SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS, TRADUÇÃO COMENTADA DE UM TEXTO DE ARQUIMEDES

ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS

RESUMO - Esta é uma tradução do tratado de Arquimedes intitulado Sobre o Equilíbrio dos Planos ou Sobre o Centro de Gravidade dos Planos. *Neste trabalho Arquimedes apresenta um dos princípios fundamentais da estática, a lei da alavanca.*

ABSTRACT - This is a translation of Archimedes work entitled On the equilibrium of planes or the centres of gravity of planes. *In this work Archimedes presents one of the fundamental principles of statics, the law of the lever.*

Introdução

Esta é uma tradução do primeiro livro do tratado de Arquimedes (287-212 a. C.) intitulado *Sobre o Equilíbrio dos Planos ou Sobre o Centro de Gravidade dos Planos.* Neste trabalho Arquimedes apresenta uma das leis fundamentais da estática, ou seja, a lei da alavanca. Esta tradução é feita a partir da tradução em inglês dos trabalhos de Arquimedes feita por T. L. Heath (Arquimedes, 1912 e 1952). As notas entre colchetes na tradução são de Heath. Só tenho conhecimento de um trabalho de Arquimedes traduzido e publicado em português: (Assis, 1996).

O primeiro ponto a ser observado é que Arquimedes não foi o primeiro a utilizar alavancas, nem mesmo o primeiro a formular ou apresentar a lei da alavanca. Esta lei aparece, pela primeira vez, num trabalho intitulado *Mecânica* ou *Problemas Mecânicos.* Durante algum tempo pensou-se que este trabalho havia sido escrito por Aristóteles (384-322 a. C.), sendo que, hoje em dia, há dúvidas quanto a isto. Alguns atribuem este trabalho a Teofrasto (372?-287? a. C.) ou a Strato (?-271 a. C.). De qualquer forma, não há dúvidas de que a lei da alavanca era conhecida na escola aristotélica antes de sua formulação por Arquimedes. Para discussões e referências ver: (Clagett, 1959, p. 4), (Boyer, 1974, p. 89), (Heath, 1981, p. 344), (Duhem, 1991, p. 11 e 500, nota 1). Neste trabalho *Mecânica* há a afirmação de que dois pesos numa alavanca equilibram-se, quando são inversamente proporcionais a suas distâncias ao fulcro: "o peso que se move está para o peso que move como estão, inversamente, o comprimento do braço suportando o peso para o comprimento do braço mais próximo da força", (Aristóteles, 1913, 3, 850b 1). Aristóteles definia a potência de uma força que coloca um corpo em movimento como o produto do peso ou massa do corpo (não havia uma distinção entre estes dois conceitos antigamente) pela velocidade que o corpo adquire (Dugas, 1988, p. 19): "quão menor ou mais leve for um corpo, mais vai movê-lo uma força dada. ... as velocidades relativas de dois corpos vão estar na razão inversa de seus tamanhos respectivos", (Aristóteles, 1952, *On the Heavens*, III, 2, 301b, 4, 11); "Se o agente *A* moveu *B* uma distância Γ num tempo Δ, então no mesmo tempo a mesma força *A* vai mover *B/2* duas vezes a distância Γ, e no tempo $\Delta / 2$ vai mover *B/2* a distância inteira Γ; pois assim as regras de proporção vão ser obedecidas.

Novamente, se uma força dada move um peso dado uma certa distância num certo tempo e metade da distância na metado do tempo, metade da força motriz vai mover metade do peso à mesma distância no mesmo tempo", (Aristóteles, 1952, *Physics*, VII, 5, 249b 30-250 a 7). Os aristotélicos podiam, então, explicar o equilíbrio da alavanca observando que, quanto mais afastado do fulcro está um corpo, maior será sua velocidade tangencial ao longo de um arco de círculo se a alavanca girar ao redor do fulcro. Logo, vão haver potências iguais quando os pesos são, inversamente, proporcionais a suas distâncias ao fulcro:

> "Quão mais distantes estamos do fulcro, mais facilmente vamos levantar o peso; o motivo sendo aquele que já foi afirmado antes, a saber, que um raio maior descreve um círculo maior. Assim, exercendo a mesma força o peso que move vai mudar mais sua posição do que o peso que ele move, já que ele está mais afastado do fulcro", (Aristóteles, 1913, 3, 850b 2).

Enquanto que, para os aristotélicos, a lei da alavanca era derivada, dinamicamente, através da propriedade dos círculos, Arquimedes deriva-a, matematicamente, utilizando argumentos de simetria em situações puramente estáticas. Antes de comentar sua prova, deve-se ressaltar que, neste trabalho, Arquimedes menciona o conceito de centro de gravidade sem definir o que isto vem a ser. Aparentemente, este conceito já havia sido definido por Arquimedes em outros trabalhos anteriores intitulados *Sobre as Balanças* (ou *Sobre as Alavancas*), *Sobre os Equilíbrios* e *Sobre os Centros de Gravidade*. Estes trabalhos estão perdidos atualmente, embora sejam mencionados por Heron de Alexandria (séc. III d.C.), Pappus (séc. III d.C.) e Simplício (séc. VI d.C.), comentador de Aristóteles: (Arquimedes, 1912, p. xxxvii) e (Heath, 1981, v. 2, p. 23-24). A definição do centro de gravidade como citada por pessoas que viram estes trabalhos perdidos de Arquimedes e pela maneira implícita, como ele o calcula no presente trabalho (Props. 6 e 15) é o de um ponto no corpo tal que se o corpo for dependurado por ele, então vai permanecer em equilíbrio em qualquer posição, sem oscilar ou se inclinar para qualquer direção: (Dijksterhuis, 1956, p. 295-304), (Heath, 1981, v. 2, p. 24, 350 e 430).

Um fato que Arquimedes conhecia e, provou em um de seus trabalhos perdidos é o seguinte: o centro de gravidade de dois corpos tomados conjuntamente está ao longo da linha reta unindo o centro de gravidade dos dois corpos considerados separadamente (Arquimedes, 1912, p. xxxvii e 191). Arquimedes conhecia e, provou em seu trabalho perdido *Sobre as Balanças* ou *Sobre as Alavancas,* uma outra propriedade fundamental do centro de gravidade, a saber: se um corpo está em repouso suspenso por um ponto "O", então o centro de gravidade do corpo e o ponto de suspensão "O" estão ao longo de uma mesma linha vertical. Ele utilizou este fato na proposição 6 de seu trabalho *Quadratura da Parábola,* ainda existente: (Arquimedes, 1912, p. xxxvii e 238) e (Heath, 1981, p. 24). Este fato fornece uma maneira prática de se encontrar o centro de gravidade de um corpo de forma arbitrária: suspende-se o corpo por um ponto O e espera-se que atinja o repouso, traçando-se então uma vertical por O. Dependura-se, então, o corpo por um outro ponto O' que não esteja ao longo desta vertical e aguarda-se um novo equilíbrio, traçando-se outra vertical por O'. O ponto de intersecção entre as duas verticais é o centro de gravidade do corpo, Figura 1.

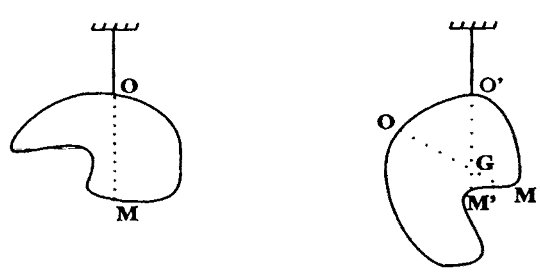


Figura 1: Maneira prática de descobrir o centro de gravidade.

Não se sabe como Arquimedes provou este fato de que, quando um corpo está em equilíbrio por um ponto de suspensão, este ponto e o centro de gravidade vão estar ao longo da mesma vertical. Creio que uma possibilidade é ele ter usado um postulado análogo ao que introduziu em seu trabalho *Sobre os Corpos Flutuantes*, a saber: "Vamos admitir que os corpos que são forçados para cima num fluido são forçados para cima ao longo da perpendicular [a superfície] que passa através de seus centros de gravidade." Com este postulado ele conseguiu mostrar, por exemplo, que um segmento de esfera menos denso que um fluido só vai permanecer em equilíbrio neste fluido, se o eixo de simetria do segmento (que contém o centro de gravidade) estiver na vertical (como Arquimedes considerava a terra esférica, a vertical em um certo ponto era a linha radial passando por este ponto e apontando para o centro da terra). Na Figura 2 o semi-círculo maior representa a terra cheia de água com centro em O e o segmento de esfera é representado por ADB com centro de gravidade em G. O ponto C é o centro da esfera da qual o segmento é uma parte e DE é seu eixo de simetria. Se o segmento for solto nesta posição Arquimedes prova que ele não vai permanecer em equilíbrio, mas que A vai subir e B vai descer até que DE assuma a posição perpendicular à superfície do fluido.

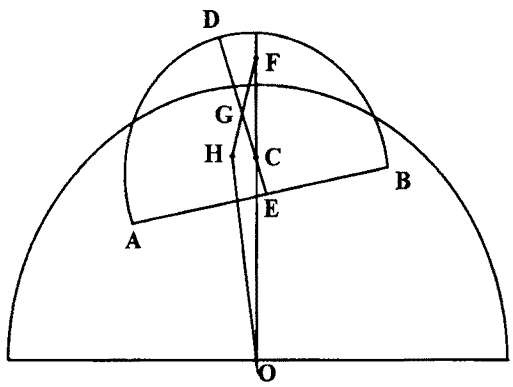


Figura 2: Segmento de esfera flutuando na água.

Por um raciocínio análogo, e, postulando que a força peso atua para baixo, ao longo da vertical, que passa pelo centro de gravidade e, que a força exercida, pelo ponto de suspensão, atua ao longo da reta unindo este ponto ao centro de gravidade, ele poderia chegar que, no equilíbrio, o ponto de suspensão e o centro de gravidade têm de estar ao longo da mesma vertical.

Antes de apresentar a tradução, queremos chamar a atenção para a crítica, extremamente importante, feita por Ernst Mach (1838-1916) a este trabalho de Arquimedes. Mach foi o primeiro a mostrar que a prova de Arquimedes da lei da alavanca é falha: (Mach, 1960, p. 19-28). Concordo plenamente com Mach nesta crítica. A prova da lei da alavanca de Arquimedes está contida nas Proposições 6 e 7 deste trabalho.

A lei da alavanca afirma que, se temos um peso P_1 a uma distância d_1 do fulcro, um outro peso P_2 vai equilibrar P_1 somente se for satisfeita a relação $P_1/P_2 = d_2/d_1$. Caso esta igualdade não seja satisfeita, a alavanca vai descer do lado que tiver o maior valor de *Pd*. Podemos, também, dizer que o momento ou torque exercido por cada peso é dado por *Pd*.

Em sua prova, Arquimedes parte do postulado de que pesos iguais colocados a iguais distâncias do fulcro, estão em equilíbrio. Em seguida, no meio da Prop. 6, assume, implicitamente, que também estarão em equilíbrio, por exemplo, o peso *P* colocado à distância *d* do fulcro e dois outros pesos *P/2* colocados, simultaneamente, a distâncias $d+x$ e $d-x$ do outro lado do fulcro. Isto não é óbvio, e, em particular, só vai ocorrer se valer a lei linear da alavanca que Arquimedes está querendo provar. Ou seja, ele usou implicitamente, em sua dedução o que estava querendo provar.

Ilustro isto aqui com um caso particular da Proposição 6 de Arquimedes. Sejam dois corpos A e B cujos pesos satisfazem a seguinte relação: $A = 2B = 4O$, sendo O uma medida comum de A e B. Temos, então, que o peso de A + B é igual ao peso de seis O. Divide-se uma linha reta LK em 6 partes iguais a N e colocam-se as 6 partes O no centro de cada um destes segmentos, Figura 3. Nesta figura temos $DC = 2CE = 2N$, $LH = 2HK = 4N$ e $LC = CK$.

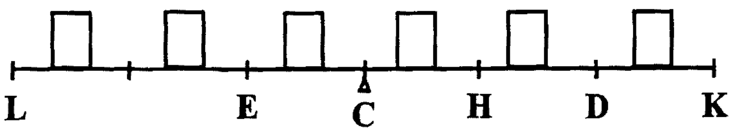


Figura 3: Alavanca em equilíbrio quando o fulcro está no centro C.

Por simetria, o centro de gravidade deste sistema é o ponto C, o centro da linha LK. Ou seja, se o fulcro for colocado em C, a alavanca não vai tender para nenhum lado. Então, no meio da Proposição 6, vem a frase chave de Arquimedes: "Assim podemos supor o próprio A aplicado em E, e o próprio B aplicado em D." Isto é, Arquimedes afirma, sem provar que, como a situação da Figura 3 é de equilíbrio, também vai ser de equilíbrio a situação da Figura 4.

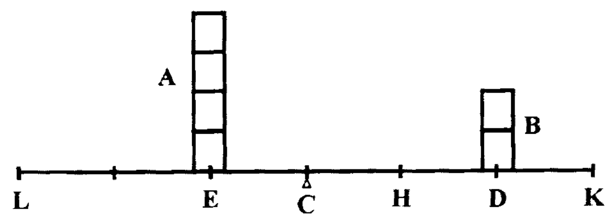


Figura 4: Arquimedes assumiu sem provar que esta é uma situação de equilíbrio se o fulcro está em *C*.

Isto não é óbvio, a não ser que se use a lei da alavanca linear nas distâncias. Como esta linearidade é, justamente, o que Arquimedes está querendo provar nesta proposição, não podia ter empregado este fato. Por exemplo, a natureza poderia se comportar de maneira tal que dois corpos P_1 e P_2 em lados opostos de uma alavanca a distâncias d_1 e d_2 do fulcro se equilibrassem apenas quando $P_1 / P_2 = (d_2/d_1)^2$. Caso esta fosse a lei correta da alavanca, a situação da Figura 3 ainda seria de equilíbrio, quando o fulcro está colocado em C, mas a situação da Figura 4 não seria de equilíbrio com o fulcro em C. Neste último caso só haveria equilíbrio caso o fulcro fosse colocado num ponto Z tal que, estando o corpo A aplicado em E e o corpo B aplicado em D, $DZ / ZE = \sqrt{2}$, Figura 5.

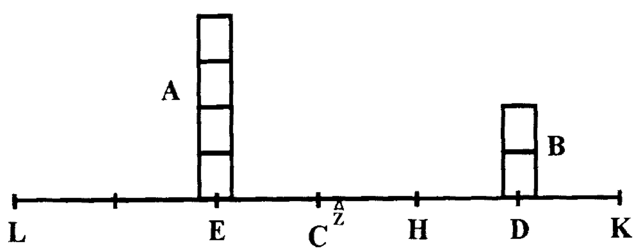


Figura 5: Ponto Z onde o fulcro deveria estar colocado para haver equilíbrio se a lei da alavanca fosse quadrática nas distâncias.

Para se observar que Mach está correto nesta crítica, basta ver que, se a natureza se comportasse de maneira tal que a lei da alvanca fosse, por exemplo, quadrática nas distâncias (ou seja, que houvesse equilíbrio quando $P_1 / P_2 = (d_2 / d_1)^2$), que ainda assim, seriam válidos os 7 postulados de onde parte Arquimedes para sua dedução. Como leis distintas satisfazem o mesmo conjunto de postulados, não se pode decidir por nenhuma delas, baseado apenas nestes postulados.

O que Mach enfatiza é que seria mais correto postular a relação $P_1 / P_2 = d_2 / d_1$ como condicionando o equilíbrio de alavancas (relação esta sugerida ou inferida a partir de experiências mais ou menos precisas) e, então, utilizar esta relação para chegar a outros resultados (calcular o centro de gravidade de diversas figuras geométricas etc.) Não se pode derivar esta relação linear nas distâncias e nos pesos a partir do caso mais simples de que pesos iguais a distâncias iguais se equilibram.

Para um ponto de vista diferente do de Mach ver: (Dijksterhuis, 1956, p. 291-304).

Após esta introdução, apresentamos a tradução.

Tradução

SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS OU OS CENTROS DE GRAVIDADE DOS PLANOS

Livro Um

"Postulo o seguinte":

1. "Pesos iguais a distâncias iguais estão em equilíbrio, e pesos iguais a distâncias desiguais não estão em equilíbrio, mas se inclinam em direção ao peso que está a uma distância maior."

2. "Se, quando os pesos a certas distâncias estão em equilíbrio, alguma coisa for adicionada a um dos pesos, eles não ficam [mais] em equilíbrio, mas se inclinam em direção ao peso ao qual foi feita a adição."

3. "Similarmente, se qualquer coisa for retirada de um dos pesos, eles não ficam em equilíbrio, mas se inclinam em direção ao peso do qual nada foi retirado."

4. "Quando figuras planas iguais e similares coincidem quando aplicadas uma sobre a outra, seus centros de gravidade vão coincidir similarmente."

5. "Em figuras que são desiguais, mas similares, os centros de gravidade vão estar situados similarmente. Por pontos situados, similarmente, em relação a figuras similares, entendo pontos tais que, se forem desenhadas linhas retas a partir deles aos ângulos iguais, elas fazem ângulos iguais com os lados correspondentes."

6. "Se grandezas [magnitudes, extensões] a certas distâncias estão em equilíbrio, (outras) grandezas iguais a elas também vão estar em equilíbrio nas mesmas distâncias."

7. "Em qualquer figura cujo perímetro é côncavo na mesma direção, o centro de gravidade tem de estar dentro da figura."

Proposição 1

Pesos que se equilibram a distâncias iguais são iguais.

Pois, se eles são desiguais, retire do maior a diferença entre os dois. Os pesos que sobrarem não vão se equilibrar [Post. 3]; o que é absurdo.

Portanto, os pesos não podem ser desiguais.

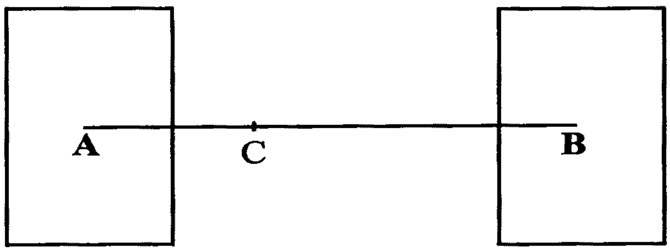
Proposição 2

Pesos desiguais a distâncias iguais não vão se equilibrar, mas vão se inclinar em direção ao peso maior.

Pois, retire do maior a diferença entre os dois. Os restantes iguais irão se equilibrar [Post. 1]. Portanto, se adicionarmos a diferença novamente, os pesos não vão se equilibrar mas se inclinarão em direção ao maior [Post. 2].

Proposição 3

Pesos desiguais vão se equilibrar a distâncias desiguais, o maior peso estando a uma distância menor.



Sejam A e B dois pesos desiguais (dos quais A é o maior) se equilibrando ao redor de C a distâncias AC e BC, respectivamente.

Então, AC será menor do que BC. Pois, caso contrário, retire de A o peso $(A - B)$. Os restantes vão, então, se inclinar em direção a B [Post. 3]. Mas isto é impossível, pois (1) se $AC = CB$, os restantes iguais vão se equilibrar, ou (2) se $AC > CB$, eles vão se inclinar em direção a A na distância maior [Post. 1].

Portanto, $AC < CB$.

Analogamente, se os pesos se equilibram, e $AC < CB$, então $A > B$.

Proposição 4

Se dois pesos iguais não têm o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade de ambos tomados conjuntamente está no ponto central da linha ligando seus centros de gravidade.[1]

[Provado pela Prop. 3, por redução ao absurdo. Arquimedes assume que, o centro de gravidade de ambos tomados, conjuntamente, está ao longo da linha reta ligando os centros de gravidade de cada corpo, dizendo que isto havia sido provado antes (προδεδεικτα). Sem dúvida, a alusão é ao trabalho perdido *Sobre as Alavancas* (περὶ ζυγων).]

[1] Heath não apresenta, explicitamente, a prova com as palavras de Arquimedes, mas ela pode ser encontrada, por exemplo, em M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Univ. Wisconsin Press, Madison, 1959), p. 31-37, de onde reproduzimos o seguinte: Seja A o centro de gravidade do peso A e B aquele de B (ver Figura). Desenhando a linha AB, seja ela dividida em duas partes iguais em G. Digo que o ponto G é o centro [de gravidade] da grandeza composta das duas grandezas. Pois, caso não seja, suponha o centro de gravidade [da grandeza composta das grandezas A e B] estar em D, se isto for possível [pois já foi demonstrado que ele está sobre a linha AB]. Como, portanto, o ponto D é o centro de gravidade da grandeza composta de A e B, o equilíbrio vai resultar com o ponto D apoiado. Portanto, as grandezas A e B estarão em equilíbrio nas distâncias AD e DB. Mas isto é impossível, [pois pesos iguais a distâncias iguais não estão em equilíbrio; Postulado I]. Logo, fica claro que G é o centro de gravidade da grandeza composta de A e B.

Proposição 5

Se três grandezas iguais têm seus centros de gravidade sobre uma linha reta a distâncias iguais, o centro de gravidade do sistema vai coincidir com aquele da grandeza do meio.[2]

[Isto se segue imediatamente da Prop. 4.]

Corolário 1.

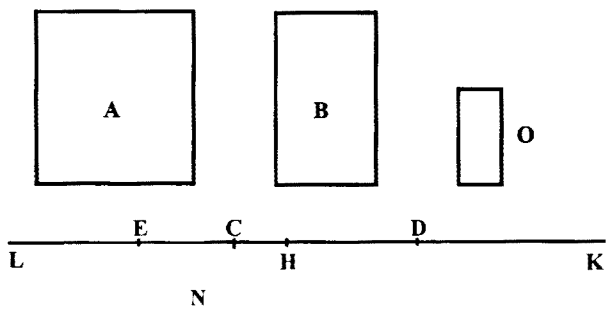
O mesmo é verdade de qualquer número ímpar de grandezas se aquelas que estão a distâncias iguais da grandeza central são iguais, enquanto que as distâncias entre seus centros de gravidade são iguais.

Corolário 2.

Se houver um número par de grandezas com seus centros de gravidade situados a distâncias iguais sobre uma linha reta, e, se as duas grandezas centrais são iguais, enquanto que aquelas que são equidistantes delas (em cada lado) são iguais respectivamente, o centro de gravidade do sistema é o ponto central da linha ligando os centros de gravidade das duas grandezas centrais.

Proposições 6 e 7

Duas grandezas, sejam elas comensuráveis [Prop. 6] ou incomensuráveis [Prop. 7], se equilibram a distâncias inversamente proporcionais a suas grandezas.



I. Suponha que as grandezas A e B sejam comensuráveis, e que os pontos A e B sejam seus centros de gravidade. Seja DE uma linha reta dividida de tal forma em C que $A:B = DC:CE$.

Temos então de provar, se A for colocado em E e B em D, que C vai ser o centro de gravidade dos dois considerados conjuntamente.

Como A e B são comensuráveis, assim são DC e CE. Seja N uma medida comum de DC e CE. Faça DH e DK cada uma iguais a CE, e EL (sobre o prolongamento de CE) igual a CD. Então $EH = CD$, pois $DH = CE$. Portanto, LH é dividida ao meio em E, assim como HK é dividida ao meio em D.

[2] Heath não apresenta, explicitamente, a prova com as palavras de Arquimedes, mas ela pode ser encontrada, por exemplo, em M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Univ. Wisconsin Press, Madison, 1959), p. 31-37, de onde reproduzimos o seguinte: Sejam três grandezas, A, B e G (ver Figura), com seus centros de gravidade A, B e G situados ao longo de [uma mesma] linha reta. Sejam [as grandezas] A, B e G iguais uma a outra, e sejam também iguais as linhas AG e GB. Digo que o centro de gravidade da grandeza composta destas três grandezas é o ponto G. Pois como as grandezas A e B têm o mesmo peso, seu centro de gravidade vai ser o ponto G, pois AG e GB. Mas o centro de gravidade [da grandeza] G também é o ponto G. Portanto, fica claro que o centro de gravidade da grandeza composta de todas [as grandezas] será o ponto que também é o centro de gravidade da [grandeza] do meio.

Assim LH e HK devem cada uma conter N um número par de vezes.

Tome uma grandeza O, tal que O esteja contida tantas vezes em A como N está contida em LH, de onde $A:O = LH:N$.

Mas $B:A = CE:DC = HK:LH$. Portanto, por igualdade, $B:O = HK:N$, ou O está contido em B tantas vezes quantas N está contido em HK.

Assim O é uma medida comum de A e B.

Divida LH e HK em partes iguais a N, e A e B em partes iguais a O. As partes de A serão, portanto, iguais em número aquelas de LH, e as partes de B serão iguais em número aquelas de HK. Coloque uma das partes de A no ponto médio de cada uma das partes N de LH, e uma das partes de B no ponto médio de cada uma das partes N de HK.

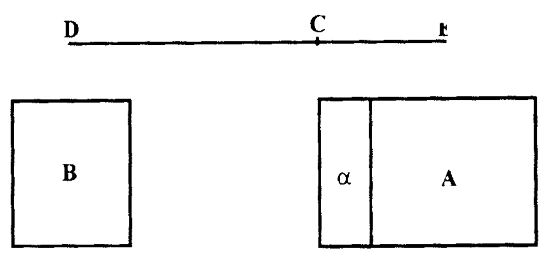
Então, o centro de gravidade das partes de A colocadas a distâncias iguais sobre LH estará em E, o ponto médio de LH [Prop. 5, Cor. 2], e o centro de gravidade das partes de B colocadas a distâncias iguais ao longo de HK estará em D, o ponto médio de HK.

Assim, podemos, supor o próprio A aplicado em E, e o próprio B aplicado em D.

Mas, o sistema formado pelas partes O de A e B juntas é um sistema de grandezas iguais em número par e colocadas a distâncias iguais ao longo de LK. E, como $LE = CD$, e $EC = DK$, $LC = CK$, de tal forma que C é o ponto médio de LK. Portanto, C é o centro de gravidade do sistema colocado ao longo de LK.

Portanto, A agindo em E e B agindo em D se equilibram ao redor do ponto C.

II. Suponha que as grandezas sejam incomensuráveis, e sejam elas $(A + a)$ e B respectivamente. Seja DE uma linha dividida em C tal que $(A + a):B = DC:CE$.



Então, se $(A + a)$ colocado em E e B colocado em D não se equilibram ao redor de C, $(A + a)$ é ou muito grande para equilibrar B, ou não é grande o suficiente.

Suponha, se possível, que $(A + a)$ seja muito grande para equilibrar B. Retire de $(A + a)$ uma grandeza a menor do que a dedução que faria o restante equilibrar B, mas tal que o restante A e a grandeza B sejam comensuráveis.

Então, como A e B são comensuráveis, e $A:B < DC:CE$, A e B não vão se equilibrar [Prop. 6], mas D cairá.

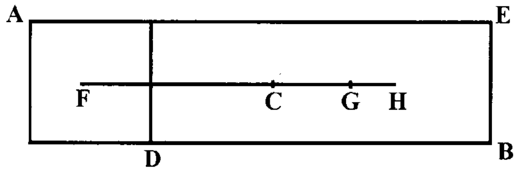
Mas isto é impossível, pois a dedução a foi uma dedução insuficiente de $(A + a)$ para produzir o equilíbrio, de tal forma que E ainda estava caido.

Portanto, $(A + a)$ não é grande o suficiente para equilibrar B; e, similarmente, pode ser provado que B não é grande o suficiente para equilibrar $(A + a)$.

Por conseqüência, $(A + a)$ e B tomados conjuntamente têm seu centro de gravidade em C.

Proposição 8

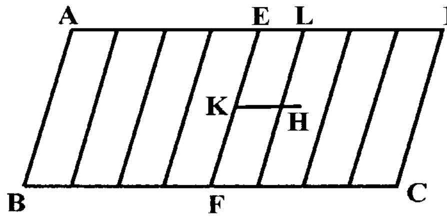
Se AB é uma grandeza cujo centro de gravidade é C, e AD uma parte dela cujo centro de gravidade é F, então o centro de gravidade da parte restante será um ponto G sobre FC produzido de tal forma que GC:CF = (AD):(DE).



Pois, se o centro de gravidade do restante *(DE)* não for *G*, suponhamos que seja um ponto *H*. Segue-se, então, imediatamente um absurdo pelas Props. 6 e 7.

Proposição 9

O centro de gravidade de qualquer paralelogramo está sobre a linha reta unindo os pontos médios dos lados opostos.



Seja *ABCD* um paralelogramo, e deixe que *EF* una os pontos médios dos lados opostos *AD* e *BC*.

Se o centro de gravidade não está sobre *EF*, suponha que ele esteja em *H*, e desenhe *HK* paralelo a *AD* ou a *BC*, encontrando *EF* em *K*.

É então possível, ao dividir *ED* ao meio, então dividindo ao meio cada metade, e assim continuamente, chegar a um comprimento *EL* menor do que *KH*. Divida ambos, *AE* e *ED*, em partes iguais a *EL*, e através dos pontos de divisão desenhe paralelas a *AB* ou a *CD*.

Temos, então, um número de paralelogramos iguais e similares, e, se qualquer um deles for aplicado em qualquer outro, seus centros de gravidade vão coincidir [Post. 4]. Assim nós temos um número par de grandezas iguais cujos centros de gravidade estão a distâncias iguais ao longo de uma linha reta. Portanto o centro de gravidade de todo o paralelogramo vai estar sobre a linha ligando os centros de gravidade dos dois paralelogramos do meio [Prop. 5, Cor. 2].

Mas isto é impossível, pois *H* está fora dos paralelogramas do meio.

Portanto, o centro de gravidade só pode estar sobre *EF.*

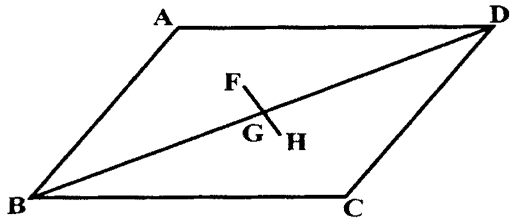
Proposição 10

O centro de gravidade de um paralelogramo é o ponto de intersecção de suas diagonais.

Pois, pela última proposição, o centro de gravidade está sobre cada uma das linhas que dividem ao meio os lados opostos. Portanto, ele está sobre o ponto de intersecção entre elas; e este também é o ponto de intersecção das diagonais.

Prova alternativa.

Seja $ABCD$ este paralelogramo, e BD uma diagonal. Então os triângulos ABD e CDB são iguais e similares, tal que [Post. 4], se um for aplicado sobre o outro, seus centros de gravidade vão incidir um sobre o outro.



Suponha que F seja o centro de gravidade do triângulo ABD. Seja G o ponto médio de BD. Ligue FG e a prolongue até H, tal que $FG = GH$.

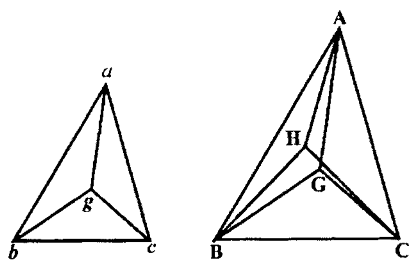
Se aplicarmos, então, o triângulo ABD ao triângulo CDB de tal forma que AD incida sobre CB e AB sobre CD, o ponto F vai incidir sobre H.

Mas, [pelo Post. 4] F vai incidir sobre o centro de gravidade de CDB. Portanto, H é o centro de gravidade de CDB.

Por conseqüência, como F e H são os centros de gravidade dos dois triângulos iguais, o centro de gravidade do paralelogramo inteiro está no ponto médio de FH, isto é, no ponto médio de BD, que é a intersecção das duas diagonais.

Proposição 11

Se abc e ABC são dois triângulos similares, e g e G dois pontos sobre eles, respectivamente, situados similarmente em relação a eles, então, se g é o centro de gravidade do triângulo abc, G tem de ser o centro de gravidade do triângulo ABC.



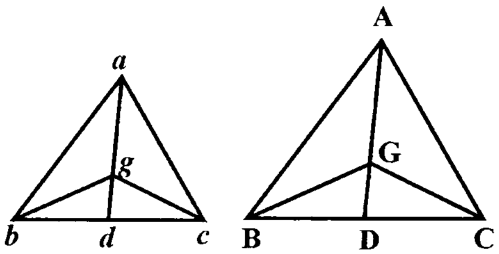
Suponha que $ab:bc:ca = AB:BC:CA$.

A proposição é provada por uma redução ao absurdo óbvia. Pois, se G não for o centro de gravidade do triângulo ABC, suponha que H seja seu centro de gravidade.

O *Post. 5* requer que g e H estejam situados similarmente com relação aos respectivos triângulos; e isto leva, imediatamente, ao absurdo de que os ângulos HAB e GAB sejam iguais.

Proposição 12

Dados dois triângulos similares abc e ABC, e d e D os pontos médios de bc e BC, respectivamente, então, se o centro de gravidade de abc está sobre ad, aquele de ABC estará sobre AD.



Seja g o ponto sobre ad que é o centro de gravidade de abc.

Tome *G* sobre *AD* tal que *ad:ag* = *AD:AG*, e una *gb, gc, GB, GC.*

Então, como os triângulos são similares, e *bd* e *BD* são as metades de *bc* e *BC*, respectivamente, *ab:bd* = *AB:BD*, e os ângulos *abd* e *ABD* são iguais.

Portanto, os triângulos *abd* e *ABD* são similares, e $\angle$ *bad* = $\angle$ *BAD*. Também, *ba:ad* = *BA:AD*, enquanto que, de cima, *ad:ag* = *AD:AG*.

Portanto, *ba:ag* = *BA:AG*, enquanto que os ângulos *bag* e *BAG* são iguais.

Por consequência os triângulos *bag* e *BAG* são similares, e $\angle$ *abg* = $\angle$ *ABG*.

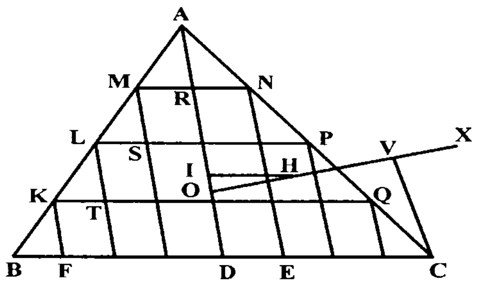
E, como os ângulos *abd* e *ABD* são iguais, segue-se que $\angle$ *gbd* = $\angle$ *GBD*.

Exatamente da mesma maneira provamos que $\angle$ *gac* = $\angle$ *GAC*, $\angle$ *acg* = $\angle$ *ACG*, $\angle$ *gcd* = $\angle$ *GCD*.

Portanto, *g* e *G* estão situados similarmente com relação aos respectivos triângulos; de onde [Prop. 11] *G* é o centro de gravidade de *ABC*.

Proposição 13

Em qualquer triângulo o centro de gravidade está sobre uma linha reta unindo qualquer ângulo ao ponto intermediário do lado oposto.



Seja *ABC* um triângulo e *D* o ponto médio de *BC*. Ligue *AD*. Então, o centro de gravidade vai estar sobre *AD*.

Pois, se possível, suponha que este não é o caso, e deixe *H* ser o centro de gravidade. Desenhe *HI* paralelo a *CB*, encontrando *AD* em *I*.

Então, se dividirmos *BC* ao meio, dividirmos depois cada metade ao meio, e assim sucessivamente, chegaremos finalmente a um comprimento, como *DE*, menor do que *HI*. Divida ambos, *BD* e *DC*, em comprimentos cada um igual a *DE*, e através dos pontos de divisão desenhe linhas paralelas a *DA* encontrando *BA* e *AC* em pontos como *K, L, M* e *N, P, Q*, respectivamente.

Ligue *MN, LP, KQ*, linhas estas que serão então paralelas a *BC*.

Temos agora uma série de paralelogramos como *FQ, TP, SN*, e *AD* divide ao meio lados opostos em cada um deles. Assim, o centro de gravidade de cada paralelogramo está sobre AD [Prop. 9], e, portanto, o centro de gravidade da figura feita de todos eles está sobre AD.

Seja O o centro de gravidade de todos os paralelogramos tomados conjuntamente. Ligue OH e a prolongue; desenhe também CV paralelo a DA encontrando o prolongamento de OH em V.

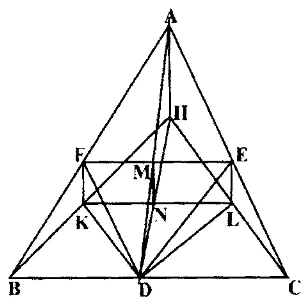
Agora, se n for o número de partes nas quais AC está dividida, Δ ADC : (soma dos triângulos sobre $AN, NP, ...) = AC^2 : (AN^2 + NP^2 + ...) = n^2 : n = n : 1 = AC:AN$. Similarmente, Δ ABD : (soma dos triângulos sobre $AM, ML, ...) = AB:AM$. E $AC:AN = AB:AM$. Segue-se que Δ ABC: (soma de todos os Δ 's pequenos) $= CA:AN > VO:OH$, pelas paralelas. Suponha OV prolongado até X tal que Δ ABC : (soma dos Δ 's pequenos) $= XO:OH$, de onde, *dividindo*, (soma dos paralelogramos) : (soma dos Δ 's pequenos) $= XH:HO$. Então, como o centro de gravidade do triângulo ABC está em H, e o centro de gravidade de sua parte feita dos paralelogramos está em O, segue-se da Prop. 8 que o centro de gravidade da porção remanescente, consistindo de todos os triângulos pequenos tomados conjuntamente, está em X.

Mas isto é impossível, pois todos os triângulos estão sobre um lado da linha passando por X e paralela a AD.

Portanto, o centro de gravidade do triângulo só pode estar sobre AD.

Prova alternativa.

Suponha, se possível, que H, não estando sobre AD, seja o centro de gravidade do triângulo ABC. Ligue AH, BH, CH. Sejam E e F os pontos médios de CA e AB, respectivamente, e ligue DE, EF, FD. Deixe EF encontrar-se com AD em M.



Desenhe FK e EL paralelas a AH encontrando BH e CH em K e L, respectivamente. Ligue KD, HD, LD, KL. Deixe KL encontrar-se com DH em N, e ligue MN.

Como DE é paralelo a AB, os triângulos ABC e EDC são similares.

E, como $CE = EA$, e EL é paralelo a AH, segue-se que $CL = LH$. E $CD = DB$. Portanto, BH é paralelo a DL.

Assim, nos triângulos similares e, situados similarmente ABC e EDC, as linhas retas AH e BH são paralelas, respectivamente, a EL e DL; e segue-se que H e L estão situadas, similarmente, em relação aos triângulos respectivos.

Mas H é, por hipótese, o centro de gravidade de ABC. Portanto, L é o centro de gravidade de EDC. [Prop. 11]

Similarmente, o ponto K é o centro de gravidade do triângulo FBD.

E os triângulos FBD e EDC são iguais, de tal forma que o centro de gravidade de ambos juntos é o ponto médio de KL, isto é, no ponto N.

O restante do triângulo *ABC*, após serem deduzidos os triângulos *FBD* e *EDC*, é o paralelogramo *AFDE*, e o centro de gravidade deste paralelogramo está em *M*, a intersecção das diagonais.

Segue-se que o centro de gravidade de todo o triângulo *ABC* tem de estar sobre *MN* ; isto é, *MN* tem de passar através de *H*, o que é impossível (pois *MN* é paralela a *AH*).

Portanto, o centro de gravidade do triângulo *ABC* só pode estar sobre *AD*.

Proposição 14

Segue-se imediatamente da última proposição que o centro de gravidade de qualquer triângulo está na intersecção das linhas desenhadas a partir de quaisquer dois ângulos aos pontos médios dos lados opostos respectivos.

Proposição 15

Se AD e BC são dois lados paralelos de um trapézio ABCD, AD sendo o menor, e se AD e BC são divididos ao meio em E e F, respectivamente, então o centro de gravidade do trapézio está num ponto G sobre EF tal que GE:GF = (2BC + AD):(2AD + BC).

Prolongue *BA* e *CD* para se encontrarem em *O*. Então o prolongamento de *FE* também vai passar através de *O*, pois *AE = ED* e *BF = FC*.

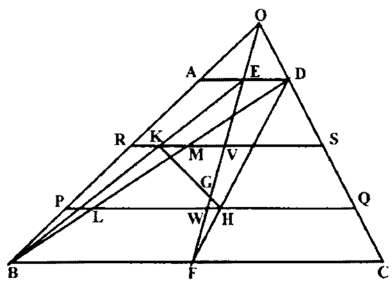
Agora, o centro de gravidade do triângulo *OAD* vai estar sobre *OE*, e aquele do triângulo *OBC* vai estar sobre *OF*. [Prop. 13]

Segue-se que o centro de gravidade do restante, o trapézio *ABCD*, também vai estar sobre *OF*. [Prop. 8]

Ligue *BD*, e a divida em *L* e *M* em três partes iguais. Através de *L* e *M* desenhe *PQ* e *RS* paralelas a *BC* encontrando *BA* em *P* e *R*, *FE* em *W* e *V*, e *CD* em *Q* e *S*, respectivamente.

Ligue *DF* e *BE* encontrando *PQ* em *H* e *RS* em *K*, respectivamente.

Agora, como *BL = BD/3*, *FH = FD/3*.



Portanto, *H* é o centro de gravidade do triângulo *DBC*.

Similarmente, como *EK = BE/3*, segue-se que *K* é o centro de gravidade do triângulo *ADB*.

Portanto, o centro de gravidade dos triângulos *DBC* e *ADB* juntos, isto é do trapézio, está sobre a linha *HK*.

Mas, ele também está sobre *OF*.

Portanto, se *OF* e *HK* se encontram em *G*, *G* é o centro de gravidade do trapézio.

Portanto [Props. 6 e 7], Δ *DBC*: Δ *ABD = KG:GH = VG:GW*. Mas Δ *DBC*: Δ *ABD = BC:AD*.

Portanto, *BC:AD = VG:GW*. Segue-se que *(2BC + AD): (2AD + BC) = (2VG + GW): (2GW + VG) = EG:GF*. Q.E.D.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES. Mechanica. In: **ROSS**, W. D. (ed). *The Works of Aristotle*. Trad. E. S. Forster. Oxford: Clarendon Press, 1913. v. VI.

ARISTÓTELES. *The Works of Aristotle*. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. Great Books of the Western World, v. 8.

ARQUIMEDES. *The Works of Archimedes*. Trad. T. L. Heath. New York: Dover, 1912.

ARQUIMEDES. *The Works of Archimedes*. Trad. T. L. Heath. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. Great Books of the Western World, v. 11.

ASSIS, A. K. T. Sobre os corpos flutuantes. Trad. com. texto de Arquimedes. Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência, n. 16, p. 71-79, 1996.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CLAGETT, M. *The Science of Mechanics in the middle ages*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1959.

DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes*. Copenhagen: Ejnar Munksgaard, 1956.

DUGAS, R. *A History of Mechanics*. New York: Dover, 1988.

DUHEM, P. *The Origins of statics*. Dordrecht, Kluwer, 1959. (Boston Studies in the Philosophy of Science, v. 123)

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover, 1981. 2 v.

MACH, E. *The Science of Mechanics: a critical and historical account of its development*. La Salle: Open Court, 1960.

Agradeço ao Dr. Roberto de Andrade Martins pelo apoio.

Trabalho recebido em novembro de 1996
(para publicação somente no nº 18)

ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS é professor do Instituto de Física da UNICAMP.
Endereço: Instituto de Física 'Gleb Wataghin', Universidade Estadual de Campinas - Unicamp
13083-970 Campinas, SP, Brasil.
E-mail: assis@ifi.unicamp.br