devient

(47) $$(x\omega_c' - z\omega_a')^2 + y^2 + 2r_{//}(x\omega_c' - z\omega_a')(x\omega_a' + z\omega_c') = 0,$$

dans laquelle les coordonnées x, y, z peuvent être remplacées par les cosinus directeurs d'un rayon intérieur du cône; le rayon extérieur correspondant étant déterminé par les cosinus directeurs suivants :

(48) $$\alpha_0 = b^{-1}\omega_s' \quad , \quad \beta_0 = b^{-1}\omega_t'.$$

Il est par conséquent "évident" que, si le cône intérieur rencontre une nouvelle face plane, émergera un cylindre (que les deux faces soient parallèles ou non, i.e., que le cristal soit une lame ou un prisme).

C. La justification expérimentale de Humphrey Lloyd

Contrairement à ce que l'on aurait tendance à croire trop facilement, Hamilton ne délègue pas complètement à Lloyd la vérification expérimentale de sa prédiction théorique. Au cours des mois qui suivront cette annonce, il sera constamment en correspondance avec lui et parfois même ira jusqu'à lui proposer des idées d'expérience à réaliser. C'est ainsi qu'il propose à Lloyd les calculs et les déterminations pour un cristal biaxe d'aragonite[76] dont se sert ce dernier, et lui fait les remarques suivantes[77] :

> "Might it not be taken as a useful guide in a course of experiments such as we have been projecting, that when light from a luminous point L in the interior or on the surface of a plate of the optic axis i, i', falls in this plane as in a plane of internal incidence on, the several points of the corresponding linear section of the

second surface of the plate, the emergent rays are all in the plane of the optic axes (represented by the plane of the paper) except those which belong to the two emergent cones for the two interior rays i, i'?

Thus if a narrow slit only were left open by a piece of card on the face of emergence in the plane of the optic axes, for red light (which is not always the same as the plane for violet)... according to Fresnel's own results from his own theory : but according to my results from the same theory of Fresnel... This should perhaps be the easiest way of all of my theoretical conclusion respecting the conical refraction. I hope you received my letter about the aragonite..."

Lloyd lui fera part des nombreuses difficultés rencontrées; dans une lettre datée du 6 novembre 1832 il reconnaît avoir essayé de nombreuses méthodes pratiques, qu'une a retenu son attention, mais que les résultats ne sont pas très convainquants :

"so ... both ordinary and extraordinary ray (of same point) got together without sensible separation - I must repeat the experiment however in another way - and I have prepared too to try the matter in the method proposed in your note of yesterday"[78]

Dans une autre lettre[79], on constate que la principale difficulté est la mauvaise qualité de l'échantillon de cristal que possède Lloyd :"... I fear it would be wholly impossible to obtain experimentally any decisive result connected with your theoretical conclusion, without better means than I have at present at my disposal..."

C'est le 14 Décembre 1832, après avoir obtenu de Dollond[80] (sans doute un des meilleurs fournisseurs de l'époque) un cristal d'aragonite de très grande qualité, qu'il peut enfin rassurer Hamilton dans une courte note :

"I write this line to say that I have found the cone; at least almost no doubt on the subject but must still verify it by different methods of observation. I have no time to say more at present than that I observed it in a fine specimen of aragonite, which I received from Dollond in London."[81]

On observe, par l'ampleur de cette correspondance (14 lettres en près de deux mois), que la réfraction conique est d'une grande importance pour ces deux savants; bien que Hamilton reconnaisse par la suite le côté marginal de cette découverte, il n'en reste pas moins préoccupé par sa mise en valeur expérimentale. Cet événement aura son importance, une fois la confirmation expérimentale acquise par Lloyd, Hamilton en fera part très vite à Herschel et Airy. Dans sa lettre du 19 décembre 1832, il écrit, tout en manifestant un certain recul par rapport à toute l'affaire :

"I am very glad to find your note of yesterday that you are so vigourously and succesfully pursuing your experiments.

I on my part am at work reading and thinking on the dynamics of Light and on other connected subjects. Since I saw you yesterday, I wrote to Herschel, and Airy, and mentionned that in seeking to verify my theoretical conclusions respecting conical refraction you had discovered a new and curious class of optical phenomena."[82]

Dans sa lettre du 18 décembre 1832 à Herschel, dont il a fait parvenir une copie à Airy et à Lloyd, il annonce que le Professeur Lloyd a lu devant la L'Académie Royale d'Irlande un article, "On the Phenomena presented by Light in its Passage along the Axes of Biaxal Crystals", dans lequel il rend compte de récentes expériences supplémentaires qui confirment ses theoretical conclusions concernant la réfraction conique. Des conclusions qui, rappelle-t-il, sont pour l'essentiel les suivantes :

"Ist. A single plane wave within a biaxial crystal parallel to a circular section of the Surface of elasticity, corresponds in general to an infinite number of internal ray-directions; in such a manner that a single incident ray in air will give an internal cone of rays (of the second degree) and will emerge (from a plane face) as an external cylinder of rays if the external incident wave have that direction which corresponds to the foregoing internal wave.

In this kind of internal conical refraction, one refracted ray of the cone is determined by the ordinary law of the sines, using the mean index 1/b; and the greatest angular deviation in the cone from this ray is in the plane of the optic axes and is

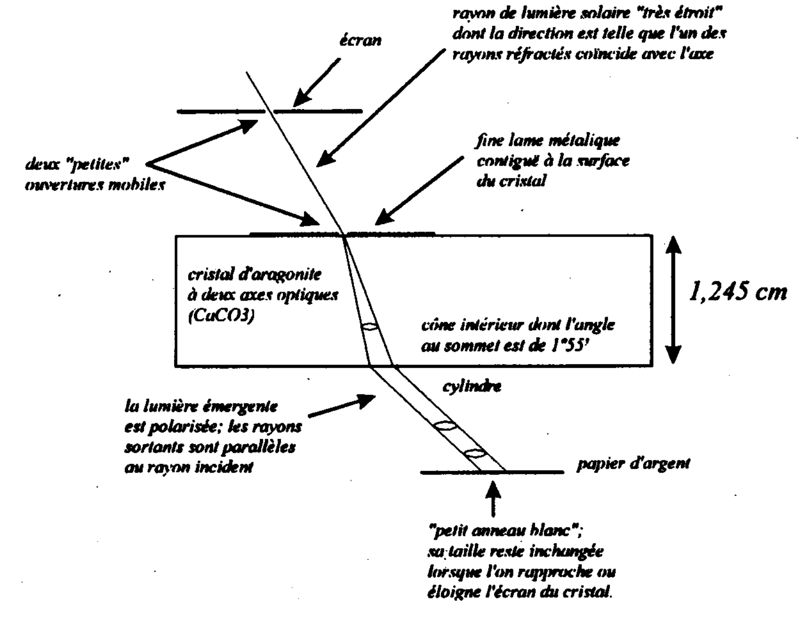
$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{b^2} = 1^{\circ}55'$$

for ray E in aragonite, if we use Rudberg's elements. (...)
IInd. I concluded also from Fresnel's principles that a single internal cusp-ray ...ought, on emerging into air, to undergo, not bifurcation as Fresnel thought but (external) conical refraction. If the internal incidence be perpendicular, the equation in rectangular coordinates of the emergent cone may be put under the form

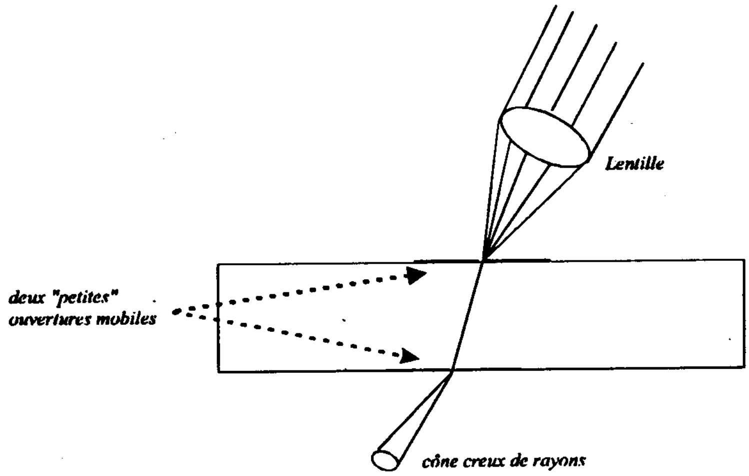
$$\frac{x^2+y^2}{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{abc} = Sin2^{\circ}57$$

for a ray E, with Rudberg's elements for aragonite; this cone, therefore, is of the fourth degree (whereas the internal cone was of the second);(...)"[83]

Il termine sa lettre en insistant sur la qualité des résultats expérimentaux de Lloyd," which appear to agree sufficiently with the theory, as to the position and magnitude and polarisation of the emergent cone in the external conical refraction", et en faisant valoir que "the experimental establisment of these new consequences from Fresnel's principles, must, I think, be considered as interesting."
D'autres lettres suivront encore sur la réfraction conique[84] au cours du mois de février 1833 .



Réfraction conique interne



Réfraction conique externe

4 - En guise de conclusion.

On peut souligner que Hamilton, d'une certaine manière, renforcera plus tardivement la relation déjà étroite entre sa théorie des fonctions caractéristiques et la découverte, via les principes de Fresnel, des réfractions coniques. Sans doute confronté au caractère artificiel en plusieurs endroits de sa démonstration, aux questions qui viennent naturellement à l'esprit à propos du caractère "intuitif" de certains passages (en particulier ceux, essentiels, qui le conduisent à concevoir l'existence de points coniques et de cercles de contact sur la surface d'onde), Hamilton ressentira la nécessité d'éclairer sa procédure démonstrative (dans les trois dernières pages de son article). Ainsi découvre-t-on que les points coniques et les cercles de contact de la surface d'onde doivent leur origine à une autre surface, appelée par lui Surface of components of normal slowness ou, plus simplement, Surface of components [85]. On l'a vu au cours de la première partie de cet exposé (cf. la formule (C), par exemple), $\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x},\frac{\delta V}{\delta y},\frac{\delta V}{\delta z}\right)=0$ est l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire, dans un milieu uniforme, la fonction caractéristique V; on conçoit par conséquent assez facilement que Hamilton soit parfaitement informé des propriétés géométriques de la surface en question, en particulier il observera que la dite surface possède quatre points coniques (une observation faite au cours de recherches théoriques portant sur les aberrations des lentilles à deux axes) et quatre cercles de contact. Sachant d'autre part que, d'après la théorie générale des surfaces réciproques, "a conoidal cusp on any surface A corresponds in general to a curve of plane contact on the reciprocal surface B and reciprocally"[86], il en déduisait facilement le résultat escompté, le rôle de A étant joué par la Surface of components, celui de B par la Surface de Fresnel, celle-ci se déduisant de celle-là en remplaçant a, b, c, respectivement par 1/a, 1/b, 1/c. [87]

Au cours de ce texte, on observe que la découverte des réfractions coniques, malgré leur caractère très marginal déclaré d'alors (bien réel aujourd'hui), fut un événement très riche et d'un impact notable dans le débat sur la nature de la lumière; un tel événement se révélât décisif : la plupart des savants se tournèrent plus résolument vers l'hypothèse ondulatoire et rejetèrent, parfois avec réticence, l'hypothèse émissive héritée de Newton.

NOTES

1"Is my hope and purpose to remodel the whole of Dynamics, in the most extensive sense of the Word, by the idea of my Characteristic Function or Central law of relation; not indeed that I pretend to do more than to distinctly sketch a plan by which this great task may be accomplished." [Lettre du 12 mars 1834 de Hamilton à son Oncle James].

2 "My hope is that a nearly perfect theory of the Moon be obtained by my Method..." [Lettre du 18 octobre 1837 de Hamilton à J.W. Lubbock (cf.Math. Papers (of), vol. 2, p.275)].

3 "On a general method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function", Dublin University Review, 1833, p.795-826 [cf.Math. Papers (of), vol.2 (1940), 311-332]; la traduction en français "Sur une méthode générale pour exprimer les trajectoires de la lumière et des planètes, au moyen de coefficients d'une fonction caractéristique" due à Quetelet, n'a jamais été du goût de Hamilton qui lui fit savoir. Les critiques de Hamilton semblent avoir été vaines. Ces précisions sont données ici uniquement pour faire valoir que les expressions françaises, d'époque, retenues ici dans notre texte ne sont pas nécessairement celles que Hamilton eût préférées [Correspondance Math. et Phys., 8 (Ed. Quetelet), 1834, p.69-89; 201-211.].

4 A propos de ce principe, on peut rappeler ce que Hamilton écrit :

"1. Principle of least action.

If light be a material substance..., and if moreover the forces which act upon it are not sensible except at insensible distances, il follows from the principles of mechanics that it must satisfy the law of least action; that is, it must move in such a manner that the definite integral $\int v dp$ in which v is the velocity, and dr the element of the path, may have its variation nothing, the limits being fixed. It is true that the physical resonings which I have been employed to prove this important Theorem of Optics involve too much hypothesis to be completely satisfactory in our incertainty about the nature of Light; but its complete agreement with experiment when suitable suppositions are made about the velocity of Light, ... warrants its introduction into Natural Philosophy : and having rested its proof ultimately upon experiment, we may consider it as the fundamental theorem of Optics; which is in that Science what D'Alembert's principle is in Dynamics or the principle of virtual velocities in the Theory of Equilibrium.(...)" [d'après un manuscrit daté de 1825 (TCD. Ms. 1492, n° 11)].

Plus tard, dans "On a general method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function" (Dublin University Review, October 1833, 795-826; cf. Math. Papers, I, p.311-332), Hamilton précise son point de vue: " ... it appears that if a general method in deductive optics can be attained at all, it must flow from some law or principle, itself of highest generality, and among the highest results of induction. What, then, may we consider as the highest and most general axiom, (in the Baconian sens) to which optical induction has attained, respecting the rules and conditions of the lines of visual and luminous communication? The answer, I think, must be, the principle or law, called usually the Law of Least Action; suggested by questionable views, but established on the widest induction, and embracing every known combination of media, and every straight, or bent, or curved line, ordinary or extraordinary, along which light (whatever light may be) extends its influence successively in space and time... From this Law, then, which may, perhaps, be named the LAW OF STATIONARY ACTION, it seems that we may most fitly and with best hope set out, in the synthetic or deductive process, and in the search of a mathematical method. Accordingly, from this known law of least or stationary action, I deduced long since another connected and coextensive principle, which may be called, by analogy, the LAW OF VARYING ACTION, and which seems to offer naturally a method such as we are seeking..."[Ibid. p. 316].

Après avoir rappelé les positions de ses prédécesseurs à l'égard du "Principe de Moindre action" (entre autres, de Fermat, Descartes, Huygens, Maupertuis, Euler, Lagrange et Laplace), il fera observer que :

"In mathematical language, the integral called action, instead of being always a minimum, is often a maximum; and often it is neither the one nor the other : though it has always a certain stationary property, ... We cannot, therefore, suppose the economy of this quantity to have been designed in the divine idea of the universe; though a simplicity of some high kind may be believed to be included in that idea. And though we may retain the name of action to denote the stationary integral to which it has become appropriated - which we may do without adopting either the metaphysical or (in optics) the physical opinions that first suggested the name - yet we ought not (I think) to retain the epithet least : but rather to adopt the alteration proposed above, and to speak, in mechanics and in optics, of the Law of Stationary Action." [ibid. p.318]

(En ce qui concerne le vocabulaire, lorsque l'on se reporte au texte ci-dessus, dans la traduction donnée par Hamilton publiée dans la Correspondance Mathématique et Physique, 8 (1834), pp. 69-89, 200-211, de Quetelet, on peut lire (cf, p.71, par ex.) plutôt des expressions telles que "Loi de l'action déterminée " et "Loi de l'action variable " (en lieu et place des expressions, proposées par exemple par Dugas dans son article "Sur la pensée dynamique de Hamilton : origines optiques et prolongements modernes" [Rev. Scie., 79 (1940), 15-23], loi de l'action stationnaire et loi de l'action variée, respectivement).

La loi générale de l'action déterminée, en optique, est alors énoncée de la façon suivante par Hamilton :

"The optical quantity called action, for any luminous path having i points of sudden bending by reflexion or refraction, and having therefore i+1 separate branches, is the sum of i+1 separare integrals,

$$Action = V = \sum \int dV^{(r)} = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \ldots + V^{(r)} + \ldots + V^{(i+1)},$$

of which each is determined by an equation of the form

$$V^{(r)} = \int dV^{(r)} = \int v^{(r)} \sqrt{dx^{(r)2} + dy^{(r)2} + dz^{(r)2}},$$

the coefficient $v^{(r)}$ of the element of the path, in the r th medium, depending, in the most general case, on the optical properties of that medium, and on the position, direction, and colour of the element, according to rules discovered by experience, and such, for example, that if the r th medium be ordinary, $v^{(r)}$ is the index of that medium; so that $dV^{(r)}$ is always a homogeneous function of the first dimension of the differentials $dx^{(r)}$, $dy^{(r)}$, $dz^{(r)}$, which may also involve the undifferentiated coordinates $x^{(r)}$, $y^{(r)}$, $z^{(r)}$, themselves, ..." (Ibid., p. 324)

Jacobi aussi, à la suite de Hamilton, se fera le défenseur du nouveau principe de moindre action, voir par exemple ce qu'il en dit dans sa "Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique" [CR de l'Acad. des Sci. de Paris, t. V, p. 61-67; Gesammelte Werke, Bd 4, p.131-136] :"Je crois que l'on doit regarder le principe de la moindre action comme l'un des plus importants de la mécanique.(...)" Après avoir fait état du rôle central joué par ce principe dans l'avènement de la mécanique analytique dans les premiers travaux du jeune Lagrange, et souligné que "celui des vitesses virtuelles n'[avait] été appelé qu'après coup pour les démonstrations méthodiques dans des travaux postérieurs", il se demande alors "pourquoi donc la mécanique analytique, fille ingrate, a-t-elle voulu accuser d'inutile principe de la moindre action ? Si les travaux de M. Hamilton... ajoutent essentiellement à la mécanique analytique, c'est encore à ce principe qu'on en sera redevable.", et plus loin d'ajouter: "M. Hamilton a eu soin d'en donner un énoncé rigoureux (...).

Pour conclure cette longue note, disons simplement, en guise de résumé, que La moindre action de Maupertuis, se transforme chez Lagrange en se débarassant de ses références téléologiques et métaphysiques, et devient avec Hamilton un "principe variationnel" qui par la suite, s'appelera le Principe de Moindre Action de Hamilton ou Principe de Hamilton [Schrödinger, et d'autres, emploient parfois aussi l'expression Hamiltonsche Variations-prinzip].

5 Ibid., p. 71.

6 On lit, dans une lettre à Samuel Taylor : "My aim has been, not to discover new phenomena, nor to improve the construction of optical instruments, but with the help of the Differential or Fluxional Calculus to remold the geometry of Light by establishing one uniforme method for the solution of all the problems in that science, deduced from the contemplation of one central or characteristic relation... my chief desire and direct aim being to introduce harmony and unity into the contemplation and reasonings of Optics, considered as a portion of pure Science. It has not even been necessary, for the formation of my general method, that I should adopt any particular opinion respecting the nature of Light." Le but de Hamilton est assez clair, réduire tout le contenu de l'optique géométrique à un énoncé le plus économique et le plus mathématiquement général possible. Dès 1826, il observe que sa méthode marcherait non seulement pour l'optique mais également pour la mécanique. En 1834, quand cette extension à la dynamique est consommée, il fait observer là encore que son propos est plus du domaine de l'esthétique que de la seule pratique : "Even if it should be thought that no practical facility is gained, yet an intellectual pleasure may result from the reduction of the most complex ...researches respecting forces and motions of body, the unfolding of one central relation."

7Une comparaison qui est, par exemple, développée dans les articles cités dans la note 1. Ainsi, par exemple écrit-il (Ibid., p.206) : "Si je ne me trompe, cette méthode est destinée à influer aussi puissamment sur les progrès de l'optique que la méthode des coordonnées sur ceux de la géométrie analytique."

8 Cette affirmation momentanée s'appuie sur les recherches des éditeurs des œuvres optiques de Hamilton, sur celles de Th. Hankins et sur les notres effectuées dans le Manuscripts Departement du Trinity College de Dublin et dans les archives de la Royal Irish Academy.

9 "Theory of Systems of Rays. First Part "(comm. 1827), Trans. R. I. A., 15 (1828),p. 69-174. (Cf. en particulier les paragraphes 19 et 20). C'est en effet dans la partie IV., intitulée "Classification of Systems of Rays", que Hamilton propose sa première fonction caractéristique : elle est définie après une démonstration du "théorème de Malus. En fait l'énoncé donné par Malus est restreint au cas d'une seule réflexion ou réfraction; ce n'est qu'après les travaux de Dupin [Applications de Géométrie (Paris, 1822, pp.195-197)], Quetelet [Correspondance mathématique et physique, 1 (1825), pp.147-149] et de Gergonne [Annales de Mathématiques, 16 (1826), p.307] que le théorème sera formulé dans le cas général. Par conséquent, avant que Hamilton ne s'en occupe, ce théorème est déjà totalement établi.

10 Cet article doit être considéré comme la version complète et achevée de la théorie optique de Hamilton. Le point de vue exposé est le plus étendu grâce, entre autre, à la prise en compte de la position et de la direction initiales du rayon, de ses position et direction finales, et à l'introduction d'un indice chromatique ou mesure de couleur. Les milieux considérés sont anisotropes et, dans le cas le plus général, hétérogènes. Des fonctions V,W et T sont définies en toute généralité : la première est encore appelée fonction caractéristique, alors que les deux autres sont dites fonctions auxiliaires. Plus tard, vers 1895, dans une apparente ignorance des travaux antérieurs de Hamilton, cette fonction caractéristique sera retrouvée et appelée fonction eikonale par H. Bruns, il atteindra son but en suivant un chemin inverse de celui de Hamilton en allant de la "mécanique hamiltonienne" à l'optique géométrique. Ce sont les travaux de Bruns qui attirèrent l'attention d'un Schrödinger (c'est après coup qu'il prend connaissance des travaux de Hamilton) ou d'un De Broglie, et qui remirent au goût du jour les premiers écrits optiques de Hamilton et, en particuler, son analogie formelle complète existant entre l'optique géométrique et la dynamique newtonienne des corpuscules [Cf. De Broglie, L. Matière et lumière, A. Michel, Paris, p. 215. Au passage, l'auteur expose les difficultés qui empêchèrent Hamilton d'aller au-delà d'une simple analogie formelle. Voir Bruns, H. "Das Eikonal", Abhand. Math.-Phys. Cl. K. Sächs. Ges. Wiss, 21 (1895), pp. 323-436); voir également Klein, F. "Über das Brunssche Eikonal"; Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 46,(1901)(ou Gesammelte Mathematische Abhandlungen., vol. II, art. LXXI, p.603-606.].Plus récemment, on retrouve ces fonctions sous les dénominations, respectives, "point characteristic","mixed characteristic" et "angle characteristic", admirablement présentées par Guillemin, V. et Sternberg, S. dans la remarquable introduction de leurs Symplectic techniques in Physics (Cambridge University Press, 1984).

A celà s'ajoute la considération d'équations aux dérivées partielles = 0 et = 0 satisfaites par V dans les milieux initial et final, respectivement. Hamilton montre encore que les méthodes mathématiques développées par lui s'appliquent aussi bien à la théorie des ondulations qu'à la théorie de l'émission. Son article s'achève en revenant sur la théorie de Fresnel et sa surface d'onde, et par de nouvelles formules fondées sur la dite théorie pour les vitesses et les polaristions d'une onde plane; poursuivant son étude, Hamilton en déduira de nouvelles propriétés de l'onde de Fresnel, une nouvelle description génératrice de nouvelles conséquences, d'où découleront les réfractions coniques interne et externe.

11 "On a View of Mathematical Optics", British Association Report (1831-2), 545-547.

12 D'emblée, Hamilton limitera ses propos et restreindra son étude : "On n'essaie pas ici d'inclure des recherches concernant les phénomènes d'interférence, encore qu'il soit facile de percevoir, en partant de la nature de la quantité que j'ai appellée la fonction caractéristique, et qui dans l'hypothèse des ondulations est le temps de propagation de la lumière d'un point variable à l'autre, que l'étude de cette fonction doit être utile aussi dans de telles recherches [Cf. à ce propos Steward,"On Aberration Diffraction Effects", Phil. Trans. Roy. Soc. A, 225 (1925), p.131-198].

13 Précision apportée uniquement pour rappeler ses travaux sur les congruences de droites (voir à ce propos son article, beaucoup plus géométrique qu'optique, On Caustics (1824) qui resta manuscrit jusqu'en 1931, et qui fut considéré par Hamilton comme une ébauche de son mémoire sur la Théorie des Systèmes de Rayons. Dans les faits ses deux écrits sont très distincts : le premier s'occupe des propriétés des congruences de droites en général, pas nécessairement normales; un très vif intérêt est porté aux singularités de ces congruences (Soulignons au passage que Monge, avec ses "Applications de l'analyse à la géométrie, constitua la principale source d'inspiration de cette œuvre). Le second écrit fait prévaloir le point de vue optique, la fonction caractéristique fait son apparition et joue un rôle essentiel].

14 Par conséquent, alors que précédemment une fonction V caractérisait une congruence traversant un milieu optique, ici une seule fonction V donnera une complète caractérisation d'un système de milieux optiques par rapport à tous les rayons possibles pouvant le traverser. On peut dire que dans le Troisième Supplément la théorie de la fonction caractéristique a gagné en puissance et en généralité. Auparavant, le point lumineux source avait toujours été considéré fixe : au cours de toutes les recherches développées dans les précédents travaux, ses coordonnées ne furent jamais prises explicitement en considération (par exemple, dans les fonctions V et W).

15Synge, dans son article "Hamilton's Method in Geometrical Optics" [J. Optical Soc. of America, 27 (1937), p.75-82 & 138-144], rappelle que la fonction caractéristique V, du point de vue théorique, était excellente; mais son calcul présentait, pour un instrument donné, des difficultés insurmontables. Il est d'accord avec Herzeberger [cf. J;, Opt. Soc. Am., 26 (1936), 177-178] pour dire que : "...personne n'a réussi jusqu'à présent, sauf dans le cas d'un miroir plan, à trouver cette fonction hamiltonienne pour un système optique donné"; Herzeberger ajoute : "seuls quelques scientifiques, par exemple, Maxwell, Rayleigh, Clausius et Larmor, ont développé des problèmes optiques par la méthode de Hamilton..." (C'est peut être là une manière de souligner que cette méthode n'a pas vraiment complètement disparu de la circulation!). Selon Lanczos (The variational principles of mechanics. University of Toronto Press (1949), cf. chap. VIII "The partial differential equation of Hamilton-Jacobi"), du point de vue pratique peu a été gagné : la solution d'une e.d.p. - même d'une seule, n'est pas une chose aisée, et dans beaucoup de cas n'est pas aussi simple que le problème d'intégration initial. Les problèmes qui peuvent être explicitement résolus au moyen de l'e.d.p. sont, dans la majorité des cas, les mêmes problèmes qui peuvent aussi être résolus par d'autres moyens. Ce qui l'amène à conclure assez rapidement que, pour cette raison, les méthodes hamiltoniennes furent longtemps considérées comme d'un intérêt purement mathématique et de peu d'importance pratique. L'avis de Hertz n'est pas complètement de cette nature, en fait les propositions hamiltoniennes sont déconsidérées ou refusées, sinon à peine tolérées, parce qu'elles n'apportent qu'un concours purement mathématique, dépourvu de toute explication ou signification physique; la méthode de Hamilton reste une méthode mathématique, pas une théorie physique [Cf. Hertz, H. The Principles of Mechanics presented in a new Form réed. Dover, 1956].

Aux dires de Steward ("On the Optical Writings of Sir William Rowan Hamilton", Gazette, 16 (1932), p.179-191.) : "Il est certain que la fonction caractéristique de Hamilton offre de très loin la méthode la plus sûre et la plus facile à utiliser, résumant, comme il se doit, dans sa forme, toutes les aberrations géométriques et leurs propriétés, et donnant de plus le temps de propagation de la perturbation optique."

Cependant, à l'instar d'autres commentateurs, il parle aussi de la principale charge qui a été retenue contre l'utilisation des fonctions de Hamilton : elles étaient à cause de leur grande généralité d'aucune valeur pratique, une complexité encore plus remarquée dans leurs formes particulières une fois qu'elles étaient appliquées à un système optique donné.

16 "Swifest propagation"; "molecular velocity"; "undulatory slowness"

17 Nous conservons toujours, sauf avis contraire, les notations de Hamilton.

18 D'après le Premier Supplément.

19 Une expression que semble préférer Hamilton à d'autres, sans doute parce qu'elle écarte toute référence explicite à la nature de la lumière. Dans les notations de Hamilton, les quantités accentuées, telles que v', α', β', γ', ..., sont les quantités initiales; ce choix s'explique assez simplement après avoir observé que dans les textes précédents la source lumineuse, ou point initial, était fixe.

20 Ibid., p. 168.

21 i.e. la détermination de la loi de dépendance des cosinus directeurs extrémités $\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$, avec les coordonnées des extrémités x,y,z,x',y',z', et avec l'indice chromatique χ.

22 De celles-ci, il déduit l'équation générale suivante, du second ordre et du troisième degré, commune à toutes les combinaisons optiques,

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta z'}+\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta x'}+\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta y'}$$
$$=\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y'}+\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta y'}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta x'}+\frac{\delta^2 V}{\delta z \delta z'}\frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x'}\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y'}.$$

(qui exprime que le Jacobien $\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)\Big/\partial(x',y',z')$ *ou* $\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x'},\frac{\partial V}{\partial y'},\frac{\partial V}{\partial z'}\right)\Big/\partial(x,y,z)$ s'annule, compte tenu de (C) (Cf. Third

Supplement, note *, p.170).

23 Les coefficients différentiels partiels de la fonction caractéristique V par rapport aux variables x,y,z, sont très souvent utlisées au cours de ses différents travaux d'optique; pour simplifier, Hamilton introduira dans ce dernier Supplément ces nouvelles notations, dont il montrera à la fin de son mémoire qu'elles désignent, dans le cas de la théorie des ondulations, les composantes de la lenteur normale de propagation d'une onde.

24 On peut encore rappeler que dans les deux derniers Suppléments, la quantité W était considérée comme une fonction des cosinus directeurs finaux α,β,γ, le milieu final étant considéré uniforme, et l'origine lumineuse et la "couleur" comme données. Dans le Troisième Supplément, une vue plus générale est prise concernant la fonction auxiliaire W : elle dépendra, d'après (B'), pour toute combinaison optique, des sept quantités σ, τ, ν, x', y', z', χ); de la même manière la nouvelle fonction auxiliaire T, dépendra, d'après la transformation (C'), des sept quantités σ, τ, ν, σ', τ', ν', χ . Les formes des fonctions W et T dépendent l'une de l'autre et de la fonction caractéristique V, par des relations dont la connaissance se révèle importante pour la théorie des systèmes optiques. Rappelons aussi, que les fonctions W et T, définies par Hamilton pour le cas général de milieux hétérogènes anisotropes, furent indépendamment redécouvertes (pour les milieux isotropes homogènes) par Bruns. par la suite, K. Schwarzschild [Abhand. K. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 4 (1905-6), 1-54], informé du travail de Hamilton, considéra plus avant la méthode dans l'étude des aberrations des instruments optiques de révolution (il utilise comme notation E pour désigner l'Eikonal V, et -V ou -W à la place de la fonction T, qu'il appellera laWinkeleikonal).

25 Cf. par exemple le manuscrit "The aberrations of an optical instrument of revolution" (1833?, Note Book 28, 39-53, Math. Papers, I, 376-382; cet intitulé est donné par les éditeurs), dans lequel on trouve une analyse assez précise sur trois des principaux défauts fondamentaux : l'aberration sphérique, la coma et l'astigmatisme; seuls les défauts de courbure et de distorsion ne semblent pas avoir été abordés. Dans l'article "On some results of the View of a Characteristic Function in Optics", il se réfère plus exclusivement aux aberrations sphériques, dans le cas d'un instrument optique de révolution; considérant la forme $T=\alpha x+\beta y+\gamma z-\alpha' x'-\beta' y'-\gamma' z'-V$, qui dépend de la "couleur" et des trois quantités $\alpha^2+\beta^2, \alpha\alpha'+\beta\beta', \alpha'^2+\beta'^2$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha=\dfrac{\delta V}{\delta x},\beta=\dfrac{\delta V}{\delta y},\gamma=\dfrac{\delta V}{\delta z},\\ \textit{ou}\\ \alpha'=-\dfrac{\delta V}{\delta x'},\beta'=\dfrac{\delta V}{\delta y'},\gamma=\dfrac{\delta V}{\delta z'}\end{array}\right\}\ (1),$$

α,β,γ sont cosinus finaux et α',β',γ', les cosinus initiaux, des inclinaisons de la trajectoire qui relie le point x',y',z' au point x,y,z, sur les demi-axes positifs des coordonnées), il se ramène à une expression approchée de la forme$T=T^{(0)}+T^{(2)}+T^{(4)}$, dans laquelle $T^{(0)}$ est indépendant des inclinaisons, $T^{(2)}$ est petit, du 2e ordre, si ces inclinaisons sont petites, et est de la forme $T^{(2)}=P(\alpha^2+\beta^2)+P/(\alpha\alpha'+\beta\beta')+P'(\alpha'^2+\beta'^2)$, et $T^{(4)}$ est petit, du 4e ordre, et de la forme

$$T^{(4)}=Q(\alpha^2+\beta^2)+Q_{/}(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\alpha'+\beta\beta')+Q'(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)$$
$$+Q_{//}(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2+Q_{/}'(\alpha\alpha'+\beta\beta')(\alpha'^2+\beta'^2)+Q''(\alpha'^2+\beta'^2)^2$$

Les neuf coefficients P, P/ ,P',Q,Q/,Q', Q//,Q/,Q'', étant constants, ou fonctions de la seule "couleur". Les propriétés optiques de l'instrument, "à un haut degré d'approximation", dépendent de ces neuf coefficients et de leurs "variations chromatiques"; les trois premiers coefficients P, P/ ,P', qui entrent dans le terme T(2) sont ceux dont dépendent les longueurs focales, les pouvoirs grossissants et les aberrations chromatiques. Les aberrations sphériques (pour des rayons droits ou inclinés, à partir d'un objet pas trop éloigné de l'axe) dépendent des six autres coefficients, Q,Q/,Q', Q//,Q/,Q'', dans l'expression du terme T(4) (Hamilton appelle ses six coefficients, les six constantes d'aberrations radicales). Il fera observer (p. 300) que "cette théorie des aberrations des rayons obliques, pour un instrument optique de révolution, peut avoir des applications pratiques. Car l'arrangement des rayons finaux avec le rayon central de leur système, et l'intensité des deux foyers principaux, peut sans doute affecter notre vue, et avoir une influence appréciable sur la performance pratique d'un instrument.". Plus loin, il dit encore dans un style impersonnel, "si les propriétés mathématiques qu'il a pu déterminer théoriquement, dans l'arrangement et les aberrations d'un système, se révélaient avoir dans la pratique une quelconque influence sensible sur les phénomènes de la vision oblique, il deviendrait nécessaire de modifier certaines des lois reçues pour la construction des télescopes et microscopes... une nouvelle voie semble ouverte aux opticiens-mathématiciens et aux praticiens." (C'est nous qui soulignons)

26 Cf. aussi l'article de Rayleigh, J.W., "Hamilton's Principle and the five Aberrations of von Seidel", Phil. Mag. (6) 15 (1908), 677-687. Seidel ne semble pas avoir eut connaissance des manuscrits de Hamilton; la seule aberration étudiée par Hamilton dans ses articles publiés est l'aberration sphérique.

27 "The auxiliary function T for telescope, when the axis of eye-piece is not coincident with, but parallel to, that of object glass" (22 mai 1833, Note Book 28, p.17, 19 Back; cf. Math. Papers, I, 367-8 (le type de calcul exposé n'est pas un simple exercice, il intéresse aussi les concepteurs d'instruments qui le sollicitent)]. Remarquons encore que Hamilton ne donne pas dans ses articles publiés d'indication sur le fait qu'il s'était beaucoup occupé des problèmes théoriques et pratiques concernant la réalisation d'instruments d'optique (bien qu'à plusieurs reprises il déclare que le calcul de la fonction T pour un instrument donné constitue un problème fondamental; il donna cependant, au paragraphe 11 de son Troisième Supplément un bref résumé de la méthode à suivre). Dans une lettre adressée au Professeur Phillips (23 décembre 1843) on peut lire "... the construction of your new telescope on a plan suggested by me" [cf.Math. Papers, 1, p. 383].

28 "The auxiliary function T for two thin lenses close together in vacuo, and for a single thin lens in vacuo" (1833) [Note Book, 28, p.29-39, Back; Math. Papers, I,]. Dans l'article "On the Focal lengths and Aberrations of a thin lens of Uniaxal Crystal, bounded by Surfaces which are of Revolution about its axes", Phil. Mag., 19 (1841), 289-294 [Math. Papers, I, 336-341], Hamilton utilise la fonction T pour déterminer l'aberration longitudinale de la lentille, pour des rayons restreints à un plan.

29 Un article qui date de 1844, mais qui ne sera publié qu'en 1931 (Math. Papers, I, 387-460).

30 Un manuscrit également très volumineux [Note Book 324, il s'agit de recherches d'optique commencées le 2 février 1831, qui sont, écrit-il dans le premier feuillet, "designed partly as materials for a Third Supplement to my Essay"] dont seules quelques pages ont été publiées (Cf. Math. Papers, I, p.364-366).

31 Dans son article "On the optical writings of Sir W.R. Hamilton" [Mathematical Gazette, 16 (1932), 179-191.). On peut rappeler ici quelques uns de ses commentaires, notamment qu'il il dénonce le fait que depuis quelques années (on est en 1931-2), sauf très récemment, l'optique géométrique n'a que très peu intéressé; le principal résultat de cette situation est le "lamentable... divorce entre théorie optique et pratique optique", aigu par exemple dans le problème de la réalisation du système optique symétrique. Il dénonce la carence de l'optique géométrique à l'université et va même jusqu'à parler d'"abandon" dans certains cas; son intention est donc de changer les choses, et par conséquent il choisit de faire observer une nouvelle fois la profondeur et l'étendue des généralisations auxquelles était parvenu Hamilton.

32 Cf. "Sur l'application à la dynamique d'une méthode générale mathématique préalablement appliquée à l'optique". [B. A. Report, 1834, p.513-518; Math. Papers, II (Dynamics), 1940, p.212-216], p.4.

33 Ibid.,p.5.

34 Une pratique déjà éprouvée dans le manuscrit, "Problem of three bodies with my characteristic function" (1833), qui ne sera publié qu'en 1940 [Cf. Note Book 29; Math. Papers, II, 1-102], et poursuivie dans des manuscrits tels que "On nearly circular orbits" (1836) [Note Book 42; Math. Papers, II, p.217-237] et "Theory of the moon" (1837) [Note Book 48; Math. Papers, II, 238-248].

35 James P. C. Southall The principles and methods of geometrical optics; especially as applied to the theory of optical instruments. New York, The Macmillan Company, 1913.) (Cf. en particulier, le chapitre II)

36 Cf. Note 15 ci-dessus.

37 Ainsi, par exemple, Jerzy Giedymin, dans son ouvrage Science and Convention : Essays on Henri Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition (Oxford, Pergamon Press 1982), estime que la méthode de Hamilton influença non seulement la recherche de Poincaré en physique mathématique et en astronomie, mais aussi ses vues sur la structure et le statut epistémologique des théories physiques aussi bien que ses vues sur la rationalité du changement scientifique, en bref sa théorie de la connaissance scientifique (le conventionalisme); il s'agit là dans point de vue encore sujet à débat.

38 Cayley, dans son "Report on the recent progress of theoretical dynamics"[British Association Reports, (1857), p.1-42], confiait que ces mémoires de Hamilton ouvraient une seconde période dans l'histoire de la dynamique théorique.

39Tout en reconnaissant son indiscutable valeur, Jacobi formulera lui-même plusieurs critiques (pas toujours pertinentes comme le fera observer par la suite Cayley) à l'encontre de la méthode de Hamilton. On peut convenir sans retenue qu'il fera plus que "sauver" la dynamique de Hamilton, il la simplifiera, la généralisera et lui donnera la forme classique qui nous est aujourd'hui familière sous le nom de théorie de Hamilton-Jacobi [Dans un article à paraître, "Orígenes Opticos de la Dinámica de William Rowan Hamilton", nous abordons plus amplement ces différents aspects.]

40 Deux dates de lecture sont proposées : le 23 janvier 1832 et le 22 octobre 1832; c'est la seconde qui compte vraiment pour nous, celle où Hamilton fera état de la réfraction conique. Cet article sera publié tardivement dans les Transactions of the Royal

Irish Academy, [vol. 17, part. I (1837), 1-144; ce qui devait permettre à Hamilton de faire de nombreux ajouts et corrections Ainsi, par exemple, il fait état dans son article de la polarisation conique (on la suppose donc présentée au plus tard le 22 octobre 1832, la seconde date de lecture, alors qu'en fait elle est plus tardive et due à Lloyd, auquel Hamilton ne se réfère pas. Cet épisode est abordé par G. Sarton dans son article "Discovery of Conical Refraction by William Rowan Hamilton and Humphrey Lloyd (1833)",ISIS , n°. 17 (1932),154-170]; dans le même volume sont présents deux autres articles, l'un de H. Lloyd, "On the Phenomena presented by Light in its Passage along the Axes of Biaxal Crystals" (pp. 145-157, lu le 28 janvier 1833) [qui reprend, sous le même titre, de façon très détaillée les résultats de ses écrits publiés dans les numéros de février et mars 1833 du The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science (pp.112-120 et pp. 207-210), portant sur les expériences qui devaient confirmer les propositions théoriques de Hamilton], l'autre de MacCullagh, "Geometrical Propositions applied to the Wave Theory of Light" (pp. 241-263, lu le 21 juin 1833) [mis au courant des expériences de Lloyd, il aurait employé ses propres méthodes géométriques pour confirmer les résultats de Hamilton concernant l'existence des "points coniques" et des "cercles de contact" de l'onde de Fresnel à partir desquels Hamilton supposera l'existence d'une réfraction conique. Mais, MacCullagh ne serait pas parvenu, bien qu'il en fût très près, aux conclusions de Hamilton (contrairement à ce que laissera d'ailleurs entendre ce dernier), Hamilton par exemple lui expliquera qu'il avait établi une relation entre ces "cusps" et "cercles de contact" de l'onde de Fresnel et les "cercles de contact" et "cusps" de même nature d'une autre surface découverte par A. L. Cauchy ["Mémoire sur la surface caractéristique correspodante à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, et sur la surface des ondes", cf.Œuvres, 2nde série, t. XII, 113-124. En fait l'approche de Hamilton est très voisine de celle de Cauchy, parfois aux notations près coïncidante; on peut aussi, pour un constat de même nature, se reporter au mémoire "Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle à la théorie de la lumière" (1830),Œuvres, 2nde série, t. IX, 390-450. A cet égard, l'ouvrage d'A. Dahan, Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole Française (A. Blanchard, 1992), et en particulier le chapitre XIII concernant les théories élastiques de la lumière de Cauchy, sont enrichissants]. Airy également se manifestera, après que Hamilton lui ait fait part de ses résultats et de ce qu'il attendait des expériences de H. Lloyd; mais assez vite il reconnaîtra que bien qu'instruit de l'existence des "points coniques" de la surface de Fresnel et étonné que ce dernier ne les ait pas perçu, il ignorait la présence des "cercles de contact" et n'avait pas ébauché l'idée d'une théorie de la réfraction conique. Hamilton précise, en cette occasion de faire valoir sa priorité, que cette théorie a été déduite par ses méthodes générales de l'hypothèse des vibrations transversales dans un éther lumineux (une hypothèse proposée par Young mais proposée et développée "à la perfection", selon lui, et indépendamment, par Fresnel) et d'un autre principe de Fresnel : l'existence d'axes rectangulaires d'élasticité à l'intérieur du milieu cristallin biaxe [Pour en savoir plus on pourra se reporter à la thèse de Arnaud Mayrargue : L'aberration des étoiles et l'ether de Fresnel (1729-1851), Soutenue le 3 décembre 1991 à l'Université de Paris VII].

41 Hamilton lui même, dans une lettre adressée le 3 février 1833 à son ami S. T. Coleridge [cf. R. P. Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton, vol. 2, p.37], parle de "subordinate and secondary result".

42 C'est au moins, entre autres, très tôt l'avis de J. Plücker (cf. "Discussion de la forme générale des ondes lumineuses", Journal für die reine und angewandte Mathematik (A.L. Crelle),19 (1839), 1-44] : "Aucune expérience de physique a fait tant d'impression sur mon esprit, que celle de la réfraction conique. Un rayon de lumière unique entrant dans un crystal et en sortant sous l'aspect d'un cone lumineux : c'étoit une chose inouie et sans aucune analogie. Mr. Hamilton l'annonça, en partant de la forme de l'onde, qui avoit été déduite par des longs calculs d'une théorie abstraite. J'avoue que j'aurais désespéré de voir confirmé par l'expérience un résultat si extraordinaire, prédit par la seule théorie que le génie de Fresnel avait nouvellement créée. Mais Mr. Lloyd ayant démontré que les rexpériences étaient en parfaite concordance avec les prédictions de Mr. Hamilton, tout préjugé contre une théorie si merveilleusement soutenue, a dû disparaître. En même temps la forme générale, indiquée aux ondes lumineuses par Fresnel a dû acquérir une importance toute particulière."(Ibid., p. 44].

43 G. B. Airy précisera "perhaps the most remarkable prediction that has ever been made is that lately made by Professor Hamilton"[cf. R. P. Graves, op. cit., vol. 1, p. 637]. En France, une première mention de la réfraction conique est faite lors de la séance du lundi 21 janvier 1833 de l'Académie des Sciences de Paris [Procès verbaux des séances de l'Académie, t.X. Hendaye, Imprimerie de l'Observatoire D'Abbadia, 1922, p.187].

44 "I get the Fresnel safety" [TCD Ms 4015, lettre (n°.293) de Hamilton à Lloyd du 3 novembre 1832]. En fait, George Stokes dans son rapport à la British Association de 1862, "Report on Double Refraction", (p. 270) fera remarquer que la découverte de la réfraction conique ne constitue pas une preuve déterminante pour que la théorie de Fresnel l'emporte sur celle de l'émission [note 33, chap.6, p.411, de Thomas L. Hankins,Op.cit.]. Hamilton, dans son Third Supplement, montre lui aussi une certaine réserve lorsqu'il écrit (p. 165) : " The verification, therefore, of this theory of conical refraction, by the experiments of Professor Lloyd, must be considered as affording a new and important probability in favour of Fresnel's views; that is, a new encouragement to reason from those views, in combining and predicting appearances." (C'est nous qui soulignons.). On peut aussi noter que dans son Treatise on Light and Vision (1831), Humphrey Lloyd écrivait encore :"On the whole, the question of the nature of light is still a doubtful one." En 1834, dans son "Report on the Progress and Present State of Optics" présenté devant la British Association il est devenu un fervent défenseur de la théorie ondulatoire, convaincu que celle-ci a définitivement assuré sa victoire sur la théorie de l'émission; un avis partagé par de nombreux savants : ainsi en est-il par exemple de Herschel qui écrit (avec une certaine réserve cependant) : "La théorie ondulatoire, si elle n'est pas fondée en réalité, est certainement une des plus admirables fictions que le génie de l'homme ait jusqu'ici conçues pour lier ensemble les phénomènes naturels, aussi bien que la plus heureuse dans la confirmation qu'elle a reçue de tous les phénomènes optiques qui, à l'époque de leur découverte, paraissaient inconciliables avec elle. Cette théorie est, en fait, dans toutes ses applications et dans tous ses détails, une succession

de bonheurs, à ce point que nous dirions volontier d'elle : Si elle n'est pas vraie elle mérite de l'être."
On peut lire encore, dans l'article "Lumière" du Dictionnaire Français illustré et Encyclopédie Universelle, pouvant tenir lieu de tous les vocabulaires et de toutes les Encyclopédies [onvrage dirigé par B. - Dupiney de Vorepierre; publié à Paris, en 4 volumes, 1864] :

La théorie corpusculaire ... échoue presque complètement dans l'explication des phénomènes optiques récemment découverts, tels que les interférences, la diffraction, etc. (...) La théorie ondulatoire, ... elle n'est d'abord pas aussi aisée à comprendre, mais elle offre sur la précédente l'avantage de rendre compte de tous les phénomènes sans exception connus jusqu'à cette heure, et particulièrement de ceux qui résistent à la théorie ancienne. Aussi celle-ci perd chaque jour du terrain, et n'est employée que pour l'exposition des phénomènes les plus simples et les plus élémentaires de l'optique. Le système des ondulations, au contraire, est universellement accepté, même dans la patrie de Newton, qui l'a d'abord repoussé par un ridicule amour-propre national.(...) l'hypothèse de l'ondulation [a été élevée] à un si haut degré de probabilité, qu'on peut presque la mettre au rang des vérités les mieux démontrées des sciences naturelles." David Brewster, un des grands maîtres de l'optique expérimentale, restera un fervent émissionnaire. Biot fera de même; bien que parfaitement au fait des nombreuses conquètes de la théorie ondulatoire et de sa domination sans cesse croissante, il restera jusqu'à sa mort en 1862 un défenseur acharné de la théorie corpusculaire de Newton.

45 Voir son "Répertoire d'optique moderne, ou analyse complète des travaux modernes relatifs aux phénomènes de la lumière", première partie, Paris-Leipzig, A. Franck, 1847.

46 Ibid., p.97.

47 Th. Hankins le confirme [op. cit., note 35, chap.6, p.411], c'est bien pour ses découvertes en optique, et notamment pour celle de la réfraction conique, que lui est accordée cette récompense; une telle annonce ne fait même pas allusion à sa General Method in Dynamics pourtant déjà publiée dans les Philosophical Transactions de la Royal Society! Uue confirmation qui se trouve confortée par l'extrait suivant d'une lettre de J.W. Lubbock (30 novembre 1835) : "I have the pleasure to inform you that the Royal Society have voted to you the Royal Medal for your discoveries in Optics, and particularly that of Conical Refraction, in which vote I beg to say I think they only did justice to the extraordinary merits of your work." [cf; R.P. Graves, Ibid., 2, p.170]

48 Pour se faire, il remettra en question les régles d'élection à la présidence et proposera une durée limitée du mandat; il refusera ensuite de se présenter aux nouvelles élections!

49 Pour mieux comprendre ce succès disproportionné, peut être est il bon de rappeler que le développement de la British Association est très lié dans ses premières manifestations aux différents débats qui portèrent sur la nature de la lumière.

50 Cf. "Principles of Optics : Electromagnetic Theory of propagation, Interference and Diffraction of Light", 6th ed., New York, Pergamon Press, 1985.

51 Cf. par exemple,

M. Chasles, dans son Rapport sur les progrès de la Géométrie (1870), écrit (p.51) :"Hamilton découvrait,... par la considération seule des propriétés géométriques de la surface de l'onde, la réfraction conique, c'est-à-dire ces phénomènes merveilleux,...";

Spearman, T.D. dans sa brochure de présentation "400 years of Mathematics" (Trinity College of Dublin, 1992); pour lui la réfraction conique, vue la place prépondérante qu'il lui donne, semble encore constituer un des plus hauts faits scientifiques de Hamilton;

Wayman, P.A., "A Second Newton : William Rowan Hamilton (1805-1865)" [Il s'agit de la Part II : 6 du catalogue édité par David Scott : Treasures of the Mind. [Trinity College of Dublin, published by Sotheby's, 1992]. L'auteur reconnait que la réfraction conique n'est plus du point de vue pratique qu'une simple "curiosité de l'optique"; en revanche elle reste à ses yeux un résultat remarquable en tant que prédiction mathématique;

Bruhat, G. dans la partie Optique de son cours de physique générale [cf. Cours de physique générale. Optique (1930). 6e ed. par A. Kastler, Paris, Masson, 1992.] consacre une place à la réfraction conique (voir à ce propos dans le chapitre XXIV, "Rayons lumineux dans un milieu anisotrope", les paragraphes 314 et 315. Dans sa préface du mois d'août 1930, il rappele l'importance de l'optique des milieux anisotropes ou dissymétriques qui consitue la cinquième partie de son Cours, et écrit à cette occasion : "... il me semble difficile d'admettre que des physiciens puissent ignorer comment l'introduction de l'anisotropie du milieu dans les équations fondamentales des théories de la lumière conduit tout naturellement à l'interprétation des phénomènes en apparence si complexes de l'Optique cristalline, qu'ils puissent n'avoir jamais vu des expériences aussi curieuses que celles de la réfraction conique ou aussi belles que celles des interférences produites par les lames cristallines." (p.XIII)

52 Il ne s'agit pas ici bien sûr d'analyser dans toute sa technicité d'époque la démonstration proposée par Hamilton, ni même de porter un jugement sur sa valeur (on sait par exemple qu'à bien des égards les démonstrations de MacCullagh, Ampère ou même de Plücker, sont mieux acceptées); une telle exigence de totale transparence demanderait au moins comme préalable, d'une part, une minutieuse considération des principes de Fresnel sur lesquels s'appuie Hamilton (rassemblés pour l'essentiel dans le "Second Mémoire sur la double réfraction" de 1822 [Fresnel, Œuvres Complètes, t.2, pp. 479-596]) et, d'autre part, une plus grande familiarité avec les aspects techniques de la théorie des fonctions caractéristiques. Il s'agit plutôt ici de rapporter au plus près cette démonstration (respectant pour se faire le "style" de l'auteur, ses notations et son vocabulaire), en ayant procédé cependant à quelques raccourcis sans conséquence, ne retenant le plus souvent que les traits les plus spécifiques et les plus marquants.

53 Hamilton dit simplement qu'une telle dénomination est due au fait que s,t,n sont égales à l'inverse des composantes de la vitesse normale, "such then may be said to be the optical meaning of our quantities s,t,n , in the theory of the propagation of light by waves" [ibid, p. 278]

54 Ibid., p.280.

55 qui résulte d'un précédent calcul, auquel nous avons fait allusion et qui visait à montrer que les fonctions n et n' des milieux final et initial pouvaient être déduites de la forme de la fonction caractéristique V, au ν et ν' cours duquel Hamilton introduit la relation $0=(\sigma^2+\tau^2+\nu^2)^{1/2}\omega - 1 = \Omega$, où ω, c'est-à-dire

$$(\sigma^2+\tau^2+\nu^2)^{1/2},$$

est fonction de $\sigma(\sigma^2+\tau^2+\nu^2)^{-1/2}$, $\tau(\sigma^2+\tau^2+\nu^2)^{-1/2}$, $\nu(\sigma^2+\tau^2+\nu^2)^{-1/2}$, $x,y,z,\chi;\Omega+1$ est une fonction homogène de σ,τ,ν du premier ordre, elle satisfait par conséquent la condition .

$$\sigma\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}+\tau\frac{\delta\Omega}{\delta\tau}+\nu\frac{\delta\Omega}{\delta\nu}=\Omega+1$$

56 Ces calculs s'appliquent identiquement à la fonction n' qui caractérise le milieu initial.

57 L'équation (10) est déjà, exactement sous la même forme, chez Fresnel [cf.Œuvres, II,Second mémoire sur la double réfraction; en particulier le paragraphe 36 (Autre manière de calculer la surface des ondes), p.560].

58 Dans un post scriptum à son article "On a Mode of deducing the Equation of Fresnel's Wave", Philosophical Magazine, 19,381-383 [Math. Papers, I (article n°.XIV), pp. 341-343].

59 Œuvres, II, p.561-; voir également la note (*) E Verdet (Ibid, p561). A la suite des travaux de Fresnel présentés en 1821 à l'Académie des Sciences de Paris sous le titre "Mémoires sur la double réfraction" (Mémoires de l'Académie des Sciences, t. VII (1827), 45-176), de nombreux savants s'intéressèrent à la surface d'onde et apportèrent de nombreuses améliorations, parmi eux : Ampère ("Mémoire sur la détermination de la surface courbe des ondes lumineuses dans un milieu dont l'élasticité est différente suivant les trois directions principales", Annales de Chimie et Physique, 2nde Sér., t.39 (1828), 113-145), Cauchy ("Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle", Exercices de Mathématiques, t. V (1830),19-; "Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction", Mémoires de l'Académie des Sciences, t. XVIII (1842), 153-216), J.W. Herschel (Traité de la Lumière, écrit pour l'Encyclopédie Métropolitaine, traduit peu de temps après par Verhulst et Quetelet (2 vol., Paris, 1829 et 1833, dont un Supplément dû à Quetelet), Sylvester ("Analytical Development of Fresnel's optical Theory of Crystals", Philosophical Magazine, t.XI (1837), 461-469, 537-541; t.XII, 341-345), A. Smith ("Investigation of the Equation to Fresnel's Wave Surface" (1835), Trans. of the Cambridge Philosophical Society, t. VI (1838), 85-89), Senarmont (il envisage la surface de l'onde comme "enveloppe d'une infinité d'ondes planes"; cf sa "Note sur la théorie mathématique de la double réfraction",Journal de Mathématiques, t. VIII (1843), 361-378) et Plücker (il simplifie beaucoup le problème en faisant appel à sa théorie géométrique des surfaces dites polaires réciproques, montrant que cette théorie "permet de passer très-facilement de la surface d'élasticité à la surface de l'onde". [cf. son très intéressant mémoire, op. cit., note 38 bis,]. Verdet dans la précédente note écrit : "...le procédé le plus élégant et le plus rapide pour arriver à l'équation de la surface de l'onde est sans contredit celui dont Mac-Cullagh s'est servi dans le Mémoire sur la réflexion et la réfraction qu'il a lu à l'Académie de Dublin le 9 décembre 1839" ["An Essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction",Trans. of the R. I. A., 21, p.17.] Il ne fait cependant aucune allusion à la contribution de Hamilton. Ajoutons à tout ce qui précède l'intéressant Rapport sur les progrès de la Géométrie (Imprimerie Nationale, Paris, 1870) de Michel Chasles dans lequel, brièvement, sont reprises la plupart des précédentes références auxquelles a été ajouté un inventaire de travaux plus récents (de R. Moon, Lamé, Walton, Roberts); il n'omet pas de faire état des thèses de doctorat de "jeunes géométres", tels Galopin (1858), Massieu (1861), Durrande (1864),..., toutes centrées sur la "théorie de la surface des ondes" (cf.pp. 46-54; 356.)

60 Ibid, p.279, formule (E18) : i.e. "the components s,t,n , of the normal slowness of a wave, or the partial differential coefficients of the first order of the time-function V, are equal to the partial differential coefficients of the first order $\frac{\delta\nu}{\delta\alpha},\frac{\delta\nu}{\delta\beta},\frac{\delta\nu}{\delta\gamma}$, of the undulatory slowness v of propagation along the ray, when this later slowness is expressed as a homogeneous function of the first dimension of the direction-cosines a,b,g of the ray"; un résultat notable développé par Hamilton dans le paragraphe 26 de son mémoire, et qui correspond au théorème général d'optique mathématique exprimé par sa formule fondamentale (A) (cf. p.9).

61 Aux dires de Hamilton, Fresnel n'est pas très clair quant à la définition des axes optiques, parfois l'un ou parfois l'autre des deux ensembles de directions (19) et (20) les désignent. Afin d'éviter toute possible confusion qui pourrait résulter de cette double utilisation d'un terme, Hamilton propose deux nouvelles expressions : "lines of single ray-velocity", pour l'ensemble $\pm\rho'$, $\pm\rho''$, et "lines of single normal velocity" pour l'ensemble $\pm\omega'$, $\pm\omega''$; des expressions qui sont pour lui certes plus longues, mais qui ont le mérite d'être "plus expressives" (aujourd'hui, les directions $\pm\omega'$, $\pm\omega''$ correspondent aux axes optiques).

62 i.e. "Conoidal Cusps".

63i.e. "Circles of Contact".

64 Ce faisant, Hamilton propose alors de nouvelles dénominations à la place de celles données précédemment (cf. note 55 ci-dessus) : Les Lines of Single Ray-Velocity sont appelées des Cusp-Rays, et les Lines of Single Normal-Velocity deviennent des Normals of Circular Contact.

65 En effet, dans le paragraphe 13 (pp.222-227), il s'intéresse plus particulièrement à l'influence des changements de systèmes de coordonnées sur les résultats des précédents paragraphes, et établie plusieurs formules de transformation des coordonnées.

66 Les huit autres points correspondants aux deux plans coordonnés, ab et bc, sont imaginaires.

67 Ibid., p. 285.

68 Hamilton fera observer que l'on parvient aux mêmes conclusions à partir de l'équation d'onde de Fresnel en coordonnées rectangulaires x,y,z, rapportée aux axes d'élasticité a, b, c : les équations des quatre planes of circular contact sont, dans ces coordonnées, $z\sqrt{b^2-c^2} \pm x\sqrt{a^2-b^2} = \pm b\sqrt{a^2-c^2}$ [i.e. sa relation (P19)].

69 Les trois élasticités ont des valeurs "assez" différentes.

70 Où v est, comme précédemment, la lenteur ondulatoire d'un rayon considérée comme fonction homogène du premier degré des cosinus α,β,γ de ses inclinaisons sur trois demi-axes positifs rectangulaires a, b, c quelconques, considérés par lui comme étant les trois demi-axes d'élasticité du milieu cristallin; Δ se rapporte aux changements produits par réflexion ou réfraction, le trinôme inchangé $a_t \frac{\delta v}{\delta\alpha} + b_t \frac{\delta v}{\delta\beta} + c_t \frac{\delta v}{\delta\gamma}$ étant la composante de la vitesse normale dans la direction d'une ligne quelconque t sur le plan tangent de la surface de réflexion ou de réfraction, et a_t, b_t, c_t sont les cosinus des inclinaisons de cette ligne sur les demi-axes a, b, c.

71 Ibid., p.286.

72 Elle est encore considérée comme fonction homogène du premier degré en les cosinus $\alpha_/,\beta_/,\gamma_/$ de ses inclinaisons sur les demi-axes positifs de coordonnées $x_/$, $y_/$, $z_/$.

73 Ibid., p.287.

74 "Le cône [(45)] n'est pas "équivalent" à [(44)]; [(45)] renferme [(44)] et sa réduction en x0 = 0. Ainsi, quand r/ est "petit", [(45)] donne un cône circulaire double, et [(44)] un cône circulaire simple." [Note. *, Ibid. p.287, des éditeurs].

75a, b, c, sont "presque égaux" entre eux.

76 Lettre de W.R.H. à H. Lloyd (3 novembre 1832) [TCD. Ms., lettre n° 293]. Le cristal d'aragonite ($CaCO_3$), est un cristal biaxe orthorhombique (i.e. sa "maille élémentaire" (le solide primitif qui le caractérise) est un prisme à base rectangulaire; il présente trois axes de symétrie cristallographique, ces trois axes étant nécessairement les trois axes de symétrie optique) de forte biréfringence, dont les indices de réfraction sont a=1,530, b=1,682 et g=1,686 (notations actuelles).

77 Lettre de W.R.H. à H. Lloyd (5 novembre 1832) [TCD. Ms., lettre n° 296].

78 Lettre de H. Lloyd à W.R.H. (6 novembre 1832) [TCD. Ms., lettre n° 297].

79 Lettre de H. Lloyd à W.R.H. (10 novembre 1832) [TCD. Ms., lettre n°300].

80 John Dollond (1706-1761) est considéré comme un des principaux théoriciens de l'optique au 18e siècle en Angleterre, vers 1858 il réalisa des objectifs achromatiques (corrigés de l'aberration de sphéricité) qui apportèrent une véritable révolution dans la technique des instruments optiques et qui lui valurent d'être reçu à la Société Royale de Londres. Lui et par la suite son fils Peter Dollond, furent reconnus parmi les meilleurs constructeurs d'instruments optiques d'Angleterre.

81 Lettre de H. Lloyd à W.R.H. (14 décembre 1832) [TCD. Ms., lettre n° 305].

82 Lettre de W.R.H. à H. Lloyd (19 décembre 1832) [TCD. Ms., lettre n° 308].

83 Lettre de W.R.H. à H. Lloyd (18 décembre 1832) [TCD. Ms., lettre n° 335].

84 Pour d'autres détails sur la réfraction conique, on peut se reporter, outre les références déjà mentionnées (en particulier celle très bien documentée de Hankins), au travail de D. Eichhorn, "Die äussere und innere konische Refraktion, letzter überzeugender Baustein zum endültigen Durchbruch der Undulationstheorie des Lichts genüber der Emissionntheorie" (Thèse. Diss., Université de Munich, 1986).

85 Ibid., p.291. Il s'agit de la surface dont l'équation, que nous avons rencontré à plusieurs reprises, est : $\Omega(\sigma,\tau,\nu)=0$.

86Ibid., p.292.

87 On peut rappeler que Hamilton reconnaît à Cauchy l'origine de ces travaux (cf. en particulier la note 37 ci-dessus).

BIBLIOGRAPHIE

ARNOLD, V. I. 1976. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Moscou : MIR, 1976, part. chap. 3.

BATEMAN, H. Hamilton's work in dynamics and its influence on modern thought; *Scripta Mathematica*, v.10, p. 51-63, 1944.

BORN, M. ; WOLF, E. *Principles of optics*. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.. 6th ed., New York : Pergamon Press, 1985 .

BRUHAT, G. *Cours de physique générale*. Optique (1930). 6e ed. revisée par A. Kastler; réimpression complétée par P. Bouchareine. Paris : Masson, 1992.

CAYLEY, A.*The Collected Mathematical Papers*, Cambridge : Cambridge University Press, 1889-1898, 13v.

________. Report on the recent progress of theoretical dynamics. *British Association Reports*, (1857), p.1-42; (1862), [cf. The Collected Mathematical Papers, v.4, p.513-593]

COMTE C, BARROSO FILHO, W. *La formalisation de la dynamique par Lagrange (1736-1813)* : l'introduction du calcul des variations et l'unification à partir du principe de Moindre Action". Paris: Rheseis et Paris VII, 1990. 30p.

CONWAY, A. W. ; **SYNGE**, J. L. William Rowan Hamilton's contributions to geometrical optics; *Nature*, n.123, p.349, 1929.

DUGAS, R. Sur la pensée dynamique de Hamilton : origines optiques et prolongements modernes. *Rev. Scie.*, v.79,p. 15-23, 1940.

________. *Histoire de la mécanique*. Neuchâtel : Editions du Griffon,1950 (existe aussi la traduction anglaise *A History of Mechanics* de J. R. Maddox. Neuchâtel, Editions du Griffon, 1955).

FLAMENT, D. *"Origenes Opticos de la Dinámica de William Rowan Hamilton"*, Contra los titanes de la rutina. Comunidad de Madrid/C.S.I.C., 1994 (éd. D. Flament, S. Garma & V. Navarro), p.237-255.

________. et al. (eds) *Contra los titanes de la rutina*. Comunidad de Madrid/C.S.I.C., 1994.

FRESNEL, A. J. *Oeuvres Complètes*. Eds. H. de Senarmont, E. Verdet et L. Fresnel. Paris : Imprimerie Impériale, s.d. 3v.

GRAVES, R. P. *The Life of Sir William Rowan Hamilton*. 1882-1889, Dublin : Hodges Figgis, 1882-1889, 3v.

GUILLEMIN, V. , **STERNBERG**, S. *Symplectic techniques in physics*.Cambridge : Cambridge University Press, 1984.

HAMILTON, W. R. *The Mathematical Papers of Sir...*, V. I: Geo-metrical Optics, edited by the Royal Irish Academy by A. W. Conway & J. L . Synge (1931), V. II : Dynamics, edited by the Royal Irish Academy by A. W. Conway & J. Mc Connell (1940). Cambridge University Press.

________. On a General method of expressing the paths of light, and of the planets, by the coefficients of a characteristic function(1833). *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, v. II, p.311-332]. Existe aussi une traduction française faite par Hamilton : "Sur une méthode pour exprimer les trajectoires de la lumière et des planètes, au moyen de coefficiens d'une fonction caractéristique"; *Correspondance Math.* et Phys. (ed.Quetelet), VIII , p.69-89, p.201-211, 1834.

________. On a General method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function (1834-1835). *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, v.2, p.103-211.

HAMILTON, W. R. On the Application to dynamics of a general mathematical method previously applied to Optics. *The mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, v.2, p.212-216, 1834.

HAMILTON, W.R. On a View of mathematical optics. *British Association Report*,p.545-547, 1831-2.
HANKINS, Th. L. *Sir William Rowan Hamilton*. Baltimore : John Hopkins U. P., 1980.
HEATH, R. S. *A Treatise on geometrical optics*. Cambridge : At the University press, 1895.
HERZBERGER, M. *Journal of the Optical Society of America*, v.26, p.177-178, 1936.
_________. *Modern geometrical optics*. New York : Interscience Publishers, Inc., 1958.
JACOBI, C. G. J. *Gesammelte Werke, (1881-1891)*. New York : Chelsea Publishing Company, 1969. [voir en part., vol. VIII : Dynamik]. 8v.
_________. J. Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, s.d., *Comptes Rendus de l'Ac. des Scie.* de Paris, t. v, p.61-67 [cf. *Gesammelte Werke*, vol. IV, p.129-136].
KLEIN, F. Über neuere englishe Arbeiten zur Mechanik, (1891/92). Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd.1 [cf. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen.*, V. II, art. LXX, p.601-602].
_________. Über das Brunssche Eikonal; Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 46 (1901), [cf.*Gesammelte Mathematische Abhandlungen.*, V. II, art. LXXI, p.603-606].
_________. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen. (1921-1923)*. Berlin : Springer-verlag, 1973. 3v. Reprint.
_________. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.* Jahrhundert (1926-1927). Ausgabe in einem Band. Berlin : Springer-Verlag, 1979.
LANCZOS, C. *The Variational principles of mechanics*. Toronto : University of Toronto Press, 1949, reprinted, 1952.
LARMOR, J. Historical note on Hamiltonian rays and dynamical action (1928), *Atti del Congresso Internazionale di Matematici*, 5 (1931), Bologna, 79-82.
LEVI-CIVITA, T. *Caratteristiche e propagazione ondosa (Bologne, 1931)*. Caractéristiques des Systèmes Différentiels et Propagation des Ondes, trad. française de M. Brelot, Paris, Félix Alcan, 1932.
LLOYD, H. *Treatise on light and vision* : London, 1831.
_________. On the Phænomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals. *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2, p.112- 120, Feb. 1833.
_________.Further experiments on the phænomena presented by light in its passage along the axes of biaxal crystals. *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2, p. 207- 210,Mar. 1833.
_________.On the Phænomena presented by light in its passage along the axès of biaxal crystals (1833),*Transactions of the Royal Irish Academy*, v.17, part.1, p.145-157,1837.
_________, H. Report on the progress and present state of Physical Optics. *British Association Reports*, p. 293-413, 1834.
_________. *Elementary treatise on the wave theory of light*. Dublin : 1837.
_________. *Elements of Optics*. Dublin : 1849.
MARÉCHAL, A. Optique géométrique générale, Handbuch der Physik (ed. S.Flügge), *Grundlagen der Optik*, Springer-Verlag, v.24, p.44-170, 1956.
MAXWELL, J. C. A Dynamical theory of electromagnetic field, *Proc. Roy. Soc.*, xiii, p.531-536, 1864; *Phil. Trans.*, clv (1865), p.459-512; *Phil. Trans.*, v.4, n.xxix ,p. 152-157, 1865.
_________. On the application of Hamilton's characteristic function to the theory of an optical instrument symmetrical about an axis. *Proc. of London Math. Soc.*, n.vi, p.117-122, 1874-5; "On Hamilton's characteristic function for a narrow beam of light", *Proc. of London Math. Soc.*, n.vi, p.182-190, 1874-5.
MIYAMOTO, K. Wave optics and geometrical optics in optical design, *Progress in Optics* (ed. Wolf, E.), v.1, 1961, Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 3rd. Printing, p.31-66, 1965.
O'DONNELL, S.*William Rowan Hamilton*. Portrait of a Prodigy. Dublin : Boole Press, 1983.

PEGIS, R. J. *The Modern development of Hamiltonian optics*. Progress in Optics (ed. Wolf, E.), v.1 1961, Amsterdam : North-Holland Publishing Company, p. 3-29, 1965. 3rd. printing.

PERSICO, E. *Sviluppi e risultati della meccanica ondulatoria*. Atti del Convegno Lagrangiano, Torino 22-25 Ottobre 1963. Torino Accad. Delle Scienze, 1964, p.4-52.

PRANGE, G.W.R. Hamilton's Bedeutung für die geometrische Optik. *Jahrbericht der Deutchen Mathematiker-Vereinigung*, n.30, p.69-82, 1921.

SARTON, G. Discovery of conical refraction by William Rowan Hamilton and Humphrey Lloyd (1833). ISIS,n.17, p. 154-170, 1932.

SCHRÖDINGER, E. An Undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*, v. 28, n.6, p.1049-70, Dec. 1926.

_________. Quantisierung als Eigenwertproblem (1926), *Gesammelte Abhandlungen*, Band 3, Beiträge zur Quanten-theorie, *Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften*, Wiesbaden, Wien: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984, p.489-527.

_________. The philosophy of Experiment (1954),*Gesammelte Abhandlungen*, Band 4, Allgemein wissenschafliche und populäre Aufsätze. Wiesbaden, Wien: Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984, p.558-568.

SIVOUKHINE, D.Cours de physique générale. *Optique*. (1980). Trad. française. Moscou : MIR, 1984. T.4.

SOUTHAL, J. P. C. *The principles and methods of geometrical optics*; especially as applied to the theory of optical instruments. New York : The Macmillan Company, 1913.

STEWARD, G. C. On the Optical Writings of Sir William Rowan Hamilton. *Gazette*, n.16, p.179-191, 1932.

SYNGE, J. L. *Geometrical optics* : an introduction to Hamilton's Method (1937); Reprinted, Cambridge: At the Univ. Press, 1962.

_________. Hamilton's Method in Geometrical Optics. *J. Optical Soc. of America*, n.27,p. 75-82, 1937.

_________. Hamilton's Characteristic Function and Bruns' Eikonal. *J. Optical Soc. of America*, n.27, p.138-144, 1937.

WHITTAKER, E. T. *A History of the theories of aether and electricity*. The Classical Theories. London: Thomas Nelson and Sons Ltd., 1951. Rev. and enlarged ed.

DOMINIQUE FLAMANT é pesquisador do Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) e membro da *Equipe Epistemologiques et Historiques sur les Sciences Exactes et les Institutions Scientifiques*.

Endereço: 27 Rue Damesme - 75013 - Paris

Telefone: 45-81-14-85

Fax: 45-80-78-47