A IMPORTÂNCIA RELATIVA DO NÚMERO ORDINAL E CARDINAL NA PRIMEIRA VERSÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS[1]

DENISE SILVA VILELA

Resumo: O tema do presente estudo é a primeira formulação da teoria dos números transfinitos de G. Cantor exposta no artigo de 1883 e a tradução de parte desse artigo para o francês, publicada nesse mesmo ano. Constata-se nessa tradução a alteração na ordem das seções. Nosso objetivo é a identificação da importância do conceito de ordinalidade e de potência na teoria dos números transfinitos nessas duas publicações. Com isso pretendemos verificar se a alteração na tradução relaciona-se com a maior importância que a noção de potência passa a ter nas formulações posteriores.

Abstract: The object of this study is the first statement of the theory of transfinite numbers by G. Cantor, exposed in the article of the year 1883, and part of the french translation, published in the same year. In this translation can be noticed a change in the sections order. Our intention is to identify the relevance of the concepts of ordinality and power in the theory of transfinite numbers limited to these publications. In this case we intend to certify whether the change in translation is related to the major importance that the notion of power might have to following works.

1 Introdução

O tema deste artigo é a teoria dos números transfinitos de G. Cantor (1845-1918) desenvolvida nas últimas décadas do século passado, mais especificamente a importância relativa do conceito de potência e de número ordinal na teoria dos transfinitos em sua primeira elaboração, realizada em *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* de 1883.

Este tema foi selecionado devido a relevância dos conceitos de potência e número ordinal na teoria de Cantor. Verificamos em um primeiro contato com os textos relativos a essa teoria, a importância dos dois conceitos. Por um lado, o primeiro número transfinito que aparece explicitamente denotado é , um número ordinal. Por outro lado, percebemos que a distinção entre conjuntos infinitos, base para criação da teoria dos transfinitos, é realizada pela comparação do que Cantor chamou 'potência dos conjuntos'- ou cardinalidade dos conjuntos, como denominou mais tarde[2].

1 Este artigo foi extraído da Monografia de Especialização em História da Ciência. Agradeço ao prof. Dr. Roberto Martins e ao colega Carlos Gonzaléz que contribuíram para a realização da monografia. Acrescento ainda que este estudo foi apresentado no IV Seminário Nacional de História da Ciência, em 6 de junho de 1993.

2 É preciso antes observar que o termo número cardinal passa a ser utilizado por Cantor como sinônimo de potência ao longo do desenvolvimento de sua teoria, mas não nesse período inicial de sua elaboração. Entretanto, ao nos referirmos à 'cardinalidade de um conjunto' queremos dizer exatamente a mesma coisa que 'potência de um conjunto' e, ainda que haja um certo anacronismo no uso do termo cardinalidade, não estamos por isso nos referindo a números.

Verificamos a relevância da questão através da constatação dessa discussão na literatura secundária. P. Jourdain e J. Dauben apresentam afirmações contrárias quanto à importância das noções de ordem e potência na primeira apresentação da teoria dos números transfinitos. Jourdain considera a noção de potência a mais relevante em toda a teoria de Cantor, portanto também no artigo de 1883:

> "....a concepção de potência a qual Cantor sempre considerou como a mais fundamental de toda sua teoria de conjuntos" (Jourdain, 1915, p. 51).

Por outro lado, J. Dauben acredita que o conceito de número ordinal foi o gerador dos números transfinitos o que indica, entre outras coisas, a maior importância deste conceito no início de sua teoria:

> "O fato de que foi rapidamente desenvolvida uma notação especial e distinta indicou maior importância que foi o ordinal, no início do desenvolvimento da teoria dos conjuntos de Cantor. E, acima de tudo, são os ordinais que tornam possível a definição dos cardinais transfinitos." (Dauben, 1979, p. 180).

É importante esclarecer que os dois autores concordam que a noção de ordinal foi usada para definir a de potência em 1883, como veremos adiante. Mas, o que estamos considerando para orientar essa discussão é a afirmação da maior importância , por um lado, da noção de potência e, por outro, da noção de número ordinal, ambas consideradas nas formulações iniciais da teoria dos números transfinitos.

A motivação para essa investigação diz respeito a um dado bibliográfico curioso, não mencionado em nenhum texto da bibliografia percorrida durante esse estudo. Uma estranha disposição do conteúdo chama a atenção na tradução do *Grundlagen* para o francês.

A organização da tradução de parte deste artigo para o francês, intitulado *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, onde apenas as seções de caráter matemático seriam utilizadas a pedido do editor para publicação na revista *Acta Mathematica,* foi alterada. Cantor autorizou que as seções essencialmente filosóficas fossem excluídas. Porém, apesar da tradução ter sido supervisionada pelo autor (Dauben, 1979, p. 96), aquelas seções integralmente traduzidas não conservam a ordem original.

Na publicação de parte desse artigo na revista *Acta Mathematica* 2, 1883, devido à alteração da ordem das seções, a teoria dos números ordinais passa a compor a parte final do artigo e os resultados a respeito da potência ocupam a parte inicial da edição.

Diante desse dado bibliográfico e do tema proposto, tomamos como objetivo a identificação da importância do conceito de ordem e de potência na primeira formulação da teoria dos números transfinitos e a análise da alteração na ordem das seções na tradução, em relação a qual formulamos a questão: a alteração na ordem das seções na tradução está de fato relacionada com a importância maior que Cantor passa a dar à teoria cardinal dos números transfinitos?

Estamos assumindo, conforme dito imediatamente acima, que Cantor ao longo de suas pesquisas sobre a teoria dos números transfinitos passa a dar maior ênfase à teoria dos números cardinais. Dauben e Jourdain, entre outros, concordam que a noção de cardinalidade passa a ser mais enfatizada por Cantor ao longo das publicações que expõem a teoria dos números transfinitos e que a ordinalidade é básica para o estabelecimento da seqüência de números cardinais, isto é, a ordinalidade passa a ser um recurso para a precisa definição da seqüência dos cardinais. Ocorreu que Cantor, com o objetivo de estabelecer definitivamente o novo número, desenvolveu a teoria dos tipos de ordem e dos números ordinais. Entretanto, as dificuldades que surgiram por esse caminho e as críticas que recebia devem ter levado o autor a definir o número cardinal transfinito independentemente do número ordinal transfinito. Esses todos foram definidos pelos mesmos recursos, usados inclusive para definição dos números inteiros positivos. Como resultado dessa mudança de abordagem e dos problemas sem solução da teoria dos ordinais, o artigo de 1895, parte I do *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* que representa, junto com a parte II de 1897, 'a maior publicação matemática de Cantor' (Dauben, 1979, p. 169) e que 'apresenta as afirmações finais e logicamente mais apuradas dos muitos e mais importantes resultados da longa série de artigos publicados a partir de 1870' (Jourdain, 1915, p. v), evidencia a teoria dos números cardinais.

Com esse pressuposto partiremos para uma breve exposição do conteúdo relativo às noções de potência e ordem na teoria dos números transfinitos, conforme apresentada na versão original. Em seguida, tendo conhecimento do conteúdo da tradução, registraremos a alteração das seções 2, 3, 11, 12 e 13, interpretaremos a nova seqüência do artigo. Com isso, pretendemos identificar a importância da noção de ordem e de potência em cada uma das publicações e avaliar até que ponto a alteração na tradução relaciona-se com a ênfase de Cantor a essas noções.

2 A primeira versão da teoria dos números transfinitos de G. Cantor, 1883

Cantor publicou em 1883 a primeira versão da teoria dos números transfinitos, sob o título *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.* Nesse artigo o autor pretende apresentar 'uma generalização da noção de números inteiros', isto é, pretende estender o conjunto dos números inteiros positivos [3], através da introdução dos números infinitos, que recebem um novo nome -'números transfinitos'- dado o significado delimitado e específico que passam a ter na sua teoria. Por esse motivo também esse artigo que foi publicado originalmente como parte 5 de uma série que se intitula *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten,* foi reeditado isoladamente com o título *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* ao qual nos referimos.

Nesse artigo, Cantor buscava estabelecer e justificar a existência dos números transfinitos, que já havia sido concebida anteriormente. A origem dessa noção nos estudos de Cantor está apresentada no artigo de 1874[4], onde ele demonstrou que o conjunto dos números irracionais, tema que ocupava os matemáticos da época, não é enumerável, isto é, ficou demonstrado que não é possível corresponder um conjunto enumerável, por exemplo o dos números naturais, com o conjunto dos números irracionais, elemento a elemento[5]. Está implícito nesse resultado que existem conjuntos infinitos de 'tamanhos' diferentes, por exemplo, o conjunto dos números naturais 'é menor' que o conjunto dos números irracionais. O resultado desse artigo é a caracterização dos números reais[6], conteúdo da área da 'análise matemática', área de pesquisa de Cantor até então. Uma de suas importantes consequências extrapola a área da análise pela concepção de conjuntos infinitos distintos, abrindo caminho para uma nova teoria, a dos números transfinitos. A noção de potência [*Mächtigkeit*] foi introduzida para expressar o que intuitivamente seria chamado de 'tamanhos' diferentes de conjuntos infinitos, que é assim expresso com o emprego do novo termo: os conjuntos infinitos possuem potências diferentes.

Cantor admite ser conhecido o significado de potência de conjuntos quando inicia o artigo de 1883[7] definindo o 'infinito atual', conceito que merece longas discussões nesse texto. Ele define na primeira seção do artigo o *infinito impróprio,* ou infinito atual, que significa considerar o infinito como um todo ao lado da noção de infinito próprio, comumente aceita:

> "...a primeira forma se apresenta como um infinito variável [o infinito potencial] e a segunda como um infinito absolutamente determinado [o infinito atual]" (Cantor, 1883, s.1 p. 70).

---

3 Usamos para designar esses números a expressão 'números naturais', que não era empregada por Cantor.

4 "*Über eine Eingenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*", publicado em 1874. Uma tradução para o francês foi publicada em 1883. Uma tradução do artigo de Cantor de 1874 foi publicada n. 10 da Revista da *Sociedade Brasileira de História da Ciência,* onde é enfatizada a origem da teoria dos números transfinitos (Vilela, 1993, p. 85-93).

5 Chamamos essa correspondência de correspondência 1-1. Um conjunto é dito enumerável quando é possível correspondê-lo 1-1 com os números naturais.

6 Há outros resultados que não são relevantes aqui, como outra demonstração do teorema de Liouville, resultado explicitado pelo próprio autor (Cantor, 1874, p. 306).

7 No artigo de 1883, Cantor afirma já ter apresentado a noção de potência nos artigos de 1874 e 1877. No artigo de 1874, é dado o primeiro passo para introdução dessa noção, como indicamos acima. No artigo de 1877, Cantor determina quando dois conjuntos tem a mesma potência: quando é possível estabelecer uma correspondência 1-1. Em um artigo de 1878, potência de um conjunto corresponde ao 'número de elementos' quando se trata de conjuntos finitos (ver citação adiante).

Conceber o infinito como um todo é um caso particular da noção de potência[8]. Porque, entre outras coisas, ela implica em considerar os conjuntos em sua totalidade. Posteriormente ela foi renomeada por 'número cardinal', e é definida em 1883, como veremos, como dependente da noção de ordem que passaremos a expor.

A noção que possibilitou a definição do número transfinito, no artigo de 1883, é a de enumeral (*Anzahl*)[9] e a de conjunto bem ordenado, ambas expostas na seção 2. O enumeral de Cantor expressa um tipo de ordem em que os elementos de um conjunto estão dispostos:

> "Outro grande ganho tributável ao novo número [transfinito], no meu modo de entender, é um *novo* conceito que não existe previamente, o conceito de *enumeral* dos elementos de um *conjunto bem ordenado* infinito. Esse conceito é sempre expresso por um número inteiramente determinado do nosso campo numérico expandido, assumindo apenas que a ordem dos elementos do conjunto- a ser definida abaixo- é determinada." (Cantor, 1883, s. 2, p. 71- grifo do autor).

Observamos nessa citação que Cantor introduz um conceito intermediário entre conjuntos e números para alcançar o novo número a partir de conceitos já existentes. Ele partiu da existência, amplamente admitida na matemática, de conjuntos finitos, conjuntos infinitos[10] e dos números inteiros positivos; ele define então a noção de *enumeral* de um conjunto, a qual é atribuída um número, que é finito quando o conjunto é finito, ou é *transfinito* quando o conjunto é infinito. Por exemplo, ao conjunto {1, 2, 3} associa-se o enumeral 'assumindo apenas que a ordem dos elementos do conjunto', o qual é expresso pelo número 3; ao conjunto {1,2,3,....v,...}associa-se o numeral assumindo apenas que a ordem dos elementos do conjunto', o qual é expresso pelo número ω (não explicitamente denotado nessa seção) do campo numérico expandido. Esse campo de números é composto de números finitos e transfinitos que são formados adiante pelos *mesmos* princípios.

Por trás dessa noção de enumeral está a suposição de poder ordenar um conjunto qualquer, que Cantor denomina *conjunto bem ordenado.* Cantor define da seguinte maneira o conjunto bem-ordenado[11]:

> "Por um conjunto ou sistema *bem ordenado* entende-se todo sistema bem definido onde os elementos são entre eles unidos por uma sucessão dada e determinada, de modo que haja *um primeiro elemento do sistema;* cada elemento (desde que não seja o último da sucessão) é seguido imediatamente de um outro determinado, e a cada sistema arbitrário de elementos, finito ou infinito pertence um elemento determinado que é seguido imediatamente dentro da sucessão (desde que dentro do conjunto haja elementos que seguem todos os elementos do sistema parcial considerado)" (Cantor, 1883, s.2 p. 72- grifo do autor).

Para Cantor todas essas noções parecem muito corretas e, portanto, ele acredita que:

> "é sempre possível colocar todo conjunto *bem-definido* na forma de conjunto bem ordenado" (Cantor, 1883, s 2, p. 72).

Ainda na seção 2, Cantor anuncia a relação, que fica mais clara depois da formação das classes apresentada na seção 11, entre enumeral e potência, os quais correspondem-se reciprocamente de modo determinado (ver Cantor, 1883, s.2 p. 72).

Na seção 3 Cantor desenvolve a aritmética dos enumerais, ou números ordinais.

---

8 Jourdain concorda com isso: "A concepção de potência que contém, como um caso particular, a noção de número num todo [*whole number*] pode, diz Cantor, ser considerada um atributo ...(Jourdain, 1915, p. 46).

9 O termo *Anzahl* será traduzido aqui por enumeral, seguindo a orientação de P. Jourdain (Jourdain, 1915, p. 52) e Hallett (Hallett, 1984, p. 51, n.1) para diferenciar da palavra *Zahl*, que se traduz por número. Mais tarde, Cantor refere-se a este mesmo conceito pela expressão *número ordinal.* Eventualmente, se não houver prejuízo no sentido, usamos a expressão anacrônica *número ordinal* (*Ordnungzahl*) para designar o enumeral. De fato, para nosso tema a distinção entre os dois termos não é importante. Essa distinção é considerada quando abordamos filosoficamente a noção de número em Cantor.

10 O intuicionismo estrito representa uma exceção quanto a possibilidade de admitir o infinito (ver Tiles, 1989, p. 6).

11 Esta é uma forma do que hoje denominamos 'axioma da escolha'.

A noção de potência nesse artigo é concebida a partir das 'classes de números' que, por sua vez, são 'geradas pelos princípios de formação dos números'. Apresentamos o significado de cada uma dessas noções, anunciadas na seção 1 mas desenvolvidas na 11.

É preciso notar, porque estamos preocupados também com a ordem de exposição do conteúdo, que as seções 4, 5, 6, 7, 8 e 9 não foram traduzidas para o francês por apresentarem discussões filosóficas[12]. Por isso também não discutiremos seu conteúdo. A seção 10 não é excluída da tradução provavelmente porque além de discussão filosófica sobre o contínuo, discute também a potência dele.

Cantor vai formar os números, finitos e transfinitos, através de três princípios que determinam uma seqüência de números que, por sua vez, apresentam divisões 'naturais' denominadas classes de números. Essa foi sua estratégia para justificar o novo número: apresentar o número transfinito e os números finitos a partir dos mesmos princípios[13]. Pelas palavras de Cantor, apresentamos os princípios de formação dos números:

> "A formação dos números inteiros reais [*reellen*][14] finitos [1,2, 3,...υ,...] repousa sobre o princípio de adição de unidades a um número já formado. Denominarei o primeiro princípio de formação." (Cantor, 1883, s.11 p. 87)

Parafraseando Cantor na seqüência desta seção, ele introduz ω -o primeiro número transfinito- através do *segundo princípio de formação*: nos infinitos números da classe (I) [aqueles formados pelo primeiro princípio], não há um número maior que todos os outros. Seria, portanto, contraditório falar de um número máximo da classe (I); contudo, pode, por outra parte, imaginar-se um novo número, que chamaremos de ω, e que serve para exprimir todo o conjunto (I) que foi dado antes pela lei de sucessão natural. Pode mesmo representar o novo número ω como limite para o qual tendem os números ν como condição de ω ser o menor inteiro que segue todos os números υ, de modo que declara-se superior a todos os números υ. O novo número ω representa ao mesmo tempo a seqüência dos números finitos em sua ordem natural e a unificação das unidades num todo "similar ao caminho pelo qual υ é...[ambas as coisas, seqüência e totalidade]" (Cantor, 1883, s. 11, p. 87).

A combinação e a aplicação sucessivas, do primeiro e segundo princípio de formação. geram a segunda classe de números — ordinais transfinitos — mas não permitem transpô-la para prosseguir a formação dos números: pelo segundo princípio obtém-se ω, limite da primeira classe de números 1, 2, 3,...υ.... Aplicando novamente o primeiro princípio de adição de unidades sobre ω, obtém-se: ω, ω+1, ω+2, ...ω+υ...., o limite desse seqüência considerada desde o 1 é 2ω, sobre o qual pode aplicar-se novamente o primeiro princípio e assim numca termina a formação da segunda classe de números: 1, 2, ,3,...υ,...ω, ω+1, ω+2,...ω+υ, 2ω+1, 2ω+2, 2ω+3, 2ω+υ,...3ω., 3ω+1,...υω,..., ω2,...$\upsilon_0\omega^n+\upsilon_1\omega^{n-1}+\upsilon_n$,...ωω,...$\omega^{\omega^{\omega}}$ ...α,...

Para transpor a segunda classe, constituída pelos números formados indefinidamente pelos dois princípios, Cantor define o terceiro princípio, denominado *princípio de limitação*, que produz cortes na sucessão dos transfinitos interrompendo a formação dos números, possibilitando transpor da segunda para a terceira classe, e dessa para a seguinte, e assim por diante.

Aplicando sucessivamente os três princípios, obtém-se todos os números ordinais e ainda, simultaneamente, um representante de cada potência:

> "É possível obter, dentro da seqüência absolutamente infinita de números, divisões naturais, que eu denominarei classe de números...A primeira classe de números (I) é o sistema de números finitos 1,2, 3, ...v", ..; vem em seguida a segunda classe de números(II), composta de certos números inteiros [*ganzen*] infinitos α de acordo com sua ordem de sucessão determinada: ω, ω+1, ω+2,...2ω. 2ω+1,..., $\upsilon_0\omega^n+\upsilon_1\omega^{n-1}+\upsilon n$,...$\omega^\omega$,...$\omega^{\omega^{\omega}}$...α,...à

---

12 A seção nove apresenta a definição de número real de Cantor, publicada originalmente em 1872.

13 Cantor reafirma esse objetivo e método de generalizar em 1895 (Cantor, 1895, s.5 p. 97-98).

14 Pelo sentido da sentença, pode-se perceber que Cantor usa aqui, como em outros momentos do texto, a palavra 'real', como um adjetivo relativo à existência do número, e não no sentido usual na matemática- o conjunto dos números racionais e irracionais. As palavras em alemão são diferentes:, reellen e realen Zahlen, respectivamente. Nas traduções essa diferença não aparece. Ver (Dauben, 1979, p. 328, nota 8).

segunda classe segue a terceira, e depois a quarta classe de números e assim sucessivamente" (Cantor, 1883, s.1 p. 71[15])

A noção de potência nesse artigo é concebida a partir da noção de classe de números que, por sua vez, são geradas pelos princípios de formação destes. Tendo definido os princípios e formado as classes de números, Cantor associa a cada classe uma potência: aos conjuntos capazes de correspondência 1-1 com a primeira classe de números concede-se a menor potência do sistema infinito [de potências] (Cantor, 1883, s.1 p. 71); a potência da segunda classe de números difere da potência da primeira classe (demonstrado na seção 12) e também é a potência imediatamente superior (demonstrado na seção 13). Essa potência será denominada potência da segunda classe de números ou segunda potência. De maneira análoga, a terceira classe corresponde à terceira potência, etc. Isso quer dizer que os mesmos princípios de formação que introduzem os números ordinais determinam, na seqüência deles, 'cortes' que diferenciam as classes por suas potências correspondentes:

> ."...as classes de números...mostram-se como representantes naturais da lícita seqüência ascendente das potências dos conjuntos bem definidos." (Cantor, 1883, s.1, p. 71).

Vemos com isso que as potências são definidas a partir das classes, ou seja, com base nos números ordinais[16]. Vale notar que Cantor percebe a independência entre as noções de potência e ordem. Porém, ele opta por determinar essa noção a partir da classe e, portanto, dependente da noção de ordem. Observamos isso na definição explícita de potência:

> "Em sistemas finitos a potência corresponde ao *enumeral* dos elementos, pois esses sistemas, como se sabe, independentemente da forma como estão arranjados, possuem o mesmo enumeral de elementos.
>
> Para sistemas infinitos ao contrário, não é possível uma generalização, nem a partir de meu trabalho nem de outros, e dizer que a potência é o enumeral de elementos, definidos com precisão. Mas pode-se atribuir a cada sistema uma potência determinada e **completamente independente da ordem de seus elementos**." (Cantor, 1883, s.1 p. 71 -grifo nosso).

Concluímos essa seção salientando que Cantor, nesse artigo de 1883, definiu todos os números, finitos e transfinitos, através dos princípios de formação. Esses números assim formados são ordinais que expressam, cada um, a seqüência ordenada de números, anterior a eles. Todo conjunto possui um enumeral que expressa a disposição dos elementos na seqüência ordenada; possui também uma potência determinada, que não é um número (Dauben, 1979, p. 180)[17] apesar das potências formarem uma seqüência ascendente. A potência não depende da ordem dos elementos, mas apenas da comparação das quantidades dos elementos do conjunto com uma das classes de números, as quais possuem potência determinada e já conhecida. A comparação de qualquer conjunto com uma das classes é realizada sem necessidade de se conhecer o número de elementos, da seguinte maneira:

> "A mesma potência pode ser atribuída a dois conjuntos se eles podem ser coordenados um ao outro reciprocamente, univocamente, elemento a elemento." (Cantor, 1883, s.1, p. 71).

Contudo, originalmente, o número ordinal é o pilar da teoria e antecede logicamente a apresentação da 'seqüência de potências'.

---

15 No artigo original e na tradução para o inglês não aparece a enumeração dos números da segunda classe. Essa enumeração assim como outros exemplos que daremos adiante só aparece na tradução para o francês. A referência precisa da citação é (Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, 1883, p. 383-384).

16 Além disso, nessa afirmação está implícito que qualquer conjunto bem definido tem uma potência, que a potência equivale à alguma classe de números (este é um caso geral da 'hipótese do contínuo') e ainda que a classe de números forme uma coleção ordenada linear (Hallett, 1984, p. 62). O problema é que não há garantia de que todo número cardinal (obtido de qualquer conjunto dado) estará representado entre a seqüência de potências representadas pelas classes de números geradas pelos três princípios (Tiles, 1989, p. 110).

17 Cantor afirma diretamente: "Eu não tenho como certo a opinião exposta pelo autor no §85, a qual conforma o que eu chamo de "potência" com o que ele chama de "número cardinal". Eu chamo de "potência um sistema ou conjunto de elementos"... (Cantor, 1885, p. 441).

As seções 12 e 13 apresentam a demonstração dos teoremas que garantem que a potência da segunda classe de números segue imediatamente a potência da primeira classe de números. Na seção 14, são apresentadas operações com os números da segunda classe.

3 A tradução do *Grundlagen* para o francês: *Fondements*

As seções omitidas na tradução do *Grundlagen* para o francês não chegam a interferir na compreensão da teoria dos números transfinitos. Entretanto, nessa publicação não houve apenas a omissão de algumas seções, mas, encontra-se diferenciada da publicação original pelo acréscimo de exemplos, pela omissão de expressões[18], como também, principalmente, pela inversão da ordem das seções de tal modo que foi alterada a disposição do conteúdo. Considerando que o objetivo de Cantor permanece sendo a introdução dos números transfinitos no corpo de conhecimento matemático já admitido, perguntamos: o autor mudou, na tradução, a estratégia de argumentação em relação à publicação original?

Na publicação da tradução não consta comentário algum sobre a inversão das seções. Segue ao título as seções 1, 11, 12, 13, 2, 3, 14, e 10, nessa ordem e anunciadas por esses números!

Por isso vamos observar como fica estruturado o conteúdo com a nova disposição a fim de responder à questão levantada. Afinal, o mais comum é que a estruturação de uma teoria matemática seja feita de modo que seus conceitos estejam logicamente encadeados e, com isso, não é absolutamente natural que 'blocos' dessa teoria sejam deslocados sem que hajam prejuízos lógicos. Para ilustrar esse deslocamento, consideramos apenas as seções traduzidas que apresentam as noções de potência e ordinalidade -por hora deixaremos de lado as seções 10 e 14- e chamamos de bloco A a seção 1, bloco B as seções 2 e 3, e bloco C as seções 11, 12 13. Então, colocamos a questão: como interpretar lógica e conceitualmente a relação dos blocos A, B e C que possibilita que a estrutura A, C e B se mantenha consistente?

Não é difícil perceber que o bloco B, o que foi conduzido para o final, apresenta exatamente a noção de enumeral e conjunto bem ordenado. E, com isso, o bloco C ficou no início do artigo, precedido apenas pela seção 1. O conteúdo desse bloco é, justamente, as classes de números, formadas pelos princípios, as quais determinam a seqüência de potências.

Apresentamos uma possível interpretação para a teoria estruturada da forma A → C → B. Os esquemas abaixo tentam mostrar a relação entre os principais conceitos em cada uma das publicações, a original A → B → C e a tradução A → C → B, tendo em vista a forma de apresentar a teoria em 1895 quando as seqüências de números transfinitos ordinais e cardinais são apresentadas com maior independência.

a) a publicação original A → **B** → C

conceito de potência

↓

A: infinito atual

↓

B: conceito de conjunto bem-ordenado, enumeral e número ordinal → campo numérico expandido

↓

C: os princípios de formação; a seqüência dos números e suas divisões naturais (marcadas por |): as classes e as potências associadas a elas

18 Os exemplos, acrescentados na seção 2, ilustram diferentes maneiras de ordenar conjuntos. A omissão de expressões envolve explicações acusadas de 'subjetivas'. Este é um tema para outro estudo.

$1, 2, 3, \ldots \upsilon, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots, \ldots \omega^{\omega} \ldots \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots \alpha, \ldots$ números 3ª classe[19]

$1, 2, 3, \ldots \upsilon, \ldots \mid \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots, \ldots \omega^{\omega}, \ldots \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots \alpha, \ldots \mid$ 3ª classe

1ª classe 2ª classe 3ª classe.

✍ ✍ ✍

1ª potência 2ª potência 3ª potência[20]

B) a publicação traduzida A → B

↓

C

conceito de potência

↓

A: infinito atual → B: campo numérico expandido: $1, 2, 3, \ldots \upsilon, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots \omega^{\omega}$

↓

C: classes de números

✍

potências → seqüência de potências $[1, 2, 3, \ldots \upsilon, \ldots \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots]$

À vista do último esquema, a alteração da ordem das seções conduz à maior ênfase na noção de potência em detrimento da noção de número ordinal. Ou, se não quisermos valorizar a posição inicial do artigo, podemos afirmar com segurança que a noção de potência fica, aparentemente, independente da de enumeral.

Nesse esquema podemos admitir esboçadas duas sequências de números transfinitos e independentes uma da outra. Essa interpretação pode ter sido induzida pelo que conhecemos do prolongamento da teoria quando as sequências dos números ordinais e cardinais são apresentadas de forma mais independente que no artigo de 1883. Mas isso não nos impede de reconhecer nessa tradução o passo inicial da trajetória que a teoria dos números transfinitos seguiria daí por diante.

4 Conclusão

Concluímos sobre as afirmações de Jourdain e Dauben a respeito da maior importância do cardinal ou do ordinal na teoria de Cantor, que suas colocações não se excluem mutuamente, ou seja, a análise do artigo de 1883 permitiu-nos identificar a relevância dos conceito de ordem e de potência em momentos específicos, que esboçaremos a seguir.

Por um lado, a potência ou cardinalidade já está presente quando Cantor compara os conjuntos em 1874; além disso, conceber o ω" como o primeiro número ordinal transfinito necessita supor o infinito atual, o qual é um caso particular da noção de potência quando considera a ordem do conjunto *todo*. A noção de infinito atual, caso particular da noção de potência, é fundamental em qualquer das publicações de 1883.

Não podemos deixar de frisar também que, segundo a interpretação dada acima sobre a publicação de 1883 em sua ordem original e na ordem alterada da tradução, poderíamos concluir a desvinculação

19 Cantor não introduz símbolo para representar a terceira classe de números.

20 Essa seqüência de potências seria representada posteriormente assim: $1, 2, 3, \ldots \upsilon, \ldots \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

das seqüências de potências e números ordinais, o que diminuiu a importância da teoria ordinal na tradução e a partir daí.

A maior importância do conceito de potência poderia ainda ser afirmada observando o objetivo de Cantor além do artigo de 1883. Ele pretendia inserir o número transfinito, que originou-se da observação de conjuntos infinitos de *potências* diferentes. Posteriormente, nos artigos de 1887, 1888 e 1895, o número cardinal tem tanta ênfase ou mais do que o ordinal. Cantor deixa transparecer, depois de 1883, a importância permanente da noção de potência em todas as formulações da teoria, inclusive no *Grundlagen*, ao afirmar que sua meta era estabelecer a seqüência de potências de conjuntos infinitos:

> "Um dos mais importantes problemas da teoria dos conjuntos, que eu acredito ter resolvido como uma parte importante do meu *Grundlagen*, consiste na questão de determinar as várias potências dos conjuntos em toda sua natureza. Este objetivo eu alcancei pelo desenvolvimento do conceito geral de enumeral e conjuntos bem ordenados, ou, o que é a mesma coisa, o conceito de número ordinal" (Cantor, apud Jourdain 1915, p. 76).

Desse trecho obtemos também a relação entre os conceitos de ordinal e potência, mencionada no início desse texto: o número ordinal é necessário para o desenvolvimento da seqüência de potências. Em 1883 isso é evidente pela definição da potência por classes de números. No desenvolvimento da teoria a relação não é tão forte, mas os comentadores também entendem que a teoria dos números ordinais é o meio para alcançar a teoria dos números cardinais:

> "...a extensão da concepção de enumeral serve, da forma mencionada [índices transfinitos], para desenvolver e tornar precisa a concepção de potência já usada freqüentemente" (Jourdain, 1915, p. 52).
>
> "Acima de tudo, eram os ordinais que tornavam possível precisar a definição do cardinal transfinito. E, até Cantor ter introduzido os tipos de ordem das classes de números transfinitos, ele não pode definir precisamente qualquer cardinal transfinito pertencente à primeira potência." (Dauben, 1979, p. 180).

Entretanto, retornando aos artigos de 1883, apesar de desvincular implicitamente na tradução as seqüências de números ordinais e cardinais (expressão pertinente agora nessa interpretação), não há como negar, a partir de uma análise cuidadosa, que a noção de ordem está por trás da seqüência de potência ou números cardinais. E não só porque trata-se de uma seqüência, mas também porque a noção de ordem está presente nos princípios e nas classes.

Ressaltamos a noção de ordem nos princípios de formação e nas classes de números e, conseqüentemente no estabelecimento da seqüência de potências. Observamos inicialmente que cada classe de números é composta de ordinais. Podemos respaldar essa afirmação na intenção de Cantor de 'generalizar os números inteiros', como estratégia para introduzir o novo número[21]. Esses são logicamente ordinais, da mesma natureza que os números finitos, porque são formados pelos mesmos princípios, . Observamos também que o segundo princípio se destaca quanto à forte presença da noção de ordem, pois o primeiro número transfinito ω é definido como *o primeiro número* que segue após todos, como sendo *o limite* da primeira classe de números ν. Esse número serve para exprimir a totalidade da primeira classe num todo, dada sua ordem de sucessão natural (Cantor, 1883, s 11, p. 87 - grifo nosso).

Além disso, somente números ordinais transfinitos são definidos em 1883, isto é potência não é número nesse artigo e, ainda, a potência é definida por meio da seqüência de números ordinais. Entendemos com isso que os conceitos de potência e ordinalidade, na teoria apresentada no artigo de 1883, mantêm uma relação de dependência maior, e que a teoria dos números ordinais avançou

21 Essa não é apenas uma estratégia de Cantor mas um argumento significativo para identificação da sua concepção filosófica. Não abordaremos questões dessa natureza por fugir aos nossos objetivos. Sobre a concepção filosófica de Cantor, no que tange à relação do novo número com os demais, recomendamos o livro de Hallett, principalmente o capítulo 1 (Hallett, 1984, p. 1-48).

rapidamente nesse primeiro momento. Quando a teoria dos números transfinitos estava mais madura o peso de cada um dos conceitos de ordinal e cardinal mudou, passando o ordinal a ser o meio de sustentação da teoria dos números cardinais.

Contudo, não há como negar que a alteração na ordem da tradução condiz com a maior ênfase que Cantor coloca na noção de número cardinal a partir do artigo de 1883. Na tradução desse artigo, as seções referentes à formação de números, que culminam no estabelecimento da seqüência de potências, foram transferidas para o início do artigo enquanto que as seções que tratam da teoria dos enumerais foram deixadas no final. Nessa nova disposição das seções na tradução estava anunciada a trajetória que a teoria dos números transfinitos seguiria daí por diante.

Concluímos assim que a teoria dos números ordinais é utilizada de forma mais conceitual na elaboração inicial da teoria dos números transfinitos. Na sua forma mais elaborada, a teoria dos números ordinais passa a ser utilizada essencialmente para sustentar a relação de ordem entre os números cardinais, de modo que eles formem um conjunto ordenado infinito. O próprio Cantor afirma em 1895:"

> Para a fundamentação mais rigorosa desse assunto [a seqüência dos números cardinais transfinitos], descoberta em 1882 e exposta no artigo *Grundlagen....*, nós faremos uso do assim chamado "tipo de ordem" cuja teoria nós apresentaremos nos parágrafos seguintes." (Cantor, 1883, s.1, p. 71).

Um fato conhecido que pode ter motivado Cantor a alterar a ênfase da teoria, do ordinal para o cardinal é a crítica que G. Frege faz em seu *Fundamentos da Aritmética* (1884) diretamente à definição de número, que prioriza logicamente a noção de ordem em detrimento à de cardinalidade[22]. Frege demonstra que o número definido como cardinal tem a propriedade da ordinalidade e por isso a definição de Cantor é ampla, no sentido de incluir a propriedade que pode ser demonstrada. Cantor tomou conhecimento dessa crítica[23], mas entretanto, houveram certamente outros fatores que contribuiram para alterações na exposição de sua teoria, mas tudo isso constitui tema a ser elaborado em outro estudo.

22 Num outro estudo avaliamos se essa crítica motivou ou não Cantor na mudança da estratégia de apresentação de sua teoria.

23 Cantor respondeu a Frege (Cantor, 1885, p. 441-442).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CANTOR, Georg. Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels (1874). *Acta Mathematica*, n. 2, p.305-310, 1883.

_______ . Uber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 5. *Mathematische Annalen*, n. 21, p. 545-586, 1883.

_______ . Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica*, n. 2, p. 381-408, 1883.

_______ . Foundations of a general theory of manifolds (1883), Trad. Uwe Parpart. *The Campaigner*, v.9, n. 1-2, p. 69-96, 1976.

_______ . Die Grundlagen der Arithmetik (Rezensionder Schrift von G. Frege...),1885. In: *Gesammlte Abhandlungen mathematische und philosophische Inhalts* (ed. Ernest Zermello) Berlin: Springer, p. 440-441, 1932.

_______ . Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, n. 46, p. 481-512, 1895

_______ . *Contributions to the founding of theory of transfiniten numbers*. (1895) Trad. P. Jourdain. New York: Dover, 1955.

DAUBEN, J. *Georg Cantor. Historical Mathematics and Philosophy of the Infinite (1979)*. Oxford: Princeton University Press, 1990.

______ . Georg Cantor and Pope Leo XIII: mathematics, theology and the infinite. *Journal of the History of Ideas*, n. 38, p. 85-108, 1977.

______ . Georg Cantor's philosophy of mathematics: the irracional and transfinite numbers. In: *Actes de XIII e Congrès International d'Histoire des Sciences*. Moscou, v. 5, p. 86-93, 1971.

FREGE, G. *Os fundamentos da aritmética (1884)* Trad. L.H. Santos. São Paulo: Abril, 1983. (Os Pensadores, 36).

GRATTAN-GUINNESS, I. Towards a biography of Georg Cantor. *Annals of Science*, n. 27, p.345-391, 1971.

HALLETT, M. *Cantorian set theory and limitation of size*. Oxford: Clarendon University Press, 1984.

JOURDAIN, P. Introduction (1915). In: *Contributions to the founding of theory of transfiniten numbers*. New York: Dover, 1955.

TILES, M. *The philosophy of set theory*. Oxford: Basil Blackwell, 1989.

DENISE SILVA VILELA é Especialista em História da Ciência e Mestranda em Filosofia, ambos pela UNICAMP.

Endereço: R. Clóvis Bevilacqua 526/32A. Campinas. 13.075-040, São Paulo - Brasil