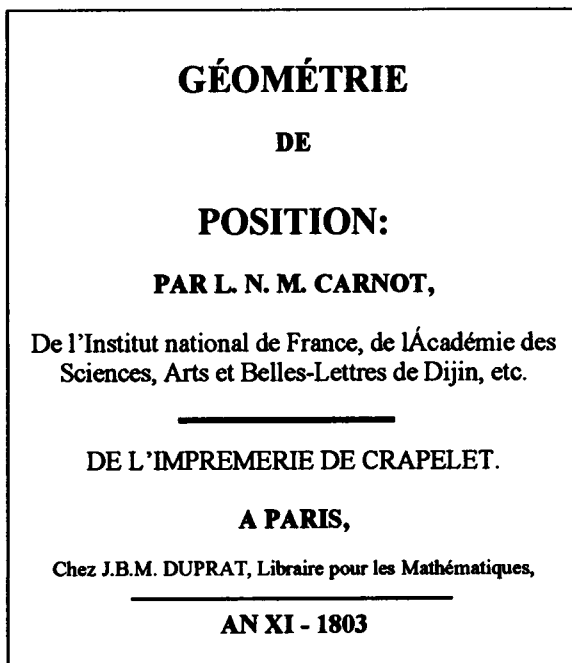


# **“GÉOMÉTRIE DE POSITION” - O ESTRANHO LIVRO DE LAZARE CARNOT**

**FERNANDO RAUL NETO**

*RESUMO - O objetivo deste artigo é descrever resumidamente o texto Géométrie de position (1803) do matemático e político francês Lazare Carnot (1753-1823) e comentar alguns pontos polêmicos em torno do texto. Essa obra, definida pelo próprio autor simplesmente como uma “teoria das quantidades positivas e negativas”, foi uma das principais influências sobre Jean-Victor Poncelet (1788-1867) que através da publicação em 1822 do Traité des propriétés projectives des figures criava uma disciplina central para a Matemática do século XIX - a Geometria projetiva. O artigo comenta, em particular, a difundida versão de que Lazare Carnot em sua Géométrie de position objetivava “libertar a geometria dos hieróglifos da análise”.*

*ABSTRACT - The aim of this paper is to briefly describe the book Géométrie de position (1803) by the French politician and mathematician Lazare Carnot (1753-1823) and to comment on some controversial points raised concerning the text. This work, defined by Carnot himself as a “theory of negative quantities”, was one of the principal influences on Jean-Victor Poncelet (1788-1867), who with the publication in 1822 of the Traité des propriétés projectives des figures founded a discipline that was central to of the 19th. century mathematics, namely projective geometry. In particular, the paper comments on the widely held view that Lazare Carnot in his Géométrie de position aimed do “free geometry from the hieroglyphics of analysis”.*



Revista da SBHC, n. 12, p. 53-64, 1994

O *Géométrie de Position* de Lazare Carnot (1753-1823) foi publicado em Paris em 1803. É um texto volumoso: contém 40 páginas iniciais numeradas em algarismos romanos mais 487 numeradas em algarismos arábicos; o texto conclui com 174 figuras distribuídas em 15 tabelas. Uma “*Dissertation préliminaire*” de 38 páginas introduz a obra. “Esta dissertação deve ser considerada como parte essencial da própria obra”, assim Carnot caracteriza essa introdução. Na página xxxix, encontra-se o índice da obra e na seguinte uma “Errata”. Seguem então as seis secções do texto principal divididos ao longo de 435 parágrafos.

O *Géométrie de Position* não sofreu nenhuma outra edição ou reimpressão de sua edição original. Sua única tradução foi feita para o alemão sob o nome *Geometrie der Stellung*, publicada em dois volumes em 1808 e 1810, respectivamente. O tradutor foi o astrônomo alemão Heinrich Christian Schumacher<sup>1</sup> (1780-1850), que acrescenta ao título do livro o subtítulo “ou sobre a aplicação da Análise à Geometria”.

Uma certa expectativa antecedeu a publicação do livro. Uma dupla expectativa na realidade. Primeiro, pelo nome do autor. Carnot, que até os seus 38 anos de idade era completamente desconhecido fora das pequenas províncias francesas, nas quais trabalhara como engenheiro militar, era aos 50 anos, quando da publicação do *Géométrie de position*, um político conhecido e respeitado em toda a Europa. Sua meteórica ascensão política havia começado em outubro de 1791, data da instalação da “Assembléia Nacional Constituinte” convocada pelos revolucionários de 1789, quando ele chegou em Paris como deputado eleito pelo “Departement Pas-de-Calais”.

Carnot, nesses 12 anos que antecederam a publicação do *Géométrie de Position*, tornou-se um dos homens mais importantes e mais influentes da França revolucionária e napoleônica, participando do primeiro escalão do poder francês em vários de seus momentos: em 1792 é reeleito deputado, agora ao “Convento”; membro do “Comitê de Saúde Pública” em 1793 e do “Diretório” de 1795 até setembro de 1797 quando o Golpe de Estado do 18º Frutidor obriga-o a exilar-se na Suíça.

A França o conhecia como o *Organisateur de la Victoire*, o que era o reconhecimento de seus méritos como estrategista militar e administrador; sob suas ordens a França passara a ganhar sucessivas batalhas na guerra empreendida contra a maioria dos países europeus.

Em 1803, Carnot já estava afastado do poder político. Napoleão já exercia seus poderes absolutos, uma suspeita de Carnot que se confirmava e que o havia levado a solicitar em 1800 a sua exoneração do cargo de “Ministro da Guerra”.

A expectativa era assim justificada. Como sucede ainda hoje, não é frequente que grandes nomes da política também possuam o respeito da comunidade científica. Havia, portanto, expectativa e curiosidade pelo novo trabalho de Carnot, curiosidade que ainda hoje motiva os estudos do Carnot cientista. Foi curiosidade que conduziu Gillispie aos estudos da Mecânica carnotiana.

“Lazare Carnot permanece como um dos poucos homens da ciência e da política cuja carreira em cada um dos domínios merece a atenção cuidadosa pelos seus próprios méritos. Sérios talentos científicos e políticos raramente andam juntos, e foi curiosidade que conduziu ao presente estudo, curiosidade de saber se sua carreira foi de fato a exceção que parecia ser na aparência, e se seus escritos científicos comprovam o epíteto de “savant” cerimoniosamente utilizado nos dias de sua proeminência como homem de estado”. (Gillispie 1971, p. vii)

O título escolhido por Carnot para a sua nova Geometria também provocou expectativas quanto ao seu conteúdo. A expressão *Géométrie de position* apontava para uma área de investigação que Leibniz havia esboçado desde 1679<sup>2</sup>. Para Leibniz, o tratamento algébrico das questões geométricas não fornecia nem os caminhos mais simples, nem as mais belas construções da Geometria. Ele achava, então, que faltava ainda “uma outra análise propriamente geométrica ou linear que exprimisse diretamente o *situm* como a Álgebra exprime *magnitudinem*”. (Grassmann 1969, p. 417).

1 Schumacher foi um dos astrônomos mais conhecidos da Europa; fundou em 1823 o jornal científico *Astronomische Nachrichten* que ainda hoje encontra-se em circulação. Schumacher gozava de grande reputação no meio científico. Travou ao longo dos anos uma vasta correspondência com seu amigo Gauss, do qual foi aluno de doutorado em Göttingen.

2 Numa carta a Huygens em 8 de setembro de 1679. Cf. Grassmann 1969, p. 417.

Gauss foi um dos que externou essa expectativa provocada pelo título. Numa carta a Olbers ele escreve.

“Estou extremamente ansioso com a publicação em breve de uma obra de Carnot, *Géométrie de position*. Essa área, que até então tem sido bastante negligenciada e da qual temos apenas alguns fragmentos de Euler e de meu estimado geômetra Vandermonde, deve abrir um campo completamente novo e formar um ramo bem interessante da extraordinária teoria das grandezas”. (Gauß 1976 A, p.109)

O texto de Carnot deve ter frustrado Gauss. Carnot inicia seu livro estabelecendo diferenças com o programa leibniziano, embora reconhecendo analogias.

“L’object de cet ouvrage diffère de celui de l’analyse de situation [...]; mais il lui est analogue. Leibnitz vouloit qu’on fit entrer dans l’expression des conditions d’un problème géométrique, la diversité de position des parties correspondantes des figures comparées, afin qu’en les séparant par un caractère bien distinctif, on pût les isoler plus facilement dans le calcul. Or cette diversité de positions s’exprime souvent par de simples mutations de signes; et c’est précisément la théorie de ces mutations qui fait l’objet essentiel des recherches que j’ai en vue, et que je nomme *Géométrie de position*”. (GP, p. i)

Carnot define, portanto, o tema de sua investigação: o negativo na Geometria, escolha que exprime a sua sensibilidade para com a Matemática<sup>3</sup>, mas que, ao mesmo tempo, vai marcar Carnot e seu texto de uma forma bem singular. Mais adiante retomaremos esse ponto.

### O escritor Carnot

Carnot não escreveu apenas Matemática. Seus escritos vão do técnico ao lírico, passando pelo estritamente científico. Charnay (Carnot 1984, v.II, p.7-15.) agrupou todos os textos de Carnot em quatro grupos e um anexo: os textos técnicos sobre arte de construção e fortalezas militares; os textos políticos; as ordens militares; os textos científicos e as poesias e reflexões morais. Charnay classifica, numa outra direção, os textos científicos e as suas poesias como textos de “necessidade interior” e os demais como textos circunstanciais.

“A maior parte dos textos de Carnot são textos de circunstâncias: todos aqueles relativos a sua vida política, militar e profissional, sejam eles textos de ação ou de reação: mesmo os textos aparentemente mais longos e mais elaborados, como o *Éloge de Vauban* e o tratado *De la defense des places* [...]. A obra reflete também a combatividade e a insistência bem marcantes na vida: um grande número de seus escritos de circunstâncias foram as *orationes pro domo*, das defesas e ilustrações de seus atos e de suas teses. [...] Elas não o exprimem assim tão singularmente: como seus escritos científicos, e mesmo as poesias, que resultam de sua livre vontade, de sua livre reflexão, de seu natural abandono em direção ao que ele tinha de mais caro: reflexão e imaginação”. (Carnot 1984, p.9/10)

Se, por um lado, é indubitável que os textos científicos de Carnot, em todas as áreas nas quais eles podem ser grupados - a Mecânica, o Cálculo infinitesimal e a Geometria -, surgiram de sua livre vontade e são de natureza fundamentalmente distinta dos seus textos militares e políticos, por outro lado também é verdade que os seus textos científicos foram inicialmente estimulados por exigências externas. Seus textos de Mecânica e sobre o Cálculo infinitesimal foram motivados por concursos instituídos pelas Academias científicas e a *Lettre au citoyen Bossut* surgiu pelo encorajamento de um amigo<sup>4</sup>. Livres de estímulos externos e como resultado de uma reflexão calma e mais elaborada são apenas os seus três

3 O negativo foi um fator catalizador em importantes desenvolvimentos da Matemática do século XIX. Assim confirmam em depoimentos próprios: Poncelet, na elaboração da “*Geometria projetiva*”, George Peacock, na construção da sua divisão da Álgebra em “Álgebra aritmética” e “Álgebra simbólica” e Grassmann no desenvolvimento de seu “Cálculo da extensão”.

4 A *Lettre* é a resposta de Carnot, então Ministro da Guerra de Napoleão, ao seu amigo Bossut, que lhe solicitou colocar em texto as idéias discutidas pelos dois num encontro informal. O texto foi publicado como apêndice em Bossut 1800.

últimos textos geométricos: *De la corrélation de la figures e la géométrie* (1801), a *Géométrie de position* (1803) e o *Essai sur la théorie des transversales* (1806).

Quando observamos as obras de Carnot cronologicamente, salta aos olhos o fato de que todas elas nasceram em períodos nos quais ele estava afastado de suas atividades políticas. A tabela abaixo mostra que os seis primeiros trabalhos de Carnot foram escritos antes de 1791, ou seja, antes de sua chegada a Paris como Deputado. As obras de 1797 foram publicadas quando ele se encontrava exilado na Suíça e todas as seguintes quando ele já não detinha poder político algum e começava a se dedicar completamente às atividades científicas.

Ano	Título	Área
1778	Mémoire sur la théorie des machines pour concourir au prix de 1779 proposé par l'Académie Royale des Sciences de Paris	Mecânica
1780	Mémoire sur la théorie des machines pour concourir au prix que l'Académie Royale des Sciences de Paris doit adjuger en 1781	Mecânica
1783	Essai sur les machines en général	Mecânica
1784	Lettre sur les aerostats	Mecânica
1785	Dissertation sur la théorie de l'infinie mathématique, ouvrage destiné à concourir au prix qu'a proposé l'Académie royale des sciences, arts et belles-lettres de Berlin, pour l'année 1786. Arras, le 8 septembre 1785	Cálculo
1786	Segunda edição do "Essai sur les machines en général"	Mecânica
1797	Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal	Cálculo
1797	Oeuvres mathématiques du citoyen Carnot	Mecânica Cálculo
1800	Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie	Geometria
1801	De la corrélation des figures de géométrie	Geometria
1803	Géométrie de position	Geometria
1803	Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement	Mecânica
1806	Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales	Geometria
1813	Segunda edição do "Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal"	Cálculo
1804/06	"Rapports" para o "Intitut de France"	Diversos

Observamos, também, que as idéias centrais de Carnot sobre a Mecânica e o Cálculo nasceram todas no período em que ele trabalhava como engenheiro militar nas fortificações militares francesas. De fato, todas as suas obras nessas duas áreas e publicadas após 1785 foram reedições ou desenvolvimentos de obras anteriores. A Geometria, ao contrário, é um novo tema que surge para Carnot a partir de 1800, quando ele já se aproximava de seus cinquenta anos. É exatamente na Geometria que Carnot escreve sua grande obra. É evidente que sua geometria é o resultado de seus intensivos e autodidáticos estudos desenvolvidos no seu período de caserna e em Paris.

Toda a Geometria de Carnot está desenvolvida em quatro textos publicados entre 1800 e 1806. São eles: *Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie* (1800), *De la corrélation des figures de géométrie* (1801), *Géométrie de position* (1803) e o "*Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*" (1806).

Esses quatro textos formam, na realidade, um corpo único, e é legítimo falar aqui de uma "tetralogia geométrica". De fato, a *Lettre au citoyen Bossut* foi retomada e bastante ampliada no capítulo V do *Géométrie de position*, o *De la corrélation* é redistribuído quase sem alterações ao longo do *Géométrie de position* e o último texto, o *Mémoire*, são as versões condensadas e estilisticamente melhoradas de um problema e da Teoria das transversais, ambos presentes no *Géométrie de position*.

## O Geometria de position

Passemos agora a um resumo cursórico de cada uma das secções do *Geometria de position*. Reproduzimos a seguir o índice da obra.

### TABLE DES MATIÈRES

DISSERTATION PRÉLIMINAIRE		page i
SECTION I.	Principes généraux	7
SECTION II.	Mode proposé pour exprimer la corrélation des figures différentes, et les positions respectives des diverses parties d'une même figure	78
SECTION III.	Formation de tableaux analytiques propres à représenter l'ensemble des rapports qui existent entre les diverses parties d'une même figure, et les modifications qui distinguent, soit de cette première figure, soit entre elles, les autres figures qui lui sont corrélatives	177
SECTION IV.	Des rapports qui dans un système de lignes droites peuvent être trouvés sans l'intervention des quantités linéo-angulaires. Recherches trigonométriques sur les figures tracées, soit dans un même plan, soit sur la surface de la sphère; diverses propriétés des polygones et des polyèdres	253
SECTION V.	Application de la théorie précédente à diverses questions de géométrie élémentaire	351
SECTION VI.	De la détermination d'un point dans l'espace, et du changement de ses coordonnées	423

Na *Dissertation préliminaire*, Carnot apresenta o objetivo de seu livro, desenvolve uma crítica ao entendimento usual dos negativos, introduz os primeiros conceitos para uma teoria de significado geométrico do negativo e descreve os conteúdos das secções seguintes. Dessa crítica aos negativos Carnot conclui:

“ 1) que toda quantidade negativa isolada é um ente de razão (*être de raison*) e que aquelas que se encontram no cálculo não são outra coisa que formas algébricas, incapazes de representar alguma quantidade real e efetiva. 2) que cada uma dessas formas algébricas, tomadas abstraindo-se o seu sinal, não é outra coisa que a diferença de duas outras quantidades, absolutas, de modo que aquela que era a maior no caso onde se estabeleceu o raciocínio, torna-se menor no caso onde se pretende aplicar os resultados do cálculo.” (GP, p. xviii)

A problemática do significado do negativo o conduz, numa generalização, à questão geral de como relacionar métodos algébricos e objetos geométricos. Na realidade, ocorre o contrário; é este último problema que conduz à questão do significado do negativo. Frequentemente ocorrem situações nas quais, como o próprio Carnot diz, depois de se colocar um problema geométrico em equação, esta possui mais soluções que as possibilidades de interpretação coerente no contexto do problema geométrico original. Nesse contexto, D'Alembert falava de uma *abondance de l'algèbre*. (*Encyclopédie*, artigo *situation*.) Em Carnot, de forma implícita e, posteriormente, em Poncelet, de forma explícita, surge a concepção de que as equações algébricas com suas soluções não se relacionam com figuras geométricas isoladas e sim a sistemas de figuras correlativas entre si.

Na *Section I* Carnot desenvolve uma teoria de correlação para sistemas de pontos. Sistemas de pontos correlativos são, intuitivamente, sistemas que através de um movimento ou deformação contínua podem ser transformados um no outro. particularmente o conceito de sistemas correlativos serve para visualizar o significado dos sinais “mais” e “menos”. Carnot parte do princípio de que cada sistema de pontos em suas diferentes relações podem ser descritos por formas algébricas. Em determinadas deformações do sistema dado, algumas variáveis das descrições algébricas terão seus sinais trocados. Tais correlações ele

chama de “correlações indiretas”. As “correlações diretas”, por seu turno, não alteram as formas algébricas.

Na *Section II* Carnot desenvolve a teoria das correlações geométricas. Aqui ele distingue entre correlação de construção e correlação de posição. Cada sistema de pontos correlativo é agora representado por duas tabelas de correlação. A correlação de construção define o objeto geométrico geral, por exemplo, a classe de todos os triângulos não-degenerados. A correlação de sinais representa as possíveis transformações das partes individuais do objeto. O conceito de movimento contínuo produz um método para completar essas transformações e assim completar a tabela da correlação de posição.

A *Section III* introduz um novo problema: organizar em tabelas as fórmulas que exprimem todas as propriedades de um sistema de pontos. A idéia é ambiciosa: dado um sistema de pontos e todas as suas variações correlativas, organizar em tabelas todas as formas algébricas passíveis de formulação no sistema.

Ocorre que esse sistema de descrição é de difícil execução. Por um lado, a quantidade de relações geométricas cresce com o número de pontos do sistema. Num triângulo, “existem apenas seis coisas para considerar e num quadrilátero simples, cujos lados são prolongados até suas intersecções, já são 33, a saber, os quatro lados, as duas diagonais, os doze segmentos, cada dois deles formados em cada um dos lados e diagonais e, finalmente, os 15 ângulos que essas seis linhas formam duas a duas.” (GP. p. 77).

O número de problemas possíveis de formulação cresce mais rápido ainda. Num triângulo, trata-se, em geral, de encontrar três grandezas quando três outras são dadas e isto já fornece 20 possibilidades. Carnot tenta assim encontrar uma base - um *terme de comparaison* - para o sistema, para poder operacionalizar a idéia. Trata-se, portanto, de condensar o sistema original em “tabelas analíticas” ou, como Carnot escreve, em tabelas das “relações das diferentes partes do sistema original”. Com a ajuda da correlação de posição, essas tabelas analíticas se deixam ampliar para o objeto geométrico geral. As tabelas de correlação juntamente com as tabelas analíticas formam o “Método das tabelas”. Em seguida, a Trigonometria é usada como aplicação desse método.

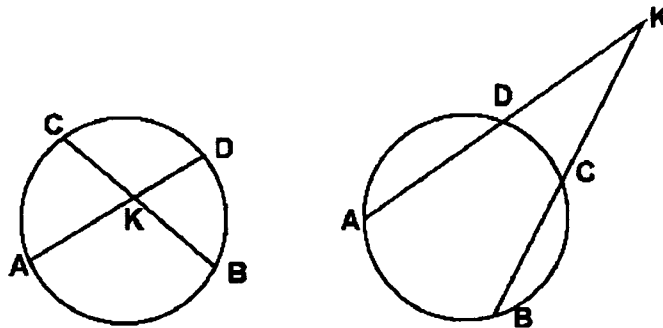
Na *section IV*, Carnot estabelece uma importante diferenciação na Geometria. As propriedades das figuras são examinadas em dois grupos separados: propriedades que contêm apenas relações angulares e as que tratam exclusivamente das relações métricas entre as grandezas. Como consequência dessa operação nasce a “teoria das transversais”. Essa teoria generaliza o Teorema de Menelaus: Dado um triângulo ABC e uma transversal que corta os três lados do triângulo nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . então  $P_1A \cdot P_2B \cdot P_3C = P_1C \cdot P_2A \cdot P_3B$ . Carnot também discute nessa secção uma teoria geométrica para o conceito mecânico de centro de gravidade.

A *Section V* traz a efetiva aplicação do método das tabelas para a solução de problemas geométricos. A *Section VI* trata exclusivamente de Geometria analítica, particularmente da introdução de novos sistemas de coordenadas. A Teoria das transversais introduzida na secção IV é abordada agora sob um outro ponto de vista e são discutidas novas aplicações às curvas cônicas.

### **A idéia de correlação.**

Essas idéias de Carnot, brevemente esboçadas acima, foram bem estudadas e discutidas em sua época. O texto circulou livremente na “*École Polytechnique*” de Paris e foi leitura obrigatória de pelo menos uma geração de matemáticos. A geração do chamado “Movimento de Renovação da geometria” (Daston 1986). Havia a tentativa, entre esses matemáticos, de trazer para a Geometria sintética, aquela Geometria que ao final do século XVIII ainda se encontrava no mesmo estágio deixado por Euclides, as vantagens inegáveis dos processos analíticos, mas sem perder as suas próprias vantagens. A síntese, como Carnot escreveu, “tinha algo de mais luminoso”, uma luminosidade oriunda de se poder trabalhar com os próprios objetos matemáticos “sem perdê-los de vista”, como acontecia na análise. As vantagens desta última eram a generalização de seus resultados e a mecanização de seus processos, que agilizavam sobremaneira os cálculos.

A Geometria de Carnot movimenta-se em torno dessas idéias. A consideração conjunta da Álgebra e Geometria desempenha, portanto, um papel decisivo no livro de Carnot e o leva ao principal conceito de sua Geometria, o conceito de “correlação de sistema”. Vejamos num exemplo a idéia básica que suporta o conceito.



Em ambas as figuras acima, vale a relação  $KA \cdot KD = KC \cdot KB$ . Na Geometria euclidiana tradicional, necessita-se de duas provas *separadas*, uma para cada posição do ponto K, interior ou exterior ao círculo. A idéia agora é considerar as duas figuras como correlativas, isto é, ver a segunda como oriunda da primeira através do “movimento contínuo” do ponto K. Essa “variação de posição” do sistema deve provocar “variação de sinal” nas variáveis das fórmulas que descrevem o sistema. No exemplo vale  $AD = AK + KD$  na figura da esquerda e  $AD = AK - KD$  na da direita. Isto significa que basta identificar quando uma determinada grandeza torna-se “inversa”. Toma-se então a fórmula já provada para um caso e providenciam-se as correspondentes mudanças de sinal. No caso, como as mudanças de sinal nos dois lados da igualdade é a mesma, a fórmula permanece “invariante”.

Esse conceito de correlação aponta na realidade para duas direções: a primeira, para uma nova concepção de Geometria, na qual os objetos geométricos não são mais vistos, como na concepção clássica de Euclides, como “isolados”, mas sim numa cadeia de figuras continuamente móveis. Essa foi a direção que influenciou Poncelete. Na segunda, a “concepção correlativa” dos sinais mais e menos e a “consideração correlativa” da aplicação da Álgebra à Geometria influenciou fortemente a importante discussão da época acerca do significado do negativo.

Essa dupla imersão do negativo na geometria carnotiana explica a recepção dupla da obra. Por um lado, a incursão de Carnot pela, como ele chama, “teoria das quantidades positivas e negativas” é vista de forma bem positiva. É o que pensa Chasles.

“A *Géométrie de position* contém uma concepção promissora sobre a natureza das quantidades positivas e negativas, com a qual se consegue a generalização de cada problema no sentido de que uma única prova é suficiente, independente de como as partes individuais de uma figura se comportam entre si; até então cada problema exigia tantas provas quantas fossem as possibilidades de variação dos pontos e linhas da figura. Essa concepção nos parece ser a idéia central da obra de Carnot.” (Chasles 1870, p.3).

Por outro lado, existiu uma recepção bem oposta a essa de Chasles. As idéias de Carnot acerca dos negativos são vistas agora ou como um impeditivo para as suas “boas idéias geométricas” ou destacadas do ambiente geométrico e lidas no contexto de uma fundamentação para a Aritmética e Álgebra elementares. Carnot entra como uma das principais personagens da chamada “questão dos negativos”, que abordaremos a seguir.

#### . O adversário da Análise e dos Negativos.

Na época da publicação do “*Géométrie de position*”, não havia ainda uma solução de consenso para a fundamentação da Álgebra e Aritmética elementares. Faltavam justificativas universalmente aceitas para os fatos mais simples do cotidiano matemático, como, por exemplo, que “menos vezes menos dá mais”. As inúmeras “provas” existentes eram apenas exercícios heurísticos e metafóricos. Mais complicado ainda era quando se passava para as chamadas questões metafísicas, tipo “O que é um número negativo?” ou “Como conceber uma quantidade menor que nada?” A solução de todas essas questões iria exigir uma mudança no auto-entendimento da Matemática, mudança essa que iria ocorrer ao longo do século XIX.

É evidente que a própria natureza do tema de Carnot, o negativo na Geometria, leva-o a entrar nessas delicadas questões colocadas acima; mas é sobretudo a maneira “provocadora” - com a qual ele aborda

o tema e critica as teorias então vigentes - que vai pavimentar um estranho caminho: Carnot é visto na Historiografia da Matemática como “Adversário da Análise e dos negativos”.

De fato, quase sem exceção, é assim que Carnot é visto na literatura secundária. Particularmente nos textos mais gerais da História da Matemática, que forçosamente tratam de forma resumida os diversos capítulos da Matemática, verifica-se com maior frequência essa ligação entre Carnot e uma certa indisposição contra o uso da Análise algébrica e particularmente do negativo. Bell, por exemplo, escreve: “Lazare Nicolas Margueritte Carnot havia esboçado com palavras seu programa subversivo, embora um pouco reacionário: ele queria liberar a Geometria dos hieróglifos da Análise.” (Bell 1967, p. 209) Kline no capítulo “Algebra in the Eighteenth Century” em Kline 1972 simplifica de tal forma o texto de Carnot que chega a julgá-lo como se ele não entendesse de fato os negativos. “Certamente os números negativos não foram bem entendidos até os tempos modernos [...] Carnot, o famoso geômetra francês, pensava que o uso dos números negativos levava a conclusões errôneas.” (Kline 1972, p. 593) Os exemplos poderiam ser multiplicados. Até em dicionários encontramos afirmações semelhantes. Naas e Schimid, por exemplo, escrevem no primeiro volume do *Mathematisches Wörterbuches* no verbete “Carnot”. “Ele não confia na Análise, mas enriquece a Geometria elementar e projetiva através de métodos (desenvolvimento de teoremas gerais a partir de casos particulares através de uma transformação contínua) e vários teoremas isolados.” (Naas 1967, v. I, p. 241) Mesmo os autores que se ocupam mais detalhadamente com a Matemática carnotiana não resistem à evocação dessa história. Stuloff, no seu exame do “conceito de Matemática” na primeira metade do século XIX, traz, exatamente, essa difundida adversidade de Carnot contra a análise para apoiar a sua tese principal acerca da “pureza de método” como uma característica dessa época. Ele escreve:

“O citado Carnot [...] queria desenvolver a Geometria independente da Análise através de um principio unificador. Em sua *Géométrie de position* (1803) ele recusa radicalmente a Análise e procura resumir todas as usuais diferenças de caso de um problema geométrico a afirmações gerais pela utilização de regras de sinais bem próprias. Essas regras de sinais não devem, porém, seguir as conhecidas regras Aritméticas, mas apenas através de considerações puramente geométricas. As usuais regras de sinais oriundas da Análise são consideradas falsas; elas não seriam adequadas à Geometria, a qual deveria tornar-se totalmente independente.” (Stuloff, p. 80)

No século XIX, esta história ganhou volume na Alemanha. Isso se explica, por um lado, pela tradução de Schumacher, que havia tornado a obra de Carnot acessível aos professores do secundário e aos autores de livros didáticos de Matemática. Por outro lado o *status quo* do negativo era aceito na Alemanha (Schubring 1988) sem maiores dificuldades por conta da bem difundida “Teoria das grandezas opostas”, e essa teoria foi um dos alvos da crítica carnotiana. Assim os alemães leram o *Géométrie de position* mais como uma proposta de fundamentação da Aritmética do que, como os franceses, como uma teoria de significado geométrico para o negativo. Surgiram vários artigos e livros cujo alvo principal era o combate às idéias de Carnot acerca dos negativos e da Análise. Seus títulos já são bastantes enfáticos: Niegemen escreve um “Desenvolvimento da teoria das grandezas opostas através das operações básicas da Aritmética geral e eliminação das objeções levantadas por Carnot.”, e Busse uma “Comparação entre as minhas opiniões e as de Carnot acerca da Álgebra e entre nossas propostas de eliminação de suas incorreções.”

No nosso século um dos livros que mais contribuíram para a difusão dessa história sobre Carnot é o *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926) de Félix Klein. Ele, em sua descrição da nova Geometria que nascia em Paris com a criação da *École Polytechnique*, dedica alguns parágrafos ao *Géométrie de position* dos quais surge uma imagem de Carnot que é repetida em vários livros. Para Klein, a *Géométrie de position* de Carnot

“é um livro muito estranho. Ela contém uma idéia bem moderna: é preciso na Geometria não separar os diferentes casos que uma figura pode oferecer de acordo com a disposição de suas partes, como acontecia desde Euclides, mas através da introdução do Princípio do sinal considerá-las de forma única. Carnot, entretanto, não expõe suas idéias dessa forma. Pelo contrário, ele volta-se de forma obstinada contra toda a teoria usual de sinais da Análise, que



ele declara mal fundamentada e contraditória. [...] Para a sua necessidade geométrica, ele pretende que a regra dos sinais nasça apenas da consideração da figura e de suas transformações e, dessa forma, criar uma, 'théorie des figures corrélatives'. Dessa forma, a Geometria deve libertar-se dos "Hieróglifos da Análise" e renascer em forma puramente sintética. (Klein 1926, p. 79) Essa história de Klein passou a ser repetida por vários autores; Carnot não é mais apenas o "adversário do negativo e da Análise", ele deseja também ele deseja também "libertar a Geometria dos hieróglifos da Análise". Vejamos o que são esses hieróglifos.

### Os hieróglifos da análise.

Para Carnot, uma determinada operação na Matemática é definida apenas para um certo campo de valores. Na subtração  $a - b$ , por exemplo, é preciso que  $a > b$ . A ampliação desse campo, segundo ele, conduz a uma operação impossível; e quando se tenta executar operações impossíveis com objetos reais, surgem o que ele chama de "quantidades absurdas", que não correspondem a nenhum objeto realmente existente. É o caso dos números negativos isolados. Com sua diferenciação entre *quantité* (*pour désigner uniquement la chose même dont on recherche les propriétés*) e *valeur* (*...en général, toute espèce de fonction algébrique*), Carnot intenciona exatamente abrir o caminho para o trabalho com essas entidades fictícias, com esses *êtres de raison*.

O problemático em Carnot, e ao mesmo tempo a sua virtude, é que ele tenta nessa explanação geral acerca da "metafísica dos negativos" uma espécie de conciliação entre um pensamento matemático que se esgotava e um que iria se construir ao longo do século XIX. Uma conciliação entre uma Matemática substancial, típica dos séculos anteriores, que exigia sempre uma reificação qualquer de seus objetos e uma Matemática relacional, cujos objetos de estudo não são mais "coisas", mas as relações que se estabelecem entre elas. É sintomático que Carnot lance mão da diferenciação entre os métodos da análise e da síntese, para justificar o uso na Matemática dessas quantidades "absurdas" ou "impossíveis". Carnot nunca falou em eliminá-las.

Carnot descarta de saída as tradicionais caracterizações que vêem a diferença apenas no plano metodológico: a síntese trabalharia do conhecido para o desconhecido, enquanto que a análise faria o percurso inverso. Para Carnot, a diferença deve ser procurada também no plano ontológico, isto é, pela relação entre objeto e método. Dito de outra forma, é também o contexto operativo e não apenas a natureza intuitiva dos objetos matemáticos que podem conferir significados. A síntese só opera com objetos reais enquanto que a análise utiliza também os "hieróglifos", que deve ser entendidos num contexto operativo. A diferença essencial, segundo Carnot, é que a síntese alcança seus resultados pela formação de uma cadeia de proposições nas quais nunca é perdida a visão dos objetos com os quais se trabalha.

"[...] l'analyse, au contraire, y arrive d'abord par un chemin rapide qui lui est propre, en formant sur sa route une autre chaîne, non d'objets réels comme la précédente, mais de hiéroglyphes, qui le plus souvent ne désignent que des êtres de raison." (GP, p.12)

O que Carnot intenciona ao final é usufruir das vantagens da análise — a generalização que ela providencia e a mecanização de seus processos — e ao mesmo tempo coordenar seus resultados num contexto de aplicação. De que outra forma os *êtres de raison*, as "quantités innintelligibles", as "quantités absurdes", as "formes algébriques", as formules implícites" podem ganhar significado numa Matemática dominada pelo empirismo? Carnot, portanto, nunca pensou em eliminá-las da Matemática. Ele mesmo escreveu:

"On a vu [...] qu'on ne doit point rejeter comme inutiles les formules implicites; c'est même proprement l'emploi de ces formules implicites qui fait le caractère de l'analyse, et qui lui donne un si grand avantage sur la synthèse." (GP, p. 9).

Comparando essa citação de Carnot com a seguinte de Dieudonné, verificamos dois elos de uma mesma história e poderíamos até indagar: *Meanigless symbols* significam "hieróglifos"?

"Nos fundamentos nós acreditamos na realidade da Matemática, mas evidentemente que quando os filósofos nos atacam com seus paradoxos recuamos e nos protegemos atrás do formalismo, *Matemática é apenas uma combinação de símbolos sem significado* e lançamos

mão então dos capítulos 1 e 2 da teoria dos conjuntos. Finalmente somos deixados em paz para retornarmos à nossa Matemática e fazer o que sempre fazemos, com a sensação que cada matemático possui de estar trabalhando com algo real. Essa sensação provavelmente é uma ilusão, mas é muito conveniente. Essa é atitude de Bourbaki em fundamentos.” (Dieudonné 1971, p. 251-266)

### Um desafio

O *Géométrie de position* é realmente um livro “estranho”. Klein tem razão nesse ponto. É um livro que a menos de uma década do bicentenário de sua publicação ainda desafia os historiadores. O desafio de acompanhar num texto de geometria elementar<sup>5</sup> a diversidade e a riqueza das observações, a maioria marginais, matemático-filosóficas e vê-las como estágio preliminar e potencial de futuros e importantes desenvolvimentos da Matemática. O desafio de perceber a sensibilidade matemática de um matemático que não era do ramo, pois Carnot foi antes de qualquer coisa um político.

Ao lermos que as idéias desenvolvidas por Carnot no seu *Géométrie de position* são “aqui e ali riquíssimas, na maioria das vezes, porém, elementares ao nível da trivialidade” (Klein 1926, p. 79) e que elas, ao mesmo tempo, trazem o germe “dos trabalhos de Lie, de Cartan e da Mecânica contemporânea” (Bruter 1987, p. 40), vemos aberto o campo para a formulação de uma “questão Carnot” na Matemática, nos moldes como Reinhard formulou para o político.

Marcel Reinhard, autor de uma das mais completas biografias de Carnot, acredita que, mesmo diante dos exaustivos estudos e trabalhos já dedicados ao político, ainda havia em 1954 uma “questão Carnot”. Ele se pergunta:

“Lazare Carnot foi aquele sábio, aquele moderado que uma tradição um pouco hagiográfica tem oferecido à posteridade? Ou ele foi, ao contrário, um revolucionário no sentido mais pleno da palavra, disposto às transformações mais radicais pelos meios mais violentos? Foi ele coerente consigo mesmo ao longo de toda a sua vida, mais ainda no isolamento da adversidade que no exercício de um poder quase ditatorial? Ou, como seus contemporâneos, ele evoluiu, se adaptando às circunstâncias e aos sucessivos regimes? Enfim, ele foi o “*Organisateur de la Victoire*” ou usurpou a sua reputação?” (Reinhard 1950, p. 10)

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, E. T. *Die Großen Mathematiker*. Düsseldorf, Wien: Econ, 1967.

BRUTER, C. P. *Del' Intuition à la Controverse*. Essai sur quelques controverses entre Mathématiciens. Paris: A. Blanchard, 1987.

BUSSE, F. G. *Vergleichung zwischen Carnots und seiner Ansicht der Algebra und unserer beyderseitig vorgeschlagenen Abhelfung ihrer Unrichtigkeit*. Freiberg: Craz und Gerlach, 1804.

CARNOT, L. N. M. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Paris: Albert Blanchard, 1797, Edição 1970.

\_\_\_\_\_. Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie. In Boussut, A. C.: *Cours de Mathématiques, géométrie et application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, 1800.

\_\_\_\_\_. *De la corrélation des figures des géométrie*. Paris: Duprat, 1801.

\_\_\_\_\_. *Neue Eigenschaften der Vielecke*. Dresden: Heinrich Gerlach, 1802.

5 Carnot escreve: “La plupart des questions traitées dans cet ouvrage, appartiennent à la géométrie élémentaire, mais lorsqu'on pense que c'est cette géométrie qui fut si féconde entre les mains des Archimède, des Hypparque, des Appollonius; que c'est la seule qui fut connue des Néper, des Viette, des Fermat, des Descartes, des Galiléé, des Pascal, des Huygens, des Roberval; que les Newton, les Halley, les Maclaurain, la cultivèrent avec une sorte de prédilection, on peut croire que cette géométrie a ses avantages.” (GP, p. xxx)

- \_\_\_\_\_. *Géométrie de position*. Paris: Duprat, 1803.
- \_\_\_\_\_. *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*. Paris: Courcier, 1806.
- \_\_\_\_\_. *Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie*. Altona: J. F. Fammerich, Band I, 1808, Band II, 1810.
- \_\_\_\_\_. *Révolution et Mathématique I*. Introdução de Jean-Paul Charnay. Paris: Éditions de l'Herne, Tome I 1984, Tome II 1985.
- CARNOT**, H. *Mémoires sur Carnot par son fils*. Paris: Pagnerre, Libraire Éditeur, Tome premier, 1861, Tome Second 1863.
- CHARNAY**, J. P. Thèmes et Styles chez Lazare Carnot In: **CARNOT**, L. N. M. *Révolution et Mathématique I*. Paris: Éditions de l'Herne, Tome I 1984, p. 7-15.
- CHASLES**, M. *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie Moderne, suivi d'un Mémoire de Géométrie sur deux Principes Généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie*. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1837, Edição 1989.
- \_\_\_\_\_. *RAPPORT sur les Progrès de la Géométrie*. Paris: L'Imprimerie Nationale, 1870.
- DASTON**, L. J. The Physicalist Tradition in Early century French Geometry. *Studies in History and Philosophy of Science* v.17, n. 3, p. 269-295, 1986.
- DIEUDONNÉ**, J. *Geschichte der Mathematik 170 - 1900*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1978, Edição 1985.
- FINK**, K. *Lazare Nicolas Marguerita Carnot. Seine leben und seine Werke*. Tübingen: Verlag der H. Lauppschen Buchhandlung, 1894.
- GILLISPIE**, C. C. *Lazare Carnot Savant*. Princeton: Princeton UP, 1971.
- GAUSS**, C. F. a) Briefwechsel C. F. Gauß - H. M. Olbers. In *Werke, Ergänzungsreihe IV*, Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1976.
- \_\_\_\_\_. b) Briefwechsel C. F. Gauß - H. C. Schumacher. In *Werke, Ergänzungsreihe V*, Hildesheim, New York: Heorg Olms Verlag, 1976.
- GRASSMANN**, H. *Gesammelte Mathematische und Physicalische Werke*. Bronx, New York: Chelsea Publishing Company, Erster Band Ersten Theil, 1969.
- KLEIN**, F. *Vorlesungen über die Entwicklung der mathematik im 19. Jahr-hundert*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1926, Edição 1979.
- KLINE**, M. *Mathematical thought from ancient to the modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.
- MONGE**, G. *Géométrie Descriptive*. Paris: Baudoin, Éditions Jacques Gabay, 1795, Edição 1989.
- NAAS**, J. S. et al. *Mathematisches Wörterbuch*. Berlin, Stuttgart: Akademie Verlag, B. G. Teubner, 1967.
- NETO**, F. R. *Géométrie de position - Eine Studie zum Werk von Lazare Carnot (1753-1823)*. Dissertação de doutorado. IDM-Universität Bielefeld, Alemanha, 1992.
- NIEGEMANN**, A. *Durchführung der Theorie der entgegengesetzten Größen durch die Grundoperationen der allgemeinen Arithmetik und Beseitigung der von Carnot dagegen erhobenen Einwendungen*. Emmerich, 1834.
- PONCELET**, J. - V. *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris: Gauthier-Villars, 1822, Edição 1865.
- REINHARD**, M. *Le Grand Carnot. De l'Ingenieur au Conventionnel 1753-1792*. Paris: Hachette, 1950.
- \_\_\_\_\_. *Le Grand Carnot. L'Organisateur de la Victoire 1792-1823*. paris: Hachette, 1952.

- SCHUBRING, G.** Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. "Petit x", n. 12, p. 5-32, 1986.
- \_\_\_\_\_. Epistemologische Debatten über den Status negativer Zahlen und die Darstellung negativer Zahlen in deutschen und französischen Lehrbüchern 1795-1845. *Mathematische-Semesterberichte* XXXV, Helf 2, p. 183-196, 1988.
- SIMON, M.** *Über die Entwicklung der lementar-Geometrie im XIX Jahrhundert.* Leipzig: B. G. Teubner, 1906.
- STRUIK, D. J.** *A Concise History of Mathematics.* New York: Dover Publications, 1948, Edição 1967.
- STULOFF, N. N.** Über den Wissenschaftsbegriff der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. In *Wissenschaftskonzepte des 19. Jahrhunderts*, Ed. Diemes, A. p. 71-89.

---

FERNANDO RAUL NETO é Doutor Päd. pela Universidade de Bielefeld - Alemanha  
Endereço: UFRPE - Área de Matemática - Rua D. Manoel de Medeiros s/n  
52.171-030 - Dois Irmãos - Recife - Pernambuco - Brasil

**Revista da SBHC, n. 12, p. 53-64, 1994**