

SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS (SEGUNDA PARTE)

ON THE EQUILIBRIUM OF PLANES (SECOND PART)

ARQUIMEDES

INTRODUÇÃO E TRADUÇÃO

ANDRÉ KOCH TORRES ASSIS

NIVALDO BENEDITO FERREIRA CAMPOS

UNICAMP

RESUMO – Esta é a tradução da segunda parte do texto de Arquimedes sobre o equilíbrio dos planos. A primeira parte do trabalho foi publicada na Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência (n. 18, p. 81-94, jul./ dez. 1997). Nesta segunda parte, o resultado mais importante obtido por Arquimedes é o centro de gravidade de um segmento parabólico. *Palavras-chave:* Arquimedes; centro de gravidade; equilíbrio; segmento parabólico; lei da alavanca.

ABSTRACT – This is the portuguese translation of the second part of Archimedes' work on the equilibrium of planes. The first part of the translation was published in Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência (n. 18, p. 81-94, July/Dec. 1997). This second part's main achievement is Archimedes' definition of the center of gravity of a parabolic segment. *Keywords:* Archimedes; center of gravity; equilibrium; law of the lever; parabolic segment..

INTRODUÇÃO

Apresentamos neste artigo a tradução da segunda parte do texto de Arquimedes sobre o equilíbrio dos planos. A primeira parte foi publicada em 1997¹. Nesta segunda parte ele obtém como resultado mais importante o centro de gravidade de um segmento parabólico. Esta tradução é feita a partir da tradução em inglês dos trabalhos do autor feita por T. L. Heath², que já havia sido utilizada quando foi feita a tradução da primeira parte. As notas de Heath são indicadas por [N. H.], enquanto que as notas dos tradutores são indicadas por [N. T.]. Os trechos entre colchetes na tradução são de Heath, enquanto que os trechos entre chaves são dos tradutores, para facilitar a compreensão de algumas passagens. Uma discussão detalhada do trabalho traduzido aqui foi feita por Dijksterhuis³.

Vamos ilustrar aqui na linguagem das coordenadas cartesianas e do cálculo integral os resultados que ele obtém em um caso particular. Vamos considerar um segmento parabólico plano limitado pelo eixo x e pela parábola $y = b(-x^2/a^2)$. Temos então $-a \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$. A área A do segmento parabólico é dada por

$$A = \int_{x=-a}^a \int_{y=0}^{y(x)} dx dy = \int_{x=-a}^a y(x) dx = b \left[\left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) - \left(-a - \frac{-a^3}{3a^2} \right) \right] = \frac{4}{3} ab$$

Este resultado havia sido obtido pela primeira vez pelo próprio Arquimedes no trabalho intitulado *Quadratura da Parábola*. A última proposição deste trabalho afirma que: cada segmento limitado

por uma parábola e por uma corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base e a mesma altura do segmento. Isto é, sendo P o vértice do segmento parabólico acima com $(x,y)=(0,b)$ e os pontos Q e q dados por $(x,y)=(-a,0)$ e $(x,y)=(a,0)$, respectivamente, temos:

$$A = \frac{4}{3} \Delta PQq = \frac{4}{3} \frac{2a \cdot b}{2} = \frac{4}{3} ab$$

E isto coincide com o resultado anterior.

Depois de calcular a área do segmento parabólico, passamos para o cálculo do centro de massa. Vamos supor o segmento parabólico com uma massa M distribuída uniformemente sobre sua superfície, tal que sua densidade de massa σ seja dada por $\sigma = M/A$. Por simetria o centro de massa está ao longo do eixo y . O cálculo da posição do centro de massa ao longo do eixo y é dado por:

$$\begin{aligned} y_{CM} &= \frac{1}{M} \int_{x=-a}^a \int_{y=0}^{y(x)} y dm = \frac{\sigma}{M} \int_{x=-a}^a \int_{y=0}^{y(x)} y dy dx = \frac{1}{2A} \int_{x=-a}^a y^2(x) dx \\ &= \frac{b^2}{2A} \int_{x=-a}^a \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} \right) dx = \frac{ab^2}{A} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} \frac{ab^2}{A} \end{aligned}$$

Utilizando o resultado anterior para a área obtém-se o resultado final apresentado pelo autor neste trabalho (proposição 8 abaixo), ou seja,

$$y_{CM} = \frac{2}{5} b, \text{ ou } b - y_{CM} = \frac{3}{2} y_{CM}$$

Após esta pequena introdução passamos à tradução do texto.

SOBRE O EQUILÍBRIO DOS PLANOS - LIVRO II

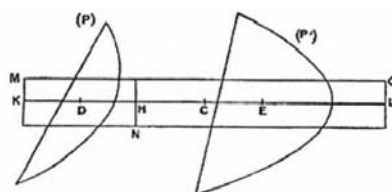
ARQUIMEDES

PROPOSIÇÃO 1

Se P e P' são {as áreas de} dois segmentos parabólicos, sendo D e E seus centros de gravidade, respectivamente, então o centro de gravidade dos dois segmentos considerados conjuntamente estará em um ponto C sobre DE determinado pela relação

$$P : P' = CE : CD.$$

Na mesma linha reta com DE , meça EH e EL , cada um igual a DC , e {meça também} DK igual a DH ; de onde é imediato que $DK = CE$ e também que $KC = CL$.



Aplique um retângulo MN com área igual ao do segmento parabólico P em uma base igual a KH e coloque o retângulo de modo que KH o divida ao meio e seja paralelo à sua base.

Então, D é o centro de gravidade de MN , já que $KD = DH$.

Prolongue os lados do retângulo que são paralelos a KH e complete o retângulo NO cuja base é igual a HL . Então E é o centro de gravidade do retângulo NO .

Agora,
 $(MN) : (NO) = KH : HL$
 $= DH : EH$
 $= CE : CD$
 $= P : P'$.

Mas,
 $(MN) = P$.
 Portanto,
 $(NO) = P'$.

Também, já que C é o ponto médio de KL , C é o centro de gravidade do paralelogramo completo, constituído pelos dois paralelogramos (MN) e (NO) , os quais são iguais {em área} a P e P' e têm os mesmos centros de gravidade que P e P' , respectivamente.

Desta forma, C é o centro de gravidade de P e P' tomados conjuntamente.

DEFINIÇÃO E LEMAS PRELIMINARES À PROPOSIÇÃO 2

“Se em um segmento limitado por uma linha reta e uma seção de um cone reto [uma parábola] for inscrito um triângulo tendo a mesma base que o segmento e altura igual, se novamente triângulos forem inscritos nos segmentos remanescentes tendo as mesmas bases que os segmentos e altura igual, e, se nos segmentos restantes, triângulos forem inscritos do mesmo modo, será dito que a figura resultante está *inscrita da forma reconhecida* no segmento.

“E é evidente”

1. “que as linhas unindo os dois ângulos da figura inscrita desta forma que estão mais próximos do vértice do segmento, e {unindo} os próximos pares de ângulos em seqüência, serão paralelas à base do segmento,”
2. “que as referidas linhas serão divididas ao meio pelo diâmetro do segmento,”
3. “e que elas cortarão o diâmetro nas proporções dos números ímpares sucessivos, o número um referindo-se ao [comprimento adjacente ao] vértice do segmento.

“E estas propriedades terão de ser provadas em seus lugares respectivos.”

PROPOSIÇÃO 2

Se uma figura é “inscrita da forma reconhecida” em um segmento parabólico, o centro de gravidade da figura inscrita dessa forma estará localizado sobre o diâmetro do segmento.

Pois, na figura dos lemas precedentes, o centro de gravidade do trapézio $BRrb$ tem de estar sobre XO , o {centro de gravidade} do trapézio $RQqr$ {tem de estar} sobre WX , e assim sucessivamente, enquanto o centro de gravidade do triângulo PAP estará sobre AV .

Portanto, o centro de gravidade da figura completa estará sobre AO .

PROPOSIÇÃO 3

Se BAB' e bab' forem dois segmentos parabólicos similares cujos diâmetros são AO e ao , respectivamente, e se a figura for inscrita em cada segmento “da forma reconhecida,” sendo igual o número de lados em cada figura, os centros de gravidade das figuras inscritas dividirão AO e ao na mesma razão⁴.

Suponha que $BRQPAP'Q'R'B'$ e $brqpap'q'r'b'$ são as duas figuras inscritas “da forma reconhecida”. Ligue PP' , QQ' e RR' encontrando AO em L , M e N , e {ligue} pp' , qq' e rr' encontrando ao em l , m e n .

Então [Lema (3)]

$$AL : LM : MN : NO = 1 : 3 : 5 : 7$$

$$= al : lm : mn : no,$$

de tal forma que AO e ao estão divididos na mesma proporção.

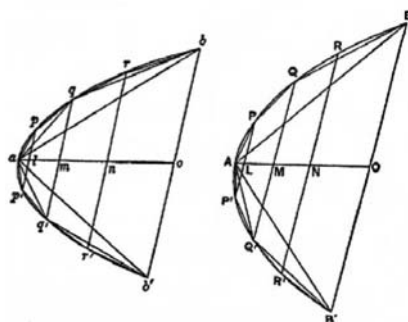
Também, revertendo-se a prova do Lema (3), vemos que

$$PP' : pp' = QQ' : qq' = RR' : rr' = BB' : bb'.$$

Como então $RR' : BB' = rr' : bb'$, e estas razões determinam, respectivamente, a proporção em que NO e no são divididas pelos centros de gravidade dos trapézios $BRR'B'$ e $brr'b'$ [I.15]5, segue que os centros de gravidade dos trapézios dividem NO e no na mesma razão.

Similarmente, os centros de gravidade dos trapézios $RQQ'R'$ e $rqq'r'$ dividem MN e mn na mesma razão, respectivamente, e assim sucessivamente.

Por último, os centros de gravidade dos triângulos PAP' e pap' dividem AL e al , respectivamente, na mesma razão.

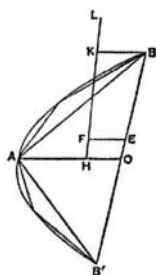


Além disso, os trapézios e triângulos correspondentes estão, cada {forma geométrica} para cada {forma geométrica correspondente}, na mesma proporção (já que seus lados e suas alturas são, respectivamente, proporcionais), enquanto que AO e ao são divididos na mesma proporção.

Portanto, os centros de gravidade das figuras inscritas completas dividem AO e ao na mesma proporção.

PROPOSIÇÃO 4

O centro de gravidade de qualquer segmento parabólico cortado por uma reta localiza-se sobre o diâmetro do segmento.



Seja BAB' um segmento parabólico, A seu vértice e AO seu diâmetro. Então, se o centro de gravidade do segmento não está localizado sobre AO , suponha que ele seja, se possível, o ponto F . Trace FE paralelo a AO encontrando BB' em E .

Inscruva no segmento o triângulo ABB' tendo o mesmo vértice e altura que o segmento, e tome uma área S tal que

$$\triangle ABB' : S = BE : EO.$$

Podemos então inscrever no segmento “da forma reconhecida” uma figura tal que os segmentos da parábola remanescente são conjuntamente menores do que S^6 .

Seja a figura inscrita na forma apropriada; então seu centro de gravidade situa-se sobre AO [Prop. 2]. Seja ele o ponto H .

Ligue HF e faça seu prolongamento encontrar em K a linha que passa através de B e é paralela a AO .

Então temos

(figura inscrita) : (restante do segmento) > $\triangle ABB' : S$

> $BE : EO$

> $KF : FH$.

Suponha L tomado sobre HK prolongado de forma que a razão anterior é igual à razão $LF : FH$.

Então, uma vez que H é o centro de gravidade da figura inscrita e F é o {centro de gravidade} do segmento, L tem de ser o centro de gravidade de todos os segmentos considerados conjuntamente, os quais formam o restante do segmento original [I.8].⁷

Mas isto é impossível, uma vez que todos os segmentos situam-se sobre um lado da linha traçada através de L e paralela a AO [conferir *Postulado 7* {do livro I de Sobre o Equilíbrio dos Planos}].

Portanto, o centro de gravidade do segmento não pode se situar em outro lugar que não seja sobre AO .

PROPOSIÇÃO 5

Se em um segmento parabólico uma figura for inscrita "da forma reconhecida," o centro de gravidade do segmento estará mais próximo do vértice do segmento do que está o centro de gravidade da figura inscrita.

Seja BAB' o segmento dado e AO seu diâmetro. Em primeiro lugar, seja ABB' o triângulo inscrito "da forma reconhecida".

Divida AO em F de modo que $AF = 2FO$; F é então o centro de gravidade do triângulo ABB' .

Divida ao meio AB e AB' em D e D' , respectivamente, e ligue DD' de forma a encontrar AO em E . Trace DQ e $D'Q'$ paralelamente a OA , de forma a encontrar a curva. Então QD e $Q'D'$ serão os diâmetros dos segmentos cujas bases são AB e AB' , e os centros de gravidade desses segmentos se situarão, respectivamente, sobre QD e $Q'D'$ [Prop. 4]. Sejam eles então H e H' , e ligue HH' de forma a encontrar AO em K .

Agora, QD e $Q'D'$ são iguais⁸ e, portanto, são iguais os segmentos dos quais eles são os diâmetros [Sobre Conóides e Esferóides, Prop. 3].

Também, uma vez que QD e $Q'D'$ são paralelos e $DE = ED'$, K é o ponto médio de HH' .

Portanto, o centro de gravidade dos segmentos iguais AQB e $AQ'B'$ considerados conjuntamente, é K , onde K situa-se entre E e A . E o centro de gravidade do triângulo ABB' é F .

Segue-se que o centro de gravidade de todo o segmento BAB' situa-se entre K e F e, portanto, está mais próximo do vértice A do que F está.

Em segundo lugar, considere a figura de cinco lados $BQAQ'B'$ inscrita "da forma reconhecida," sendo QD e $Q'D'$, como anteriormente, os diâmetros dos segmentos AQB e $AQ'B'$.

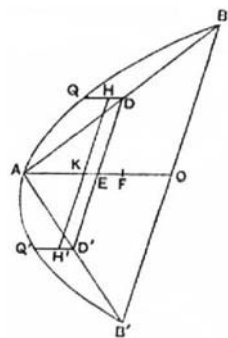
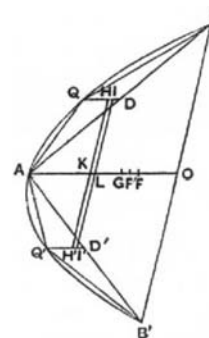
Então, de acordo com a primeira parte desta proposição, o centro de gravidade do segmento AQB (situando-se, é claro, sobre QD) está mais próximo de Q do que está o centro de gravidade do triângulo AQB . Seja H o centro de gravidade do segmento e {seja} I {o centro de gravidade} do triângulo.

Similarmente, seja H' o centro de gravidade do segmento $AQ'B'$ e {seja} I' o {centro de gravidade} do triângulo $AQ'B'$.

Segue-se que o centro de gravidade dos dois segmentos AQB e $AQ'B'$ considerados conjuntamente é K , o ponto médio de HH' , e o {centro de gravidade} dos dois triângulos AQB e $AQ'B'$ é L , o ponto médio de $I I'$.

Se agora o centro de gravidade do triângulo ABB' for F , o centro de gravidade de todo o segmento BAB' (isto é, {o centro de gravidade} do triângulo ABB' e dos dois segmentos AQB e $AQ'B'$ considerados conjuntamente) será o ponto G sobre KF determinado pela proporção

$$(\text{soma de segmentos } AQB \text{ e } AQ'B') : \triangle ABB' = FG : GK. \text{ [I. 6, 7]}^9.$$



E o centro de gravidade da figura inscrita $BQAQ'B'$ é um ponto F' sobre LF determinado pela proporção

$$(\Delta AQB + \Delta AQ'B') : \Delta ABB' = FF' : F'L. \quad [I. 6, 7]$$

[Portanto,

$$FG : GK > FF' : F'L,$$

ou

$$GK : FG < F'L : FF',$$

e, componendo¹⁰,

$$FK : FG < FL : FF',$$

enquanto

$$FK > FL.]$$

Portanto, $FG > FF'$, ou G situa-se mais próximo do que F' do vértice A .

Usando este último resultado e prosseguindo da mesma maneira, podemos provar a proposição para *qualquer* figura inscrita “da forma reconhecida”.

PROPOSIÇÃO 6

Dado um segmento de uma parábola cortada por uma linha reta, é possível inscrever nela “da forma reconhecida” uma figura tal que a distância entre os centros de gravidade do segmento e da figura inscrita seja menor que qualquer comprimento designado.

Seja BAB' o segmento, AO seu diâmetro, G seu centro de gravidade, e ABB' o triângulo inscrito “da forma reconhecida”.

Seja D o comprimento dado e S uma área tal que

$$AG : D = \Delta ABB' : S.$$

No segmento inscreva “da forma reconhecida” uma figura tal que a soma dos segmentos restantes seja menor do que S . Seja F o centro de gravidade da figura inscrita.

Provaremos que $FG < D$.

Pois, caso não seja {menor}, FG tem ser igual ou maior do que D .

E, claramente,

$$(\text{figura inscrita}) : (\text{soma dos segmentos restantes}) > \Delta ABB' : S$$

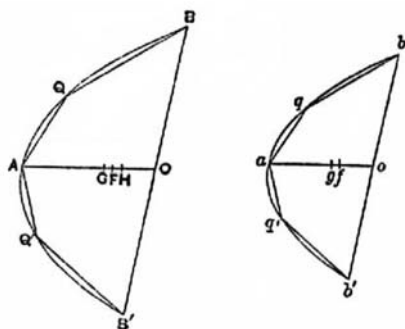
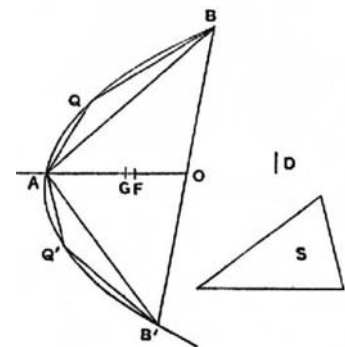
$$> AG : D$$

$$> AG : FG, \text{ por hipótese (uma vez } FG \nless D).$$

Seja a primeira razão igual à razão $KG : FG$ (onde K situa-se sobre o segmento GA prolongado); segue-se que K é o centro de gravidade dos segmentos pequenos considerados conjuntamente. [I.8]

Mas isto é impossível, uma vez que os segmentos estão todos sobre o mesmo lado de uma linha traçada por K e paralela a BB' .

Desta forma, FG só pode ser menor do que D .



PROPOSIÇÃO 7

Se dois segmentos parabólicos forem similares, seus centros de gravidade dividem seus diâmetros na mesma razão.

Sejam BAB' e bab' os dois segmentos similares, AO e ao seus diâmetros, e G e g seus centros de gravidade, respectivamente.

Então, se G e g não dividem AO e ao , respectivamente, na mesma razão, suponha que H seja um ponto sobre AO tal que

$$AH : HO = ag : go;$$

e inscreva no segmento BAB' "da forma reconhecida" uma figura tal que, se F for seu centro de gravidade,

$$GF < GH. \text{ [Prop. 6]}$$

Inscriva no segmento bab' "da forma reconhecida" uma figura similar; então, se f for o centro de gravidade desta figura,

$$ag < af. \text{ [Prop. 5]}$$

E, pela Prop. 3,

$$af : fo = AF : FO.$$

Mas

$$AF : FO < AH : HO$$

$< ag : go$, por hipótese.

Portanto,

$$af : fo < ag : go; \text{ o que é impossível.}$$

Segue que G e g só podem dividir AO e ao na mesma razão.

PROPOSIÇÃO 8

Se AO for o diâmetro de um segmento parabólico e G o seu centro de gravidade, então

$$AG = \frac{3}{2} GO.$$

Seja o segmento BAB' . Inscriva o triângulo ABB' "da forma reconhecida" e seja F seu centro de gravidade.

Divida ao meio AB e AB' em D e D' e trace DQ e $D'Q'$ paralelos a OA , até encontrar a curva, de forma que QD e $Q'D'$ sejam os diâmetros dos segmentos AQB e $AQ'B'$, respectivamente.

Sejam H e H' os centros de gravidade dos segmentos AQB e $AQ'B'$, respectivamente. Ligue QQ' e ligue HH' encontrando AO em V e K , respectivamente.

Então K é o centro de gravidade dos dois segmentos AQB e $AQ'B'$ considerados conjuntamente.

Agora

$$AG : GO = QH : HD, \text{ [Prop. 7]}$$

portanto,

$$AO : OG = QD : HD.$$

Mas $AO = 4QD$ [como é facilmente provado por meio do Lema (3)].

Portanto,

$$OG = 4HD;$$

e, por subtração,

$$AG = 4QH.$$

Também, pelo Lema (2), QQ' é paralelo a BB' e, portanto, a DD' . Segue da Prop. 7 que HH' também é paralelo a QQ' ou a DD' e, conseqüentemente,

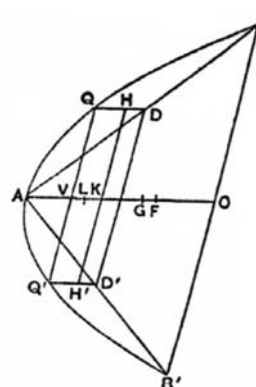
$$QH = VK.$$

Portanto,

$$AG = 4VK,$$

e

$$AV + KG = 3VK.$$



Medindo-se VL ao longo de VK de forma que $VL = \frac{1}{3} AV$, temos $KG = 3LK$. (1)

Novamente,

$$AO = 4AV \text{ [Lema (3)]}$$

$$= 3AL, \text{ uma vez que } AV = 3VL,$$

portanto,

$$AL = \frac{1}{3} AO = OF. \text{ (2)}$$

Agora, por I. 6, 7,¹¹

$\Delta ABB'$: (soma dos segmentos AQB e $AQ'B'$) = $KG : GF$,

e

$$\Delta ABB' = 3(\text{soma dos segmentos } AQB \text{ e } AQ'B')$$

[uma vez que o segmento ABB' é igual a $\frac{4}{3} \Delta ABB'$ (*Quadratura da Parábola*, Props 17 e 24)].

Portanto,

$$KG = 3GF.$$

Mas

$$KG = 3LK, \text{ de (1) acima.}$$

Portanto,

$$LF = LK + KG + GF$$

$$= 5GF.$$

E, de (2),

$$LF = (AO - AL - OF) = \frac{1}{3} AO = OF.$$

Portanto,

$$OF = 5GF,$$

e

$$OG = 6GF.$$

Mas

$$AO = 3OF = 15GF.$$

Portanto, por subtração,

$$AG = 9GF$$

$$= \frac{3}{2} GO.$$

PROPOSIÇÃO 9 (LEMA)

Se a, b, c, d forem quatro linhas em proporção contínua¹² e em ordem decrescente de magnitude, e se

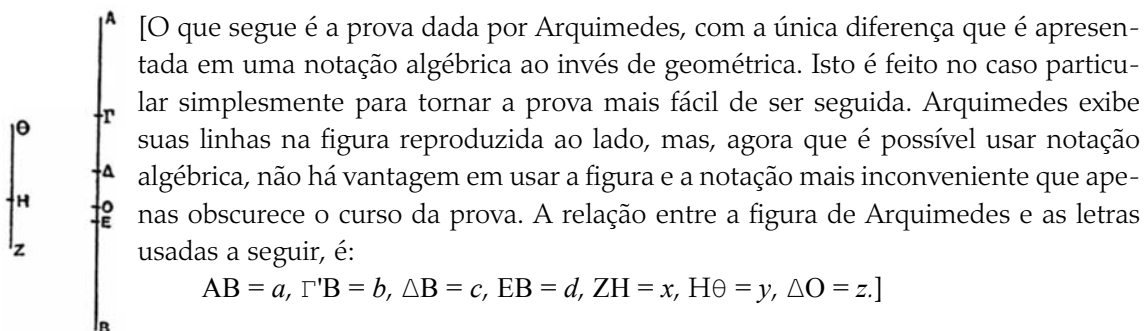
$$d : (a - d) = x : \frac{3}{5} (a - c),$$

e

$$(2a + 4b + 6c + 3d) : (5a + 10b + 10c + 5d) = y : (a - c),$$

é requerido provar-se que

$$x + y = \frac{2}{5} a.$$



Temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

de onde,

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} = \frac{c-d}{d},$$

e, portanto,

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b-c}{c-d} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad (2)$$

Agora,

$$\frac{2(a+b)}{2c} = \frac{a+b}{c} = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-c}{c-d} = \frac{a-c}{c-d}$$

E, de forma semelhante,

$$\frac{b+c}{d} = \frac{b+c}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a-c}{c-d}$$

Das duas últimas relações, vem que

$$\frac{a-c}{c-d} = \frac{2a+3b+c}{2c+d} \quad (3)$$

Suponha z ser considerado tal que

$$\frac{2a+4b+4c+2d}{2c+d} = \frac{a-c}{z} \quad (4)$$

de tal forma que $z < (c-d)$.

Portanto,

$$\frac{a-c+z}{a-c} = \frac{2a+4b+6c+3d}{2(a+d)+4(b+c)}$$

E, por hipótese,

$$\frac{a-c}{y} = \frac{5(a+d)+10(b+c)}{2a+4b+6c+3d},$$

tal que

$$\frac{a-c+z}{y} = \frac{5(a+d)+10(b+c)}{2(a+d)+4(b+c)} = \frac{5}{2} \quad (5)$$

Novamente, fazendo a divisão cruzada de (3) por (4), obtemos

$$\frac{z}{c-d} = \frac{2a+3b+c}{2(a+d)+4(b+c)},$$

de onde se obtém

$$\frac{c-d-z}{c-d} = \frac{b+3c+2d}{2(a+d)+4(b+c)} \quad (6)$$

Mas, de (2),

$$\frac{c-d}{d} = \frac{a-b}{b} = \frac{3(b-c)}{3c} = \frac{2(c-d)}{2d},$$

de tal forma que

$$\frac{c-d}{d} = \frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{b+3c+2d} \quad (7)$$

Combinando (6) e (7), temos

$$\frac{c-d-z}{d} = \frac{(a-b)+3(b-c)+2(c-d)}{2(a+d)+4(b+c)},$$

tal que

$$\frac{c-z}{d} = \frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)} \quad (8)$$

E, uma vez que [de (1)]

$$\frac{c-d}{c+d} = \frac{b-c}{b+c} = \frac{a-b}{a+b},$$

temos

$$\frac{c-d}{a-c} = \frac{c+d}{b+c+a+b},$$

portanto,

$$\frac{a-d}{a-c} = \frac{a+2b+2c+d}{a+2b+c} = \frac{2(a+d)+4(b+c)}{2(a+c)+4b} \quad (9)$$

Então

$$\frac{a-d}{\frac{3}{5}(a-c)} = \frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}},$$

e, portanto, por hipótese,

$$\frac{d}{x} = \frac{2(a+d)+4(b+c)}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}}.$$

Mas, por (8)

$$\frac{c-z}{d} = \frac{3a+6b+3c}{2(a+d)+4(b+c)};$$

e segue, *ex aequali*¹³, que

$$\frac{c-z}{x} = \frac{3(a+c)+6b}{\frac{3}{5}\{2(a+c)+4b\}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

E, por (5),

$$\frac{a-c+z}{y} = \frac{5}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{5}{2} = \frac{a}{x+y},$$

Ou

$$x+y = \frac{2}{5}a.$$

PROPOSIÇÃO 10

Se $PP'B'B$ for a porção de uma parábola interceptada entre duas cordas paralelas PP' e BB' , divididas ao meio, respectivamente, em N e O pelo diâmetro ANO (N estando mais próximo que O do vértice A do segmento) e se NO for dividido em cinco partes iguais, das quais LM é a do meio (L estando mais próximo de N do que está M), então, se G for um ponto sobre LM tal que

$$LG : GM = BO^2 \times (2PN + BO) : PN^2 \times (2BO + PN),$$

G será o centro de gravidade da área $PP'B'B$.

Considere uma linha ao igual a AO , com an sobre ela, igual a AN . Sejam p e q pontos sobre a linha ao tal que

$$ao : aq = aq : an, \quad (1)$$

$$ao : an = aq : ap, \quad (2)$$

[daí vem que $ao : aq = aq : an = an : ap$, ou ao, aq, an, ap são linhas em proporção contínua e em ordem decrescente de magnitude].

Meça ao longo de GA um comprimento GF tal que

$$op : ap = OL : GF. \quad (3)$$

Então, uma vez que PN e BO são ordenadas em relação a ANO ,

$$\begin{aligned} BO^2 : PN^2 &= AO : AN \\ &= ao : an \\ &= ao^2 : aq^2, \text{ por (1),} \end{aligned}$$

de modo que

$$BO : PN = ao : aq, \quad (4)$$

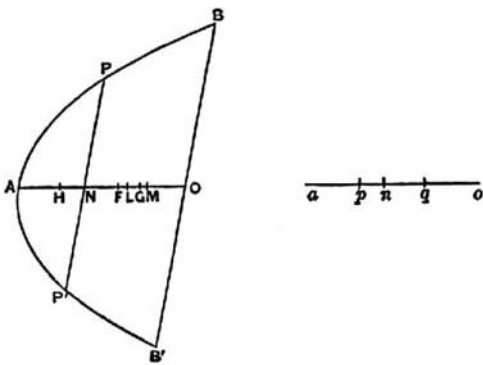
E

$$\begin{aligned} BO^3 : PN^3 &= ao^3 : aq^3 \\ &= (ao : aq) \times (aq : an) \times (an : ap) \\ &= ao : ap. \end{aligned} \quad (5)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\text{segmento } BAB') : (\text{segmento } PAP') \\ &= \triangle BAB' : \triangle PAP' \\ &= BO^3 : PN^3 \\ &= ao : ap, \end{aligned}$$

de modo que



$$\begin{aligned} (\text{área } PP'B'B) : (\text{segmento } PAP') &= op : ap \\ &= OL : GF, \text{ por(3),} \\ &= ON : GF. \end{aligned} \quad (6)$$

Agora

$$\begin{aligned} BO^2 \times (2PN + BO) : BO^3 \\ &= (2PN + BO) : BO \\ &= (2aq + ao) : ao, \text{ por (4),} \\ BO^3 : PN^3 \\ &= ao : ap, \text{ por (5),} \\ \text{e } PN^3 : PN^2 \times (2BO + PN) \\ &= PN : (2BO + PN) \\ &= aq : (2ao + aq), \text{ por (4),} \\ &= ap : (2an + ap), \text{ por (2).} \end{aligned}$$

Portanto, *ex aequali*,

$$BO^2 \times (2PN + BO) : PN^2 \times (2BO + PN) = \frac{3}{5}(2aq + ao) : (2an + ap),$$

de forma que, por hipótese,

$$LG : GM = (2aq + ao) : (2an + ap).$$

Componendo, e multiplicando os antecedentes por 5,

$$ON : GM = \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} : (2an + ap).$$

Mas

$$ON : OM = 5 : 2 = \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} : \{2(ao + ap) + 4(aq + an)\}.$$

Segue-se que

$$ON : OG = \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} : (2ao + 4aq + 6an + 3ap).$$

Portanto,

$$(2ao + 4aq + 6an + 3ap) : \{5(ao + ap) + 10(aq + an)\} = OG : ON = OG : on.$$

E

$$\begin{aligned} ap : (ao - ap) &= ap : op \\ &= GF : OL, \text{ por hipótese,} \\ &= GF : \frac{3}{5} on, \end{aligned}$$

enquanto ao , aq , an , ap estão em proporção contínua.

Portanto, pela Prop. 9,

$$GF + OG = OF = \frac{2}{5} ao = \frac{2}{5} OA.$$

Então F é o centro de gravidade do segmento BAB' . [Prop. 8]

Seja H o centro de gravidade do segmento PAP' , tal que $AH = \frac{3}{5} AN$.

E, uma vez que

$$AF = \frac{3}{5} AO,$$

temos, por subtração,

$$HF = \frac{3}{5} ON.$$

Mas, por (6) acima,

$$\begin{aligned} (\text{área } PP'B'B) : (\text{segmento } PAP') &= \frac{3}{5} ON : GF \\ &= HF : FG. \end{aligned}$$

Então, uma vez que F e H são os centros de gravidade dos segmentos BAB' e PAP' , respectivamente, segue [por I. 6, 7] que G é o centro de gravidade da área $PP'B'B$.

NOTAS E REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

André K. T. Assis, doutor em física, é professor do Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, E-mail: assis@ifi.unicamp.br; homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis. Nivaldo B. F. Campos, doutor em engenharia, é professor do Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp. E-mail: nica@fem.unicamp.br. Os autores agradecem ao Prof. J. J. Lunazzi pelo apoio, a Daniele Gualtieri Rodrigues pela ajuda na tradução dos termos em latim e aos pareceristas pelas sugestões detalhadas para esta tradução.

- 1 ASSIS, Andre Koch Torres Assis. Sobre o equilíbrio dos planos, tradução comentada de um texto de Arquimedes. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, Rio de Janeiro. n. 18, p. 81-94, jul./dez.1997.
- 2 ARCHIMEDES. *The Works of Archimedes*. Tradução de T. L. Heath. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. Great Books of the Western World, v. 11.
- 3 DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes*. Copenhagen: Ejnar Mundsgaard, 1956.
- 4 [N. H.] Arquimedes enuncia esta proposição como verdadeira para segmentos similares, mas ela é igualmente verdadeira para segmentos que não são similares, como o desenvolvimento da prova irá mostrar.
- 5 [N. T.] Isto é, ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 15.
- 6 [N. H.] Pois a Prop. 20 da *Quadratura da Parábola* prova que, se em qualquer segmento [de parábola] for inscrito o triângulo com a mesma base e altura, o triângulo é maior que metade do segmento; de onde fica evidente que, cada vez que aumentamos o número de lados da figura inscrita “da forma reconhecida”,

eliminamos mais que a metade (da área) dos segmentos restantes.

- 7 [N. T.] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposição 8.
- 8 [N. H.] Isto pode tanto ser deduzido a partir do Lema (1) acima (uma vez que QQ' e DD' são ambos paralelos a BB), como a partir da Prop. 19 da *Quadratura da Parábola*, a qual se aplica igualmente a Q ou Q' .
- 9 [N. T.] Ver *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 6 e 7.
- 10 [N. T.] O que está entre colchetes aqui foi introduzido por T. L. Heath. *Componendo* vem do latim e pode ser interpretado aqui como “compondo.” Isto é, como $GK : FG < FL : FF'$, então $1 + (GK : FG) < 1 + (FL : FF')$, ou $(FG + GK) : FG < (FF' + FL) : FF'$, ou seja, $FK : FG < FL : FF'$, que é o que Heath quer mostrar.
- 11 [N. T.] Ou seja, *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, Livro I, Proposições 6 e 7.
- 12 [N. T.] Isto é, $a : b = b : c = c : d$.
- 13 [N. T.] A expressão “ex aequali” quer dizer algo como “retirando os iguais” que, no caso, são “ d ” e “ $2(a + d) + 4(b + c)$ ”, que aparecem nas duas proporções – a que vem “por hipótese” e a que vem da equação (8) – e que, retirados (por assim dizer), possibilitam que as duas proporções se fundam na proporção seguinte. Embora o conceito não seja o mesmo, o resultado é equivalente a multiplicar entre si os lados esquerdos destas duas últimas igualdades, assim como multiplicar simultaneamente os lados direitos. Simbolicamente Arquimedes tem duas proporções, $A/B = C/D$ e $E/A = F/C$, que resultam em $E/B = F/D$.

Trabalho recebido em 12/2004. Aprovado em 04/2005.